

M. A.

**Conic Sections.**

by

CHARLES SMITH.

مخروطی راشیں

ترجمہ

مولوی محمد نذیر الدین ، ایم۔ اے۔

UNIVERSAL  
LIBRARY

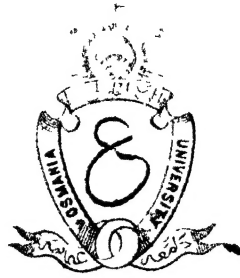
OU\_188161

UNIVERSAL  
LIBRARY









نصرت علیہ السلام علیہ السلام

# مخروطی تراشیں

تصنیف

چارلس اسمتھ ایم۔ اے

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

مرکز سررشتہ یافتہ ترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکار عالی

۱۳۶۰ھ ۱۳۵۰ھ ۱۹۴۱ء

طبع و نشر جامعہ عثمانیہ سرکار عالی

یہ کتاب سیکلن کمپنی کی اجازت سے جن کو حقِ امت  
حاصل ہے اُردو میں ترجمہ کر کے  
طبع و شائع کی گئی ہے

# فہرست مضامین

مخروطی تراشیں

نمبر	مضمون
۱	پہلا باب - محد
۲۳	دوسرا باب - خطِ مستقیم
۷۹	دوسرے باب پر مثالیں
	تیسرا باب - محوروں کی تبدیلی - غیر موسیقی نسبتیں یا
۸۳	چلیبی نسبتیں - درجہ
۱۰۲	چوتھا باب - دائرہ
۱۴۴	چوتھے باب پر مثالیں
۱۵۱	متفرق مثالیں (۱)
۱۵۵	پانچواں باب - قطع مکانی

صفحہ	مضمون
۱۸۵	لغات
۱۹۲	پانچویں باب پر مثالیں
۲۰۳	چھٹا باب - قطع ناقص
۲۲۸	چھٹے باب پر مثالیں
۲۶۰	ساتواں باب - قطع زائد
۲۸۴	ساتویں باب پر مثالیں
۲۹۰	متفرق مثالیں (۲)
۲۹۶	آٹھواں باب - مخروطی کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو۔
۳۰۹	آٹھویں باب پر مثالیں
۳۱۵	نواں باب - درجہ دوم کی عام مساوات
"	ہر منحنی جس کی مساوات دوسرے درجہ کی ہو ایک مخروطی ہوتا ہے۔
۳۱۸	ایک مخروطی کے مرکز کے محدود
۳۲۰	ممیز
"	ایک مرکز دار مخروطی کے محوروں کا عمل اور مقدار
۳۲۲	ایک مکافی کا محور اور وتر خاص
۳۲۳	مخروطیوں کو مرتسم کرنا
۳۲۷	مخروطی کے متعارفوں کی مساوات
۳۲۹	قائم زائد کے لیے شرط

صفحہ	مضون
۳۳۱	نویں باب پر مثالیں
۳۳۵	دسواں باب - متفرق مسئلے
"	مخروطی کے کسی نقطہ پر حماس کی مساوات
۳۳۷	وہ شرط کہ ایک دیا ہوا خط مستقیم ایک مخروطی کا حماس ہو سکے
۳۳۸	ایک مخروطی کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی کی مساوات
۳۴۰	مزدوج نقطے اور مزدوج خط
"	ایک مخروطی کا کوئی وتر ایک نقطے اور اس کے قطبی سے
۳۴۱	مستقیم طور پر منقطع ہوتا ہے
۳۴۳	ایک مخروطی کے قطر
"	وہ شرط کہ دو دیے ہوئے خط مزدوج قطروں کے متوازی ہوں
۳۴۵	ایک مخروطی کے مساوی مزدوج قطر
۳۴۶	ایک مخروطی کے وتروں کے قطعے
"	س۔ لہ می = ۲، س۔ لہ ۶ = ۰، اور س۔ لہ ۶ = ۰
۳۴۹	سے مراد
۳۵۳	کسی نقطہ سے حماسوں کے ایک زوج کی مساوات
۳۵۵	ایک وتر کے سروں کے حماسوں کی مساوات
۳۵۶	مرتب دائرہ کی مساوات
۳۵۷	ایک مخروطی کے چار ماسکے
۳۵۹	ایک مخروطی کے خروج المکرز
۳۶۰	ماسکے اور مرتب
۳۶۸	محوروں کی مساوات
۳۷۰	ایک مخروطی کی مساوات بحوالہ حماس اور عماد

صفحہ	مضمون
۳۷۳	عاد
۳۷۷	منشأہ منحنی
۳۸۶	دسویں باب پر مثالیں
۴۰۳	گیارہواں باب - محروطیوں کے نظام
۴۰۵	ایک محروطی پانچ نقطوں میں سے
۴۰۶	ایک محروطی چار نقطوں میں سے
۴۰۸	دو مکانی چار نقطوں میں سے
"	چار نقطوں میں سے گزرنے والے محروطیوں کا مرکز طریق
	ایک چار زاویوں کے وتر نقطے ایک ایسے مثلث کے
	رأس ہوتے ہیں جو کسی حالت محروطی کے لمحاظ سے
۴۱۳	خود قطبی ہو۔
	ایک چار زاویوں کے وتر ایک ایسے مثلث کے ضلع
	ہوتے ہیں جو کسی اندرونی محروطی کے لمحاظ سے
۴۱۳	خود قطبی ہو۔
۴۱۶	چار ثابت خطوں کو مس کرنے والے محروطیوں کا مرکز طریق
۴۱۸	محدودوں کے محوروں کو مس کرنے والا مکانی
۴۲۲	ہم ماسکی محروطی
۴۳۵	لنخی محروطی
۴۳۷	کسی نقطہ پر دائرہ اسنخا
۴۴۴	نویں باب پر مثالیں
۴۵۳	بارہواں باب - لغاف اور حماسی مساواتیں



صفحہ	مضمون
۴۵۳	لغات
۴۵۸	ماسی محدود اور مساواتیں
۴۶۰	لغات کا مرتب دائرہ
۴۶۲	لغات کے ماسکے
۴۶۳	محزوطی کے طول
۴۶۴	محزوطی ہم ماسکی جب کہ فہ (ل، م) =
"	محزوطی ہم ماسکی جب کہ فہ (لا، ما) =
۴۶۵	ماسی مساوات میں۔ لہ میں = کا مفہوم
"	ان محزوطیوں کے مرکزوں کا طریق جیہا ثابت خطوط میں
۴۶۶	ان محزوطیوں کے مرتب دائرے جو چار دیے ہوئے خطوط مستقیم کو
۵۶۸	میں کریں ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔
۴۶۹	بارہویں باب پر مثالیں
۴۷۷	تیرہواں باب۔ سہ خطی محدود
"	سہ خطی محدودوں کی تعریف
۴۷۹	خطوط استقیم
۴۸۸	چار نقطوں کے محدود شکل $\pm$ ف، $\pm$ گ، $\pm$ ہ میں
۴۸۹	چار خطوط کی مساوات شکل ل، $\pm$ م، $\pm$ ن میں
۴۹۲	محزوطی جو درجہ دوم کی عام مساوات سے حاصل ہوتے ہیں۔
۴۹۳	ماس اور قطبی
۴۹۶	ایک محزوطی کے مرکز کے محدود
"	ایک مکانی کے لیے شرط

صفحہ	مضمون
۴۹۷	مستقارب
۴۹۹	قائم زائد کے لیے شرط
"	حائط دائرہ
۵۰۰	ایک دائرے کے لیے شرطیں
۵۰۲	ماترے اور مرتب
۵۰۴	رقبہ محدود
۵۰۷	حائط مخروطی
۵۰۹	اندرونی مخروطی
۵۱۲	مخروطی جو چار ثابت نقطوں میں سے گزرتے ہیں
۵۱۴	مخروطی جو چار ثابت خطوں کو مس کرتے ہیں
۵۱۶	مخروطی ایک خود قطبی مثلث کے حوالے سے
۵۱۷	مخروطی دو ماسوں اور وتر تماس کے حوالے سے
۵۲۲	دائرے جن کا تعلق ایک مثلث سے ہوتا ہے
۵۲۲، ۵۲۸	پیا سکل کا مسئلہ
۵۳۰	بدیان کان (Brianchon) کا مسئلہ
۵۳۱	ماسی محدود
۵۳۵	مثلثات ایک مخروطی میں، اور دوسرے مخروطی کے گرد
۵۴۴	اور تیسرے کے لحاظ سے خود قطبی
۵۵۱	اندرونی — حائط کثیر الاضلاع
۵۶۰	تیرہویں باب پر مثالیں
"	چودھواں باب — متکافی قطبی — ظل
"	قطبی مکانی کی تعریف

صفحہ	مضمون
۵۶۱	کسی منحنی کا درجہ اور اس کے متکافی کی جماعت ایک ہی ہوتے ہیں
۵۶۲	مکافی مسئلوں کی مثالیں
۵۶۵	دائرہ کے لمحات سے مکافات
۵۶۲	ہم محور دائروں کی مکافات ہم ماسکی مخروطیوں میں
۵۶۲	تظلیل - تظلیل کی تعریف
۵۷۵	کسی منحنی کا نفل اُسی درجہ کا ایک منحنی ہوتا ہے
"	ماسوں، قطبوں اور قطبیوں، متوازی خطوط مستقیم نفل
	کسی خط کو لاتنا ہی پر نفل کیا جاسکتا ہے، اور اس کے ساتھ ہی کسی دوزاویوں کو دیے ہوئے زاویوں میں نفل کیا جاسکتا ہے۔
۵۷۸	کسی مخروطی کو ایک دائرہ میں نفل کیا جاسکتا ہے
۵۸۰	مخروطیوں کا ایک نظام جو ایک چار ضلعی میں چنے گئے ہوں ہم ماسکی مخروطیوں میں نفل کیا جاسکتا ہے
۵۸۱	پنسلوں اور سمعتوں کی چلیبی نسبتیں تظلیل سے نہیں بدلتیں
۵۸۲	چار خطوط کی پنسل کی چلیبی نسبت اس سمعت کی چلیبی نسبت کے مساوی ہوتی ہے جو ان خطوط کے قطبوں سے بنتی ہے۔
۵۸۶	ایک مخروطی پر کے نقطوں کے غیر موسیقی خواص، اور
"	ایک مخروطی کے ماسوں کے غیر موسیقی خواص۔
۵۸۹	ہم رسم سمعتیں اور پنسلیں
۵۹۸	چودھویں باب پر مثالیں

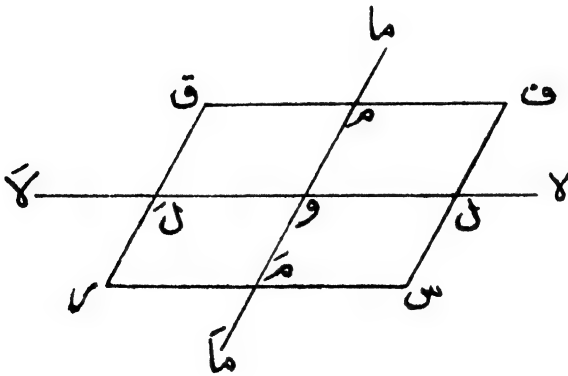
صفحہ	مضمون
۶۰۲	پندرہواں باب - غیر متغیر
۶۰۳	غیر متغیر
۶۲۳	پندرہویں باب پر مثالیں
۶۲۸	متفرق مثالیں

# پہلا باب

(۱)

محدو

۱۔ اگر ایک مستوی میں دو ثابت خطوط مستقیم لا و لا، ما و ما لیے جائیں اور مستوی کے کسی نقطہ ف میں سے دو خطوط مستقیم ف ل اور ف م، لا و لا، ما و ما کے متوازی کھینچے جائیں جہاں ف ل اور ف م، لا و لا اور ما و ما سے علی الترتیب ل اور م پر ملتے ہیں تو نقطہ ف کا محل معلوم ہو سکتا ہے جبکہ خطوط ف م اور ف ل کے



طول دیے گئے ہوں۔ کیونکہ ہمیں صرف ول، و م کو علی الترتیب معلومہ خطوط مرف، ل ف کے مساوی لینا اور متوازی الاضلاع ل و م ف کی تکمیل کرنا ہوگا۔

یہ طول مرف اور ل ف، یا ول اور و م، جو اس طرح نقطہ ف کے محل کو خطوط ولا، و ما کے حوالہ سے مقرر کرتے ہیں نقطہ ف کے محدود بحوالہ محاور ولا، و ما کہلاتے ہیں۔ محوروں کا نقطہ تقاطع مبدا کہلاتا ہے۔ جب محوروں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہوتا ہے تو محوروں کو قائمہ محاور کہا جاتا ہے لیکن جب یہ درمیانی زاویہ قائمہ نہیں ہوتا تو محوروں کو مائل محاور کہتے ہیں۔

(۲)

ول کو بالعموم نقطہ ف کا فصلہ اور ل ف کو معین کہتے ہیں۔ وہ محدود جس کی پیمائش محور ولا پر عمل میں آتی ہے حرف لا سے بتعیر کیا جاتا ہے اور وہ محدود جس کی پیمائش محور و ما پر کی جاتی ہے حرف ما سے بتعیر کیا جاتا ہے۔ اگر شکل میں، ول طول کی و اکائیاں اور و م ب اکائیاں ہوں تو نقطہ ف پر لا = و اور ما = ب اور اس لیے اس نقطہ کو اکثر اختصاراً نقطہ (و، ب) کہا جاتا ہے۔

۲۔ فرض کرو کہ و م کو طول میں و م کے مساوی اور ول کو ول کے مساوی لیا گیا ہے اور م، ل میں سے محوروں کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں (دیکھو شکل دفعہ ۱)۔ اب تین نقطوں ق، س، س کے محدود مقدار میں ف کے محدودوں کے مساوی ہونے لگے۔ پس خطوط ول، ل ف کے طولوں کا جان لینا ہی کافی نہیں ہے بلکہ وہ سمتیں بھی معلوم ہونی چاہئیں جن میں ان کی پیمائش کی گئی ہے۔

اگر ایک سمت میں پیمائش کردہ خطوں کو مثبت لیا جائے تو سمت مخالف میں پیمائش کردہ خطوں کو منفی لینا چاہیے۔ ہم ان خطوں کو جن کی پیمائش ولا یا و ما کی سمتوں میں کی گئی ہو مثبت سمجھیں گے اور اس لیے وہ خطوط جن کی پیمائش ولا یا و ما کی سمتوں میں کی گئی ہو منفی متصور ہونے چاہئیں۔

اب ہم نقاط 'ق'، 'س'، 'س' کے محدودوں میں تمیز کر سکتے ہیں۔  
 'س' کے محدودوں 'ل'، 'ل' 'س' ہیں اور یہ دونوں منفی سمت میں پیمائش کیے گئے  
 ہیں، اس لیے اگر 'ف' کے محدود 'ل'، 'ب' ہوں تو 'س' کے محدود - 'ل'، 'ب' ہونگے۔  
 'س' کے محدود 'ل'، 'ب' اور 'ق' کے - 'ل'، 'ب' ہونگے۔

چنانچہ 'ق'، 'س'، 'س' علی الترتیب نقاط ('ل'، 'ب')، ('ل'، 'ب')،  
 ('ل'، 'ب') اور ('ل'، 'ب') ہیں۔ نیز 'ل'، 'م'، 'ل'، 'م'، 'ل'، 'م'، 'ل'، 'م'،  
 ('ل'، 'ب')، ('ل'، 'ب')، ('ل'، 'ب') ہیں۔

جب کسی نقطہ کے محدودوں کو معلوم سمجھا جاتا ہے تو انہیں بالعموم حروف تہجی  
 کے ابتدائی حروف سے تعبیر کیا جاتا ہے مثلاً ('ل'، 'ب')، ('ج'، 'د') وغیرہ لیکن  
 جب ایک سے زیادہ نقطے ہوں تو ترتیم ('ل'، 'م')، ('ل'، 'م') وغیرہ یا ('ل'، 'م')،  
 ('ل'، 'م') وغیرہ بالعموم استعمال کی جاتی ہے۔

۳۔ اس کو بڑی احتیاط سے ذہن نشین رکھنا چاہیے کہ کسی خط کا  
 مثبت یا منفی ہونا اس سمت پر منحصر ہے جس میں وہ کھینچا گیا ہے اور وہ  
 مبدا کے محل پر منحصر نہیں ہے مثلاً دفعہ اکہ شکل میں خط 'ل' و منفی ہے  
 کیونکہ سمت 'ل' تا 'ا' اس سمت کے مخالف ہے جو و تا 'ا' ہے۔

اگر کوئی دو نقطے 'ک'، 'ل' لیے جائیں اور خط 'ک' 'ل' میں ایک  
 نقطہ و لے کر فاصلوں 'ک'، 'ل' کو علی الترتیب 'ا' اور 'ب' سے تعبیر کیا جائے  
 تو فاصلہ 'ک' 'ل' کو 'ک' + 'و' + 'ل' یا - 'ک' + 'و' + 'ل' ہونا چاہیے یعنی  
 - 'ا' + 'ب' اور یہ درست ہوگا خواہ نقطہ و خط 'ک' 'ل' پر کہیں واقع ہو۔

اگر 'ا' = -۱، 'ب' = ۳، تو

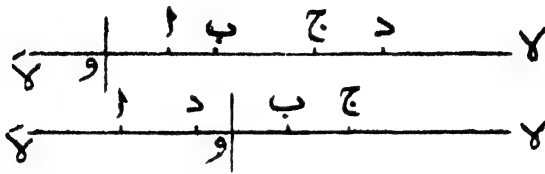
'ا' + 'ب' = -۱ + ۳ = ۲، 'ب' - 'ا' = ۳ - (-۱) = ۴،

اگر 'ا' = ۳، 'ب' = -۲، تو 'ا' + 'ب' = ۳ - ۲ = ۱، 'ب' - 'ا' = -۲ - ۳ = -۵،

طالب علم اس کو ایک شکل کی مدد سے واضح کرے۔

مثال ۱۔ اگر ایک خط مستقیم میں کوئی چار نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہوں تو  
 'ا' + 'ب' + 'ج' + 'د' + 'ب' + 'ج' + 'ا' = 'ا' + 'ج' + 'ب' + 'د'

اُس خطِ مستقیم کو جس پر یہ نقطے واقع ہیں لاکا محور فرض کرو اور اس پر کسی نقطہ کو مبداء قرار دو۔ اب اگر  $ا = لا$ ،  $ب = لا$ ،  $ج = لا$  اور  $د = لا$  تو



$$اب = ا + د + ب = - + ا + د + ب = - لا + لا$$

$$ج د = ج + و + د = - + ج + د = - لا + لا$$

$$نیز ج ب = ج + ب = لا + لا = ا د$$

$$ا ج = - لا + لا = ب د$$

اس لیے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ  $لا$ ،  $لا$ ،  $لا$  کی تمام قیمتوں کے لیے

$$(- لا + لا) + (- لا + لا) = (- لا + لا) = (- لا + لا) (- لا + لا)$$

درست ہے۔ خطوط وحدانی دور کرنے سے یہ واضح ہے۔

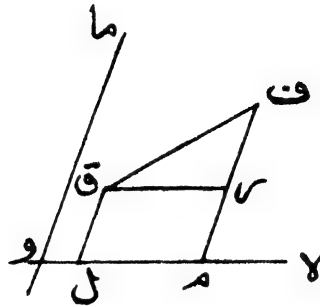
مثال ۲۔ ایک خطِ مستقیم پر کوئی تین نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج' ہیں اور ف کوئی اور نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ف ا \times ج + ف ب \times ج + ا ج \times ب + ا ب \times ج = ۰$$

۴۔ دو نقطوں کے درمیانی فاصلہ کو ان کے محدودوں کی رقوم میں بیان کرنا۔ (۴)



فرض کرو کہ ف، نقطہ (لَا، مَآ) اور ق، نقطہ (لَا، مَآ) ہے اور فرض کرو کہ محاورہ زاویہ سے پر مائل ہیں۔



ف م اور ق ل کو دما کے متوازی اور ق س کو دلا کے متوازی کھینچو حسب شکل۔

تب ول = لا، لی ق = مآ، و م = لا، م ف = مآ علم مثلث سے

$$ف ق = ق س + س ف - ۲ ق س \times س ف \times س ف \text{ جم ق س ف}$$

لیکن ق س = ل م = و م - ول = لا - لا

$$س ف = م ف - م س = م ف - ل ق = مآ - مآ$$

اور زاویہ ق س ف = زاویہ و م ف =  $\pi$  - زاویہ لا و ما =  $\pi$  - اس لیے ف ق = (لا - لا) + (مآ - مآ) + ۲ (لا - لا) (مآ - مآ) جم سے

$$ف ق = \pm \sqrt{(لا - لا)^2 + (مآ - مآ)^2 + ۲ (لا - لا) (مآ - مآ) \text{ جم سے}}$$

اگر محاورہ علی القوائم ہوں تو

$$ف ق = \pm \sqrt{(لا - لا)^2 + (مآ - مآ)^2}$$

ہم مبدا سے ف کے فاصلہ کو راست معلوم کر سکتے ہیں یا اس کو اوپر کے ضابطہ میں لا، ما، رکھنے سے معلوم کیا جاسکتا ہے چنانچہ

$$\text{وف} = \pm \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{نم}^2}$$

یا محاور قائم ہوں تو

$$\text{وف} = \pm \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

(۵) سوائے ان خطوط مستقیم کے جو محوروں کے متوازی ہوں دیگر خطوط کی سمت کے متعلق کوئی قرارداد اختیار نہیں کی گئی ہے کہ کونسی سمت کو مثبت سمجھا جائے۔ اس لیے ہم ف ق یا ق ف میں سے کسی ایک کو مثبت فرض کر سکتے ہیں۔ لیکن اگر ایک ہی خط مستقیم میں تین یا زیادہ نقطے ف، ق، سر، ہوں تو ایک ہی سمت کو مثبت سمجھنا چاہیے تاکہ تمام صورتوں میں

$$\text{ف ق} + \text{ق سر} = \text{ف سر}$$

حسب ذیل مثالوں میں محاور قائم ہیں:-

مثال ۱- ایک شکل میں نقطہ لا = ۱، ما = ۲ اور نقطہ لا = ۳، ما = ۱ کو مرسم کرو اور ثابت کرو کہ ان کے درمیان فاصلہ ۵ ہے۔

مثال ۲- ان خطوں کے طول معلوم کرو جو نقطوں کے حسب ذیل جوڑوں کو ملاتے ہیں:

$$(۱) (۱-۱) \text{ اور } (۱-۱) (۲) (۲-۱) \text{ اور } (۲-۱) (۱-۱) \text{ اور } (۱-۱) (۱-۱)$$

$$(۳) (۳-۳) \text{ اور } (۳-۳) (۱-۱)$$

مثال ۳- ثابت کرو کہ تین نقطے (۱، ۱)، (۱، -۱) اور (-۱، -۱) ایک متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

مثال ۴- ثابت کرو کہ چار نقطے (۱، ۰)، (۰، ۳)، (۳، ۰) اور (۰، ۳) ایک مستطیل کے راس ہیں۔

مثال ۵۔ ایک ہی شکل میں نقطوں  $(1, -1)$ ،  $(1, 4)$ ،  $(3, 0)$  اور  $(-2, 1)$  کو مرتب کر دیا اور ثابت کرو کہ وہ ایک مربع کے راس ہیں۔  
یہی بات نقطوں  $(1, 2)$ ،  $(3, 4)$ ،  $(5, 2)$  اور  $(3, 0)$  کی صورت میں بھی ثابت کرو۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ چار نقطے  $(1, 2)$ ،  $(5, 2)$ ،  $(3, 4)$  اور  $(1, 4)$  ایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

مثال ۷۔ اگر نقطہ  $(1, 4)$  دو نقطوں  $(3, 3)$  اور  $(2, 1)$  سے مساوی فاصلے پر ہو تو ثابت کرو کہ  $13 = 5$

$$[ \text{کیونکہ } (1-3)^2 + (4-3)^2 = (1-2)^2 + (4-1)^2 ]$$

اور اس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔]

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ نقطہ  $(4, 10)$  تین نقطوں  $(-1, 9)$ ،  $(3, 5)$  اور  $(8, 3)$  سے مساوی فاصلے پر ہے۔

مثال ۹۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو نقطوں  $(0, 0)$ ،  $(3, 10)$  اور  $(4, 0)$  سے مساوی فاصلے پر ہو۔  
جواب:  $(1, 2)$

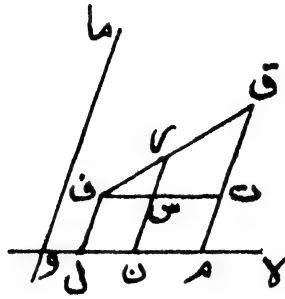
مثال ۱۰۔ اس مثلث کے اضلاع کے طول معلوم کرو جس کے راس  $(1, 0)$ ،  $(13, 4)$  اور  $(4, 8)$  ہیں۔

ثابت کرو کہ نقطہ  $(4, 6)$  ہر راس سے فاصلہ ۶.۵ پر ہے۔

جواب: اضلاع ۱۳، ۱۲، ۵ ہیں۔

۵۔ اس نقطہ کے محدود معلوم کرنا جو دو دیے ہوئے  
نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کی تقسیم ایک معلومہ نسبت میں  
کرے۔

فرض کرو کہ  $F$  کے محدود  $LA$ ،  $B$  اور  $C$  کے محدود  $LA$ ،  $B$  ہیں اور فرض کرو کہ  $S$  (لا  $LA$ ) وہ نقطہ ہے جو  $F$  کی نسبت  $C$ ،  $B$  میں تقسیم کرتا ہے۔



فال، سر ن، ق م کو محور ما کے متوازی اور ف س ت کو محور لا کے متوازی کھینچو حسب شکل۔

تب ل ن : ن م = ف س : س ت = ف س : س ر ق = کم : کم  
 ∴ کم × ل ن - کم × ن م =

یا کم (لا - لا) - کم (لا - لا) =

$$\frac{\text{کم لا} + \text{کم لا}}{\text{کم} + \text{کم}} = \text{لا} \quad \therefore$$

$$\frac{\text{کم با} + \text{کم با}}{\text{کم} + \text{کم}} = \text{ما} \quad \text{اسی طرح}$$

سب سے زیادہ مفید صورت وہ ہے جب کہ خط ف ق کی تنصیف کی گئی ہو چنانچہ نقطہ تنصیف کے محمد

$$\frac{1}{4}(\text{لا} + \text{لا}) \quad \frac{1}{4}(\text{با} + \text{با})$$

ہیں۔

اگر خط نسبت ک : - ک میں خارجاً منقطع ہو تو

ل : ن : ن مر = ک : ( - ک )

اور اس لیے  $\frac{ک - ل}{ک - ک} = ل$  ،  $\frac{ک - ل}{ک - ک} = ل$  ،  $\frac{ک - ل}{ک - ک} = ل$

(۷) مندرجہ بالا نتیجے درست رہتے ہیں خواہ محذدوں کے محذوں کے (۷) درمیان کوئی زاویہ ہو۔ لیکن بہت سی صورتوں میں ضابطے ذرا پیچیدہ ہو جاتے ہیں جب کہ محاور علی القوائم نہ ہوں۔

ہم آئندہ محذوں کو تمام صورتوں میں علی القوائم سمجھینگے  
إلا آنکہ اس کے خلاف بیان کیا گیا ہو۔

مثال ۱۔ اس خط کا وسطی نقطہ معلوم کرو جو نقطوں (۱، ۳) (۵، -۷) کو ملاتا ہے۔

مثال ۲۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو نقطوں (۳، ۲) اور (۵، -۳) کو ملانے والے خط کی تقسیم نسبت ۲ : ۱ میں کرتا ہے۔

$$۱ = \frac{۱ \times (۳ - ۵) + ۲ \times ۳}{۲ + ۱} = ۱ ، ۳ = \frac{۱ \times ۵ + ۲ \times ۲}{۲ + ۱} = ۱$$

مثال ۳۔ نقاط ا، ب، ج علی الترتیب (ل، ل) (ل، ل) اور (ل، ل) ہیں۔ ج، ج، ج ۱، ۱ ب کے نقاط وسطی علی الترتیب د، ع، ف میں۔ نقطہ گ کے محذ معلوم کرو جو د کو اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ ۲ د گ = گ ۱ د کے محذ

$$۱ = \frac{۱ \times (ل + ل) + ۲ \times (ل + ل)}{۲ + ۱} = ۱$$

ہیں اور اس لیے گ کے محذ

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 1 + 2 \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{2+1} = 1$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 1 + 2 \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{2+1} = 1$$

ہیں۔

اس نتیجہ کے تشاکل سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ گ، خطوط ع، ب اور ج پر بھی واقع ہے اور نیز یہ کہ ۲ ع گ = گ ب اور ۲ ف گ = گ ج کسی مثلث کے خطوط وسطی کے نقطہ تقاطع کو مثلث کا مرکز ہندسی کہتے ہیں اور ہم اوپر کی مثال سے یہ دیکھتے ہیں کہ اگر ایک مثلث کے راس (۱، ۱)، (۱، ۲)، (۲، ۱) ہوں تو اس کے مرکز ہندسی کے محد  $\frac{1}{3} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$  ہیں۔

مثال ۴۔ اس مثلث کا مرکز ہندسی معلوم کرو جس کے راس علی الترتیب (۲، ۲)، (۲، ۱) اور (۱، ۲) ہیں۔ جواب: (۳، ۰)

مثال ۵۔ اس مثلث کا مرکز ہندسی معلوم کرو جس کے راس علی الترتیب (۳، ۳)، (۳، ۱) اور (۱، ۳) ہیں۔ جواب: (۱، ۲)

مثال ۶۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو (۳، ۵) اور (۵، ۳) کو ملانے والے خط کی تقسیم نسبت ۵:۳ میں کرتا ہے۔ جواب  $(\frac{14}{8}, \frac{15}{8})$

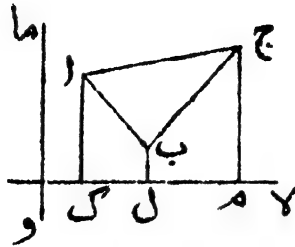
مثال ۷۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو (۱، ۲) اور (۲، ۳) کو ملانے والے خط کی تقسیم خارجی طور پر نسبت ۲:۳ میں کرتا ہے۔ جواب: (۰، ۰)

۶۔ مثلث کے رقبہ کو اس کے راسوں کے محدودوں کی رقوم میں بیان کرنا۔

(۸)

فرض کرو کہ راسوں ۱، ب، ج کے محد علی الترتیب (۱، ۱)،

(لا، با) (لا، با) (لا، با) ہیں۔



خطوط اک، ب، ل، اور ج ہر کو محور ما کے متوازی کھینچو حسب شکل  
 ۵ اب ج = مرج اک - ک اب ل - ل ب ج م  
 اب مرج اک = ۵ مرج ا + ۵ اک م

$$= \frac{1}{4} \text{ک م} \times \text{مرج} + \frac{1}{4} \text{ک م} \times \text{ک}$$

$$= \frac{1}{4} (\text{لا} - \text{با}) (\text{لا} + \text{با})$$

$$\text{اسی طرح ک اب ل} = \frac{1}{4} (\text{لا} - \text{با}) (\text{لا} + \text{با})$$

$$\text{اور ل ب ج م} = \frac{1}{4} (\text{لا} - \text{با}) (\text{لا} + \text{با})$$

$$\therefore ۵ اب ج = \frac{1}{4} \{ (\text{لا} + \text{با}) (\text{لا} - \text{با}) + (\text{لا} + \text{با}) (\text{لا} - \text{با}) + (\text{لا} + \text{با}) (\text{لا} - \text{با}) \}$$

یا ان رقموں کو ترک کرنے سے جو ایک دوسرے کو خارج کرتی ہیں

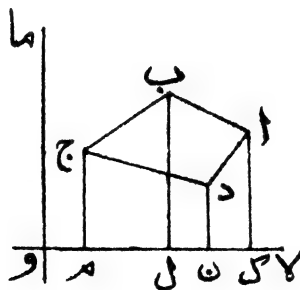
$$۵ اب ج = \frac{1}{4} \{ \text{لا} - \text{با} - \text{لا} + \text{با} + \text{لا} - \text{با} - \text{لا} + \text{با} + \text{لا} - \text{با} - \text{لا} + \text{با} \}$$

$$\frac{1}{4} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

مثلث کے رقبہ کا یہ جملہ مثبت ہوگا اگر اس ایسی ترتیب میں ہوں کہ مثلث کے گرد چلنے میں رقبہ ہمیشہ بائیں جانب رہے یا اگر گھیرے ا ب ج ا کو طے کرنے کی ترتیب خلاف سمت ساعت ہو۔ جب کبھی راسوں کے محدودوں کے اندراج سے رقبہ کے لیے منفی جملہ حاصل ہو تو مثلث کے گرد چلنے کی ترتیب کو الٹ دیا جائے۔

۹۔ ذواربۃ الاضلاع کے رقبے کو اس کے راسوں کے محدودوں کی رقوم میں بیان کرنا جبکہ راس ترتیب وار دیے گئے ہوں۔

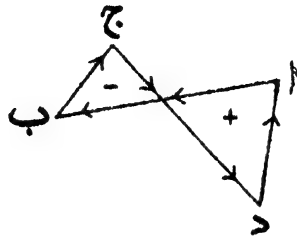
فرض کرو کہ راس ترتیب وار ا، ب، ج، د ہیں اور ان کے محدود علی الترتیب (ل، ل، ل، ل)، (ل، ل، ل، ل)، اور (ل، ل، ل، ل) ہیں۔



اک، ب، ل، ج مراد ن کو محور ا کے متوازی کھینچو حسب شکل۔







مثال ۱۔ اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس  $(۱، ۲)$ ،  $(۳، ۴)$  اور  $(۵، ۲)$  ہیں۔ نیز اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس  $(۵، ۴)$ ،  $(۵، ۵)$  اور  $(۱، ۳)$  ہیں۔  
جواب:  $۴، \frac{۵}{۲}$

مثال ۲۔ اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس 'ا'، 'ب'، 'ج' علی الترتیب  $(۳، ۲)$ ،  $(۵، ۴)$  اور  $(۲، ۶)$  ہیں۔ جواب: ۵۔  
[منفی علامت اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' گردش کی اُس ترتیب میں ہے جو موافق سمت ساعت ہے اور یہ نقطوں کو مرتب کرنے سے معلوم ہو سکتا ہے۔ اکثر صورتوں میں رقبہ کی صرف مطلق قیمت مطلوب ہوگی]  
مثال ۳۔ 'ا'، 'ب'، 'ج' علی الترتیب نقطے  $(۵، ۱)$ ،  $(۱، ۳)$ ،  $(۴، ۵)$  ہیں اور 'ب'، 'ج'، 'ا' کے نقاط وسطی 'د'، 'ع'، 'ف' ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$۵ \text{ ا ب ج } = ۵۴ \text{ د ع ف}$$

مثال ۴۔ اُس ذواربۃ الاضلاع کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس ترتیب وار  $(۲، ۱)$ ،  $(۲، ۶)$ ،  $(۳، ۵)$  اور  $(۴، ۳)$  ہیں۔  
نیز اُس ذواربۃ الاضلاع کا رقبہ جس کے راس  $(۲، ۲)$ ،  $(۲، ۳)$ ،  $(۳، ۲)$  اور  $(۳، ۳)$  ہیں۔  
جواب:  $\frac{۱۱}{۲}$ ، ۲۰۔

مثال ۵۔ اُس ذواربۃ الاضلاع کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس 'ا'، 'ب'، 'ج' ترتیب وار  $(۲، ۴)$ ،  $(۵، ۳)$ ،  $(۴، ۱)$  اور  $(۲، ۶)$  ہیں۔  
جواب: صفر

نقطوں کو قسم کرو اور نتیجہ کو ظاہر کرنے کے لیے اب ج د ا کھینچو۔  
رقبہ معلوم کرو جب کہ نقطوں کو ترتیب 'ا'، 'ب'، 'ج' میں لیا گیا ہو۔

جواب: ۵۶

مثال ۶۔ نقطہ 'ا'، 'ب'، 'ج' د علی الترتیب (۴، ۲)، (۲، ۳)، (۴، ۸)

اور (۶، ۴) ہیں۔ اب ج د کا رقبہ معلوم کرو۔ نیز نقطوں کو ترتیب 'ا'، 'ب'، 'ج' میں اور ترتیب 'ا'، 'ب'، 'ج' میں لے کر ثابت کرو کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' د کے متوازی ہے اور 'ب'، 'ج' د کے۔

جواب: ۱۲

۸۔ اگر ایک منحنی کی تعریف ایک ایسی جہت سی خاصیت کی بنا پر کی گئی ہو جو اس کے تمام نقطوں میں مشترک ہو تو کوئی نہ کوئی جبری رشتہ موجود ہو گا (۱۱) جو منحنی کے تمام نقطوں کے محدودوں سے پورا ہو گا اور ان نقطوں کے علاوہ دیگر نقطوں سے پورا نہیں ہو گا۔ اس جبری رشتہ کو منحنی کی مساوات کہتے ہیں۔

اس کے برعکس وہ تمام نقطے جو ایک معلوم جبری مساوات کو پورا کرتے ہیں ایک منحنی پر واقع ہوتے ہیں جس کو اس مساوات کا طریق کہتے ہیں۔ مثلاً اگر ایک خط مستقیم کو محور و صا کے متوازی اس سے فاصلہ  $\lambda$  پر کھینچا جائے تو اس خط پر کے نقطوں کے فصلے سب کے سب مستقل مقدار  $\lambda$  کے مساوی ہونگے اور کسی اور نقطہ کا فاصلہ  $\lambda$  کے مساوی نہیں ہو گا۔

پس  $\lambda = 0$  اس خط کی مساوات ہوگی۔

اس کے برعکس وہ خط جو محور  $\lambda$  کے متوازی اس سے فاصلہ  $\lambda$  پر کھینچا گیا ہو مساوات  $\lambda = 0$  کا طریق ہے۔

نیز اگر ایک دائرہ پر کے کسی نقطہ ف کے محدود  $\lambda$ ،  $\mu$  ہوں اور اس کا مرکز مبدا و پر ہو اور اس کا نصف قطر ج ہو تو فاصلہ و ف کا مربع  $\lambda^2 + \mu^2$  ہو گا [دفعہ ۴]۔ لیکن و ف دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے۔ اس لیے دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدود  $\lambda$ ،  $\mu$  رشتہ  $\lambda^2 + \mu^2 = ج^2$  کو پورا کرتے ہیں یعنی دائرہ کی مساوات  $\lambda^2 + \mu^2 = ج^2$  ہے۔

اس کے برعکس مساوات  $لا + ما = ج$  کا طریق ایک دواغذہ ہے جس کا مرکز  
مبدأ ہے اور جس کا نصف قطر ج کے مساوی ہے۔

اُس منحنی کا تقریبی خاکہ جس کو ایک جبری مساوات سے تعبیر کیا گیا ہو اس طرح  
کھینچا جاسکتا ہے کہ لایا لاکہ قیمتوں کا ایک سلسلہ دیا جائے اور اس کے جواب میں  
مایا لاکہ قیمتیں محسوس کی جائیں اور پھر مربع دار کا غذ پر نقطوں کا وہ سلسلہ مرتب کیا جائے  
جن کے محد اس طریقہ پر حاصل ہوئے ہوں جو در مقابلہ میں بہت بخدا وقت ایسی  
غیر دلچسپ مشق پر صرف کیا جاتا ہے حالانکہ یہ کچھ زیادہ مفید بھی نہیں۔

علم ہندسہ تحلیلی میں وہ مساوات معلوم کی جاتی ہے جو ان تمام نقطوں  
کے محدودوں سے پوری ہوتی ہے جو ایک منحنی پر واقع ہوں جس کی تعریف  
کسی ہندسی خاصیت کی بناء پر کی گئی ہو۔ نیز منحنی کا محل اور اس کے خواص  
اُس مساوات سے اخذ کیے جاتے ہیں جو منحنی پر کے تمام نقطوں کے محدودوں  
سے پوری ہوتی ہے۔

ایک مساوات کو  $n$  ویں درجہ کی مساوات کہتے ہیں جب اس کو اس  
طرح تبدیل کرنے کے بعد کہ متغیروں کے قوت نما چھوٹے سے چھوٹے ممکن  
صحیح اعداد ہوں اُس میں بڑے سے بڑے اعداد کی رقم (یا ارقام) ان اعداد کی ہو  
(۱۲) مثلاً مساواتیں  $لا + ما + ب + لا + ج = ۰$ ،  $لا + لا + ما + و + ب = ۰$ ،  $لا + لا + لا + ما + و = ۰$   
(جس کو منطقی بنانے پر  $لا + ما + لا + لا + لا + و + ب = ۰$  ہو جاتی ہے) سب کی سب  
دوسرے درجہ کی ہیں۔

مثال ۱۔ ایک نقطہ اسی طرح حرکت کرتا ہے کہ دو نقطوں (۳، ۴) اور  
(۵، ۲) سے اس کے فاصلے مساوی رہتے ہیں۔ اس کے طریق کی مساوات  
معلوم کرو۔  
جواب:  $لا - ما = ۱$

مثال ۲۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں (۰، ۱) اور  
(۱، ۰) سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل (۲ ج ۲) رہتا ہے۔  
اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔  
جواب:  $لا + ما = ج - و$

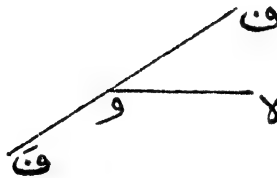


(۱۳)

۹۔ دفعات ۱ اور ۲ میں جو محدود استعمال ہوتے ہیں ان کو کارٹیزی محدود کہتے ہیں کیونکہ ان کو سب سے پہلے ڈیکارٹ نے استعمال کیا تھا۔ لیکن ایک مستوی پر کسی نقطہ کے محل کو دوسرے طریقوں سے بھی متعین کیا جاسکتا ہے۔ ان میں سے ایک مفید طریقہ حسب ذیل ہے:

## قطبی محدود

اگر ایک نقطہ کو مبداء لیا جائے اور اس میں سے ایک ثابت خط مستقیم نکالا کھینچا جائے تو کسی نقطہ ف کا محل معلوم ہوگا اگر زاویہ لا وف اور فاصلہ وف معلوم ہوں۔



ان کو نقطہ ف کے قطبی محدود کہا جاتا ہے۔

طول وف کو سمتی نصف قطر کہتے ہیں اور اسے بالعموم ر سے تعبیر کرتے ہیں۔ زاویہ لا وف کو سمتی زاویہ کہتے ہیں اور اسے طہ سے تعبیر کرتے ہیں۔

اس زاویہ کو مثبت سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمائش ولا سے اُس سمت کے خلاف کی گئی ہو جس میں کھری کی ٹوئیاں گردش کرتی ہیں۔

سمتی نصف قطر کو مثبت سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمائش و سے

اُس خط پر کی گئی ہو جو سمتی زاویہ کی تحدید کرتا ہے اور منفی سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمائش مخالف سمت میں کی گئی ہو۔  
 گُرف و کو ف تک خارج کیا جائے اور و ف مقدار میں و ف کے مساوی ہو اور اگر ف کے محدود ر، ط ہوں تو ف کے محدود ر، ط یا ر، ط +  $\pi$  ہونگے۔

۱۰۔ دو نقطوں کا جن کے قطبی محدود دیے گئے ہوں درمیانی فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دو نقطوں ف، ق کے محدود ر، ط اور ر، ط ہیں۔ تب علم مثلث سے

$$ف ق = و ف + و ق - ۲ و ف \times و ق \text{ جم ف و ق}$$

لیکن و ف = ر، و ق = ر، اور زاویہ ف و ق = زاویہ لا و ق

۔ زاویہ لا و ف = ط - ط

$$\therefore ف ق = ر + ر - ۲ ر \text{ جم (ط - ط)}$$

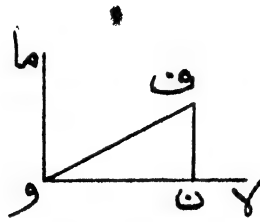
ایک دائرہ کی قطبی مساوات جب کہ دائرہ کا مرکز نقطہ (ر، ط) پر ہو اور اس کا نصف قطر ج ہو ج = ر + ر - ۲ ر جم (ط - ط) ہے جہاں دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدود ر، ط ہیں۔

۱۱۔ قائم محدودوں کو قطبی محدودوں میں تبدیل کرنا۔

اگر وہیں سے ایک خط و ما، لا پر عمود کھینچا جائے اور و لا، و ما کو قائم محاور سمجھا جائے تو

$$لا = و ن = و ف \text{ جم لا و ف} = ر \text{ جم ط}$$

$$\text{اور } ما = ن ف = و ف \text{ جب لا و ف} = ر \text{ جب ط}$$



مثال ۱ — اُن نقطوں کے قائم معد دیکھا ہیں جن کے قطبی معد علی الترتیب  $(\frac{\pi}{3}, 1)$ ،  $(\frac{\pi}{3}, 2)$  اور  $(\frac{\pi}{3}, -4)$  ہیں۔

جواب:  $(1, 0)$ ،  $(1, 1)$ ،  $(-2, 2)$ ،  $(-2, 2)$

مثال ۲ — اُن نقطوں کے قطبی معد دیکھا ہیں جن کے قائم معد علی الترتیب  $(1, -1)$ ،  $(1, -3)$  اور  $(2, -4)$  ہیں۔

جواب:  $(\frac{\pi}{3}, 2)$ ،  $(\frac{\pi}{3}, 5)$ ،  $(\frac{\pi}{3}, 1)$

مثال ۳ — اُن نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرو جن کے قطبی معد

جواب:  $\frac{1}{2}$

$(2, 0)$  اور  $(4, 0)$  ہیں۔

مثال ۴ — اُن نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرو جن کے قطبی معد

جواب:  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{2}$

$(2, 0)$  اور  $(4, 0)$  ہیں۔

مثال ۵ — اس نقطہ کا طریق معلوم کرو جو نقطہ  $(\frac{\pi}{3}, 5)$  سے فاصلہ ۳ پر

جواب:  $2 - 10$ ،  $10 + 2$

رہے۔

مثال ۶ — ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کا فاصلہ نقطہ  $(\frac{\pi}{3}, 3)$  سے

جواب:  $2 - 6$ ،  $6 + 2$

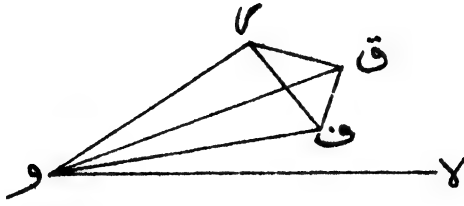
۲ ہے۔

۱۲ — ایک مثلث کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کے

راسوں کے قطبی معد دیے گئے ہوں۔

(۱۵)





فرض کرو کہ 'ق'، 'س' کے محذول علی الترتیب (ر، طم) (ر، طم) (ر، طم) ہیں۔  
تب مثلث 'ق'، 'ف'، 'س' کا رقبہ = ۵ وق + ۵ وق + ۵ وق = ۵ وق

اور ۵ وق = ۱/۴ وق جب ف وق

$$= \frac{1}{4} ر، ر جب (طم - طم)$$

اسی طرح ۵ وق = ۱/۴ ر، ر جب (طم - طم)

اور ۵ وق = ۱/۴ ر، ر جب (طم - طم) = ۱/۴ ر، ر جب (طم - طم)

$$\therefore ۵ وق = \frac{1}{4} ر، ر جب (طم - طم) + \frac{1}{4} ر، ر جب (طم - طم) + \frac{1}{4} ر، ر جب (طم - طم)$$

اگر مثلث 'ق'، 'ف' کے رقبہ کو مثبت خیال کیا جائے جب کہ گھیرا 'ق'، 'و' خلاف سمت ساعت طے ہو اور منفی جبکہ موافق سمت ساعت طے ہو اور اسی طرح دوسرے مثلثوں کے متعلق سمجھا جائے تو یہ معلوم ہو گا کہ تمام صورتوں میں

$$۵ وق = ۵ وق + ۵ وق + ۵ وق$$

نیز ذرا بچہ الاضلاع 'ق'، 'س' کے لیے تمام صورتوں میں

$$رقبہ ق، س = ۵ وق + ۵ وق + ۵ وق + ۵ وق$$

$$= \frac{1}{4} ر، ر جب (طم - طم) + \frac{1}{4} ر، ر جب (طم - طم)$$

$$+ \frac{1}{4} \text{ ر } \text{ ر } \text{ جب (طہ - طہ) } + \frac{1}{4} \text{ ر } \text{ ر } \text{ جب (طہ - طہ)}$$

$$\text{اب } \text{ ر } \text{ ر } \text{ جب (طہ - طہ)}$$

$$= \text{ ر } \text{ ر } \text{ (جب طہ جم طہ - جب طہ جم طہ)}$$

$$= \text{ لا } \text{ لا } - \text{ لا } \text{ لا } ، \text{ دفعہ ۱۱ سے}$$

پس حسب دفعہ ۷

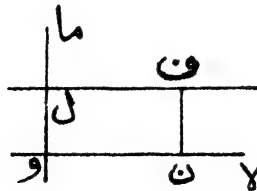
$$\text{رقبہ فقی سراس } = \frac{1}{4} \{ (\text{لا } \text{ لا} - \text{لا } \text{لا}) + (\text{لا } \text{لا} - \text{لا } \text{لا}) + (\text{لا } \text{لا} - \text{لا } \text{لا}) \} +$$



# دوسرا باب

## خطِ مستقیم

۱۳۔ ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو محدودوں کے  
محوروں میں سے ایک کے متوازی ہو۔  
فرض کرو کہ لی ف ایک خطِ مستقیم ہے جو محور لا کے متوازی ہے اور  
محور سے نقطہ لی پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ ول = ب۔



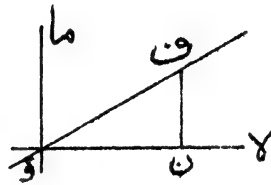
فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدود (لا، ما) ہیں۔  
اب میں ن ف = ول

پس  $ما = ب$  خط کی مساوات ہے۔  
اس طرح  $لا = و$  اس خط کی مساوات ہے جو محور  $ما$  کے متوازی ہے اور  
اس سے فاصلہ  $و$  پر ہے۔

۱۴۔ ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو مبدا

میں سے گزرے۔

فرض کرو کہ مبدا میں سے گزرنے والا ایک خط مستقیم  $و ف$  ہے اور  
فرض کرو کہ زاویہ  $لا و ف$  کا  $ما = م$

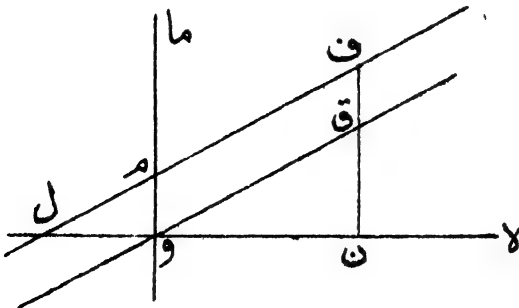


فرض کرو کہ خط  $پ ر$  کے کسی نقطہ  $ف$  کے محدود  $لا$ ،  $ما$  ہیں۔

اب  $ن ف = م ن و ف \times و ن$

پس  $ما = م لا$  مطلوبہ مساوات ہے۔

۱۵۔ کسی خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ ل حرف ایک خط مستقیم ہے جو محوروں سے نقاط ملی اور مر پر ملتا ہے۔

فرض کرو  $و = ج$  اور  $م = ل$  م  
فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدود لا، ما ہیں۔  
ف ن کو محور ما کے متوازی اور وق کو خط ل حرف کے متوازی  
کھینچو حسب شکل۔

اب  $ن = ف = ن ق + ق ف$

$= و ن م س ن وق + و م$

لیکن  $ن ف = ما، و ن = لا، و م = ج$  اور  $م س ن وق = م س ول م$

∴  $ما = م لا + ج$  . . . . . (۱)

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

جب کوئی مخصوص خط مستقیم زیر بحث ہوتا ہے تو مقدار م اور ج مستقل رہتی ہیں اور اس لیے ان کو مستقل کہتے ہیں۔ ان میں سے م اُس زاویہ کا قیاس ہے جو محور لا کی مثبت سمت اور خط کے اُس حصہ کے درمیان ہوتا ہے جو محور لا کے اوپر ہے اور ج محور ما پر کا مقلوعہ ہے۔

مستقلات م اور ج کو مناسب قیمتیں دے کر مساوات  $ما = م لا + ج$  سے کسی خط مستقیم کو تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً وہ خط مستقیم جو محور ما کو مبدا سے اکائی فاصلہ پر قطع کرتا ہے اور محور لا سے  $م$  کا زاویہ بناتا ہے مساوات  $ما = م لا + ج$  سے تعبیر ہوگا۔

ہم (۱) سے دیکھتے ہیں کہ کسی خط مستقیم کی مساوات پہلے درجہ کی ہوتی ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ پہلے درجہ کی ہر مساوات ایک

خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔  
پہلے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔ اب یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ مساوات ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے یہ دکھانا کافی ہے کہ اگر طریق پر کے کسی تین نقطوں کو اُلا یا جائے تو اس طریقہ پر بنے ہوئے مثلث کا رقبہ صفر ہوگا۔

فرض کرو کہ طریق پر کوئی تین نقطے ف، ق، س ہیں اور ان کے محدود علی الترتیب (لا، ما)، (لا، نا)، اور (لا، نا) ہیں۔ پس نقطوں کے محدودوں کو مساوات (۱) پوری کرنی چاہیے، اس لیے

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

اب ۱، ب، ج کو ساکت کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۰ = \begin{vmatrix} ۱ & لا & ما \\ ۱ & لا & نا \\ ۱ & لا & نا \end{vmatrix}$$

اس لیے مثلث کا رقبہ صفر ہے (صفحہ ۶) اور اس لیے طریق پر کے کوئی تین نقطے ایک خط مستقیم پر ہونے چاہئیں۔

اس لیے مساوات ۱ + لا + ب + ما + ج = ۰ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

دوسرا ثبوت: اوپر کی مساواتوں سے بذریعہ عمل تفریق حاصل ہوتا ہے

$$۱ + (لا - لا) + ب + (ما - ما) = ۰$$

$$۱ + (لا - لا) + ب + (ما - ما) = ۰$$

$$\frac{لا - لا}{ما - ما} = \frac{لا - لا}{ما - ما}$$

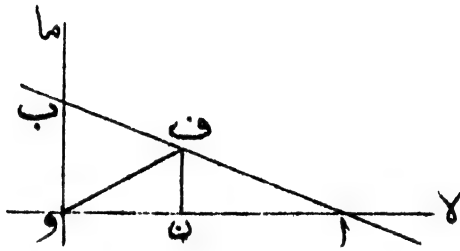
(۱۹)



گزرتا ہے۔

(۲۰) ۱۶۔ ایک خط مستقیم کی مساوات کو ان مقطوعوں کی رقوم میں معلوم کرنا جو وہ محوروں پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ  $l$  اور  $b$  وہ نقطے ہیں جہاں خط مستقیم محوروں کو قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ  $1 = l' + b = b$ ۔  
فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ  $f$  کے محدد  $l, l', m$  ہیں۔



ف  $n$  کو محور  $m$  کے متوازی کھینچو اور  $of$  کو  $l$  کو ملاؤ۔  
 $ab \quad 1 = l' + b = b$   
 $\therefore \quad l + m + b = l + b = 1$

$$1 = \frac{l}{b} + \frac{m}{b}$$

اس مساوات کو شکل

$$l + m + b = 1$$

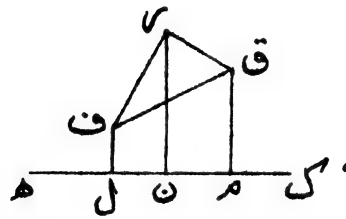
میں لکھا جاسکتا ہے جہاں  $l$  اور  $m$  محوروں پر کے مقطوعوں کے متکافی ہیں۔



# ظِل

۱۸۔ اگر کسی خط مستقیم کے سروں ف اور ق سے کسی دوسرے خط مستقیم ہک پر عمود ف ل اور ق م کیونچے جائیں تو ل م کو ف ق کا ظِل، ہک پر کہتے ہیں۔

فرض کر دو کہ کوئی اور نقطہ س ہے اور ہک پر اس کا ظِل ن ہے تو چونکہ تمام صورتوں میں ل م + م ن = ل ن اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی خط پر ف ق اور ق م کے ظِلوں کا مجموعہ اس خط پر ف م کے مساوی ہوتا ہے۔



اسی طرح کسی خط پر ا ب، ب ج، ج د، .... ف ق کے ظِلوں کا مجموعہ ا ق کے ظِل کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز کسی خط پر ایک بند کثیر الاضلاع کے ضلعوں کے ظِلوں کا مجموعہ صفر کے مساوی ہوتا ہے۔

اگر ن ضلعوں والے منتظم کثیر الاضلاع کا ایک ضلع ایک معلوم خط کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو دوسرے اضلاع ترتیب وار زاویے

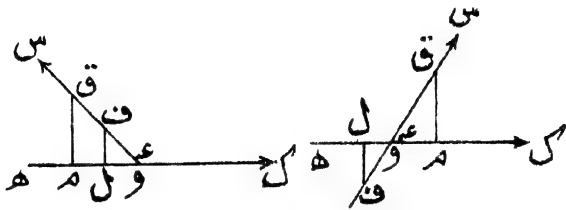
$$\pi + \pi + \pi + \dots + \pi + \pi + \pi + \dots$$

بنائینگے اور ط کی تمام قیمتوں کے لیے حاصل ہوگا۔

$$\text{جم} + ط + \text{جم} \left( ط + \frac{\pi^2}{\text{ق}} \right) + \text{جم} \left( ط + \frac{\pi^2}{\text{ق}} \right) + \dots + \text{ن قون تک} =$$

فرض کرو کہ وہ خط جس پر ف ق واقع ہے ہک کو د پر قلع کرتا ہے اور  
فرض کرو کہ ان دو خطوں کی مثبت سمتوں وک اور وس کے درمیان زاویہ  
ک وس' عہ ہے۔

اب زاویہ کی جیب التمام کی تعریف کی رو سے



$$\text{ول} = \text{وف} \text{ جم عہ} \quad \text{اور} \quad \text{وم} = \text{وق} \text{ جم عہ}$$

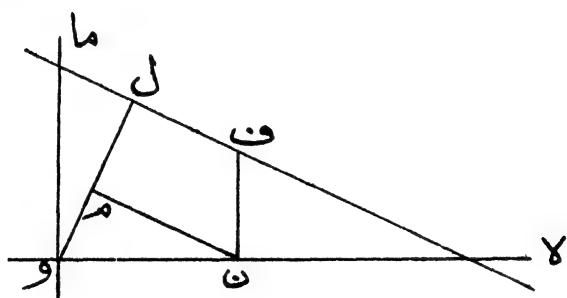
$$\text{ل م} = \text{ف ق} \text{ جم عہ}$$

پس کسی خط ہک پر خط ف ق کا ظل ف ق جم عہ  
ہوتا ہے جہاں عہ وہ زاویہ ہے جو ہک کی مثبت سمت اور  
اُس خط کی مثبت سمت کے درمیان ہے جس پر ف ق  
واقع ہے۔

۱۹۔ ایک خط مستقیم پر مبدا، د سے عمود ول کھینچنا

گیا ہے اور یہ عمود محور لا کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے۔ خط مستقیم کی مسادات کو عمود ول اور زاویہ عہ کی رقوم میں معلوم کرو۔ فرض کرو کہ ول = ع اور زاویہ لا ول = ع۔ فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدود لا، ما ہیں۔

ف ن کو محور ما کے متوازی اور ن مرکو ول پر عمود کھینچو۔



ابن ف، وما کے متوازی ہے اور تمام صورتوں میں  
زاویہ ماول = زاویہ ماول + زاویہ لاول  
= - زاویہ لاول + زاویہ لاول =  $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$   
ول پروں اور ن ف کے نظموں کا مجموعہ ول کے مساوی  
ہے (دفعہ ۱۸)۔

دن کا نفل = ون جم ع  
 ن ف کا نفل = ن ف جم (- ۱۲ + ع)  
 اس لیے ع = ون جم ع + ن ف جم (- ۱۲ + ع)  
 = لاجم ع + ما جب ع

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

۲۰۔ — دفعات ۱۵، ۱۴ اور ۱۹ میں ہم نے خط مستقیم کی مساوات کو مختلف شکلوں میں جن میں مختلف مستقلات شامل ہوتے ہیں غیر تابع طریقوں سے معلوم کیا ہے۔ لیکن اس مساوات کی کسی شکل کو دوسری شکل سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

(۲۳)

مثلاً اگر ہمیں یہ مساوات محوروں پر کے مقطوعوں کی رقوم میں معلوم ہو تو ہم  $E$  اور  $e$  کی رقوم میں اس مساوات کو رشتوں  $1$   $ج = E$  اور  $ب$   $ج = e$  کے ذریعہ معلوم کر سکتے ہیں جہاں یہ رشتے دفعہ ۱۹ کی شکل سے فوراً حاصل ہو جاتے ہیں۔ پس مساوات  $\frac{1}{a} + \frac{b}{a+b} = 1$  میں  $1$  اور  $ب$  کی ان قیمتوں کو درج کرنے سے مساوات  $لاجم\ e + ماجب\ e = ع$  حاصل ہوتی ہے۔

اگر خط مستقیم کی مساوات

$$1 + لا + ب + ما + ج = 0$$

ہو تو اس کو  $\frac{1}{a+b} + \frac{b}{a+b} = ع$  سے تقسیم کرنے پر مساوات

$$0 = \frac{1}{a+b} + \frac{ب}{a+b} + \frac{ج}{a+b}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اب  $\frac{1}{a+b}$  اور  $\frac{ب}{a+b}$  علی الترتیب کسی خاص

زاویہ کی جیب التمام اور جیب ہیں کیونکہ ان کے مربوں کا مجموعہ اکائی کے مساوی ہے۔ اگر ہم اس زاویہ کو  $e$  کہیں تو

$$لاجم\ e + ماجب\ e = ع = 0$$

جہاں  $E$  کو  $\frac{ج}{a+b}$  کی جگہ رکھا گیا ہے۔

مثال ۱۔ اگر ۳ لا - ۴ ما - ۵ = ۰ تو اس ۲ ما + ۲ لا سے تقسیم کرنے پر  
 مساوات  $\frac{3}{5} لا - \frac{4}{5} ما - ۱ = ۰$  حاصل ہوتی ہے۔ اس کی شکل لاجم ع + ماجب ع - ۱ = ۰ ہے  
 جہاں ججم ع =  $\frac{3}{5}$ ، جب ع =  $-\frac{4}{5}$  اور ع = ۱  
 مثال ۲۔ مساوات لا + ما + ۵ = ۰، مساوات

$$لاجم = \frac{3}{5} + ماجب = \frac{5}{5}$$

کے مثل ہے۔

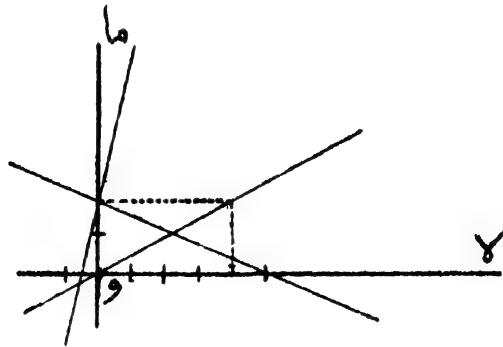
مثال ۳۔ مساوات لا + ۲ ما + ۲۵ = ۰ کو شکل

$$لاجم ع + ماجب ع - ۱ = ۰$$

$$جواب: - \frac{4}{25} لا - \frac{22}{25} ما - ۱ = ۰$$

میں لکھو۔

۲۱۔ جب کسی خط مستقیم کی مساوات دی گئی ہو تو اس کا  
 محل معلوم کرنے کے لیے صرف یہ ضروری ہے کہ اس پر کے کسی دو نقطوں  
 کے محدد معلوم کر لیے جائیں۔ ان محددوں کو معلوم کرنے کے لیے لا کی  
 کوئی دو قیمتیں فرض کرو اور ان کے جواب میں معلومہ مساوات سے ما کی  
 دو قیمتیں معلوم کرو۔ وہ نقطے جہاں خط محوروں کو قطع کرتا ہے بڑی آسانی  
 سے معلوم ہو سکتے ہیں۔



**مثال ۱۔** خطِ مستقیم کی مساوات  $۲ + لا = ۵ = ۱۰$  ہے۔ یہ خطِ مستقیم محور لاکو جہاں قطع کرتا ہے وہاں  $۱۰ = ۵$  اور اس لیے  $لا = ۵$ ۔ محور لاکو جہاں قطع کرتا ہے وہاں  $۱۰ = ۵$  اور اس لیے  $۲ = ۵$ ۔

**مثال ۲۔** خط  $۴ لا - ۱ = ۲ + ۱ = ۲$ ۔ محوروں پر جو مقطوعے قطع کرتا ہے وہ علی الترتیب  $۱$  اور  $۲$  ہیں۔

**مثال ۳۔**  $لا - ۱۲ = ۱۰$  اس صورت میں مبداء خط پر ہے اور جب  $لا = ۱۲$  تو  $۱ = ۱۰$ ۔

یہ سب خطوط شکل میں کھینچے گئے ہیں۔

**۲۲۔** اگر ہم ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا چاہیں جو کسی دو شرطوں کو پورا کرتا ہے تو ہم حسب ذیل عام شکلوں میں سے کوئی ایک شکل اس خط کی مساوات کے لیے فرض کر سکتے ہیں:

$$(۱) \quad لا = م + لا + ج، (۲) \quad \frac{لا}{و} + \frac{ب}{ج} = ۱، (۳) \quad لا + م = ۱$$

(۴)  $لا = م + لا + ج + ع = ۰$ ، (۵)  $لا + ب + م + ج = ۰$ ۔

ان میں سے کسی ایک شکل کو اختیار کر لینے کے بعد دو مستقلات  $م$  اور  $ج$  یا  $لا$  اور  $ب$ ، یا  $لا$  اور  $م$ ، یا  $ع$  اور  $ج$ ، یا  $\frac{لا}{و} + \frac{ب}{ج}$  کی قیمتوں کو ان دو شرطوں سے متعین کرنا ہوگا جن کو خط پورا کرتا ہے۔

**مثال ۱۔** ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کر دو جو نقطہ  $(۲، ۳)$  میں سے گزرتا ہے اور محوروں پر مساوی مقطوعے قطع کرتا ہے۔

$$[ \text{فرض کر دو کہ خط کی مساوات } \frac{لا}{و} + \frac{ب}{ج} = ۱ \text{ ہے۔} ]$$

اب چونکہ مقطوعے مساوی ہیں اس لیے  $و = ب$ ۔

$$\text{نیز چونکہ نقطہ } (۲، ۳) \text{ خط پر ہے اس لیے } \frac{۲}{و} + \frac{۳}{و} = ۱$$

$$\therefore ۱ = ۵ = ب \text{ اور مطلوبہ مساوات } \frac{لا}{۵} + \frac{ب}{۵} = ۱ \text{ ہے۔}$$

مثال ۲۔ اُس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۲) میں سے گزرتا ہے اور محور لا کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بناتا ہے۔

[فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات  $mx + cy = ۱$  ہے۔

تب چونکہ خط مستقیم محور لا کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بناتا ہے اس لیے  $m = ۰$ ۔  
 $۳ = ۱$ ۔ نیز نقطہ (۲، ۳) خط پر ہے اس لیے  $۲ = ۱ + ۳$  اور

اس لیے  $c = ۱$ ، پس مطلوبہ مساوات  $mx + ۱ = ۱$  ہے۔

مثال ۳۔ جب مساوات  $۵x + ۱۲y = ۲۶$  کو شکل لایم۔

+ واجب  $c = ۱$  میں لکھا جائے تو  $c$  کی قیمت معلوم کرو۔ جواب: ۲

مثال ۴۔ خط  $\frac{x}{۲} + \frac{y}{۴} = ۱$

جواب: ۶، ۲

کا مبداء سے عمودی فاصلہ معلوم کرو۔

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ وہ خط جس کے نقطہ عمود محاور لا اور ما پر علی الترتیب ۵ اور ۴ ہیں نقطہ (۸، ۱۵) میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو نقطوں (۵، ۰) و (۰، ۲) میں سے گزرتا ہے نقطوں (۱۵، ۴) اور (۵، ۴) میں سے بھی گزرتا ہے۔

مثال ۷۔ اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۴، ۱۲) میں سے گزرتا ہے اور محور لا کے ساتھ زاویہ  $\frac{\pi}{۳}$  بناتا ہے۔ جواب:  $۳ = ۱$

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ نقطوں (۳، ۴) اور (۵، ۱) کو ملا کر والے خط مستقیم کا نقطہ وسطی خط لا  $۲ + ۱ = ۰$  پر ہے۔

مثال ۹۔ ثابت کرو کہ خط لا  $۲ + ۱ = ۰$  اُس خط کو جو نقطوں (۲، ۱) اور (۸، ۹) کو ملاتا ہے نسبت ۲:۳ میں قطع کرتا ہے۔

مثال ۱۰۔ ثابت کرو کہ خط لا  $۲ + ۱ = ۰$  اُس خط کو جو (۱، ۱) اور (۴، ۴) کو ملاتا ہے نسبت ۳:۲ میں خارجاً قطع کرتا ہے۔

۲۳۔ ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا (۲۶)

جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے معلوم سمت میں کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدود لائنوں میں اور فرض کرو کہ خط محور لائن کے ساتھ میں۔ ام کا زاویہ نہاتا ہے۔  
تب اس خط کی مساوات

$$m = m' + c$$

ہوگی اور چونکہ (لا، م) اس خط پر ہے اس لیے  
 $m = m' + c$   
اس لیے تفریق کرنے پر

$$m - m' = c \quad (لا - لا') \dots \dots \dots (۱)$$

وہ خط جو (۱) سے حاصل ہوتا ہے نقطہ (لا، م) میں سے گذرتا ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ پس م کو مناسب قیمت دینے سے یہ مساوات کسی خط مستقیم کو جو نقطہ (لا، م) میں سے گذر گیا تعبیر کریں گی۔  
پس جب ہمیں یہ معلوم ہو جائے کہ ایک خط مستقیم ایک مخصوص نقطہ (لا، م) میں سے گذرتا ہے تو ہم اس کی مساوات کے لیے فوراً لکھ لیتے ہیں۔

$$m - m' = c \quad (لا - لا')$$

اور پھر م کی قیمت کو اس دوسری شرط سے معلوم کرتے ہیں جس کو خط پورا کرتا ہے۔

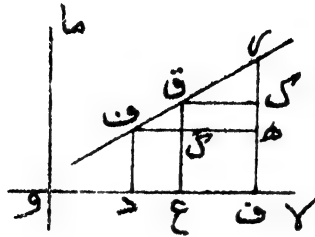
۲۴۔ ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو دو

دیے ہوئے نقطوں میں سے گذرے۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطے ف اور ق علی الترتیب (لا، م) اور (لا، م) ہیں اور فرض کرو کہ خط مستقیم ف ق پر کوئی دوسرا نقطہ سا



(لا، ما) ہے۔



(۲۷) اب چونکہ ف ق س، ایک خط مستقیم ہے مثلاًت ف گ ق،  
ف ہ س، متشابه ہیں اور اس لیے

$$\frac{\text{فہ س}}{\text{فگ ق}} = \frac{\text{فہ}}{\text{فگ}}$$

$$\frac{۱-۶}{۱-۲} = \frac{۱-۱}{۱-۱}$$

یعنی

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

دوسرا طریقہ: فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات

$$(۱) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۰$$

ہے تب چونکہ نقاط (۱، ۱)، (۲، ۲)، (۳، ۳) اس خط پر ہیں اس لیے

$$(۲) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۰$$

$$(۳) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۰$$

مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) سے ۱، ۱، ۱ کو سا قضا کرو تو مطلوبہ

مساوات شکل

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

میں حاصل ہوگی۔

مثال ۱۔ نقاط (۳، ۲) اور (۱، ۳) کو ملانے والے خط کی مساوی

$$= \frac{۲-۱}{۲-۳} = \frac{۳-۱}{۳-۱} \text{ یا } ۲+۱-۳=۰$$

ہے۔

مثال ۲۔ اُن خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کر دو جو (۱) نقاط (۲، ۱)

اور (۵، ۵) (ii) نقاط (۱، ۴) اور (۰، ۱۳) کو ملاتے ہیں۔

جواب: (i) لا-۲+۱=۰ (ii) لا+۲-۱=۰

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ (۵، ۳) اور (۴، ۲) کو ملانے والا خط

اُس خط کی تنصیف کرتا ہے جو (۲، ۴) اور (۴، ۹) کو ملاتا ہے۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ (۶، ۳) اور (۹، ۶) کو ملانے والا خط

محور ماکو مبدا سے اکائی فاصلہ پر قطع کرتا ہے۔

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ دو نقطوں (۳، ۹) اور (۱۵، ۳) میں

سے گزرنے والا خط محزوں پر مساوی مقطوعے قطع کرتا ہے۔

مثال ۶۔ وہ خطوط معلوم کر دو جو نقطہ (۴، ۳) میں سے گزرتے

ہیں اور محزوں کو اس طرح قطع کرتے ہیں کہ مقطوعے مقدار میں مساوی ہوتے ہیں۔

جواب: لا+۱=۰ اور لا-۱=۰

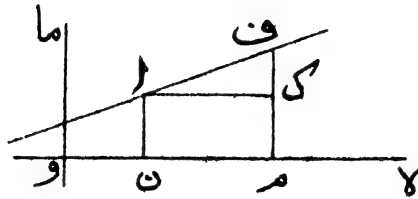
۲۵۔ فرض کرو کہ خط مستقیم 'اف' محور لا کے ساتھ زاویہ

طہ بناتا ہے۔ فرض کرو کہ 'ا' کے محذول 'ا' اور 'ف' کے محذول 'ا' ہیں

اور فاصلہ 'اف' = ۱۔

ان اور 'ف' کو محور ماکو کے متوازی کیچنؤ۔ 'ا' کو محور لا کے

متوازی کھینچو۔



تب اک = اف جم طہ اور ک ف = اف جب طہ

یا لا - لا = رجم طہ اور ما - ما = رجب طہ

خط اف کی مساوات کو شکل

$$\frac{لا - لا}{جم طہ} = \frac{ما - ما}{رجب طہ} = ر$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

۲۶ - فرض کرو کہ کسی خط مستقیم کی مساوات

$$(ا + لا + ب + ما + ج = ۰) \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔

فرض کرو کہ کسی نقطہ ق کے محدد لا، ما ہیں اور فرض کرو کہ وہ خط جو محور ما کے متوازی ہے اور ق میں سے گزرتا ہے دیے ہوئے خط کو نقطہ ف پر قطع کرتا ہے جس کے محدد لا، ما ہیں۔

تب ایک شکل سے یہ ظاہر ہوگا کہ جب تک ق، خط مستقیم کی ایک ہی جانب رہتا ہے ق ف کو ایک ہی سمت میں کھینچنا پڑتا ہے لیکن جب ق، خط مستقیم کی دوسری جانب واقع ہوتا ہے تو ق ف کو مخالف

سرت میں آکھینچا پڑتا ہے۔

اس کا یہ مطلب ہے کہ ق ف، خط مستقیم کی ایک جانب کے تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے اور دوسری جانب کے تمام نقطوں کے لیے منفی۔

اب ق ف = ا - ما ..... (۲)

اور ا لا + ب ما + ج = ا لا + ب ما + ج - (ا لا + ب ما + ج)  
[کیونکہ (لا، ما) خط پر ہے اور اس لیے ا لا + ب ما + ج = ۰]

∴ ا لا + ب ما + ج = - (ا - ما) ..... (۳)

(۲) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا لا + ب ما + ج، خط مستقیم کی ایک جانب کے تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے اور دوسری جانب کے تمام نقطوں کے لیے منفی ہے۔

(۲۹)

اگر ایک خط مستقیم کی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ ہو اور کسی نقطہ (لا، ما) کے عدد جملہ ا لا + ب ما + ج میں درج کیے جائیں تب اگر ا لا + ب ما + ج مثبت ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ (لا، ما) خط کی مثبت جانب واقع ہے لیکن اگر ا لا + ب ما + ج منفی ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ (لا، ما) خط کی منفی جانب واقع ہے۔  
اگر خط کی مساوات کو

$$-ا لا - ب ما - ج = ۰$$

لکھا جائے تو یہ ظاہر ہے کہ وہ جانب جس کو ہم نے مثبت جانب کہا ہے اب اسے منفی جانب کہنا چاہیے۔

مثال ۱ — نقطہ (۲، ۳) خط ۲ لا - ۳ ما - ۱ = ۰ کی منفی جانب پر ہے اور خط ۳ لا - ۲ ما - ۱ = ۰ کی مثبت جانب پر ہے۔

مثال ۲ — نقاط (۱، ۲) اور (۱، ۱) خط ۳ لا + ۲ ما - ۶ = ۰ کی مخالف جانبوں پر ہیں۔

مثال ۳ — ثابت کرو کہ چار نقطے (۰، ۰)، (۱، ۱)، (۱، -۱) اور (۲، ۹) خطوط مستقیم ۲ لا - ۳ ما + ۱ = ۰ اور ۳ لا - ۲ ما + ۵ = ۰ سے بننے والے چار مختلف خانوں میں

واقع ہیں۔

۲۷۔ دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے نقطہٴ تقاطع کے محدود معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

$$(۱) \dots\dots\dots = ۰ = ج + ۱ + لا$$

$$(۲) \dots\dots\dots = ۰ = ج + ۱ + لا$$

ہیں۔

اب اُس نقطہ کے محدود جو دونوں خطوطِ مستقیم میں مشترک ہے دونوں مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کرینگے۔ پس ہیں لا اور ما کی وہ قیمتیں معلوم کرنی ہیں جو مساواتوں (۱) اور (۲) دونوں کو پورا کریں۔ یہ قیمتیں

$$\frac{لا}{بج - بج} = \frac{۱}{ج - ج} = \frac{۱}{ب - ب}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

۲۸۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ تین خطوطِ مستقیم ایک نقطہ پر مل سکیں۔

فرض کرو کہ تین خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

$$(۱) \dots\dots\dots = ۰ = ج + ۱ + لا$$

$$(۲) \dots\dots\dots = ۰ = ج + ۱ + لا$$

$$(۳) \dots\dots\dots = ۰ = ج + ۱ + لا$$

ہیں۔

یہ تین خطوطِ مستقیم ایک نقطہ پر ملینگے اگر ان میں سے دو خطوں کا نقطہٴ تقاطع تیسرے خط پر واقع ہو۔

خطوطِ مستقیم (۱) اور (۲) کے نقطہٴ تقاطع کے محدود

$$\frac{\text{ب ج} - \text{ب ج}}{\text{ج و} - \text{ج و}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ج و} - \text{ج و}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ج و} - \text{ج و}}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔  
وہ شرط کہ یہ نقطہ خط (۳) پر واقع ہو رہے کہ

$$\frac{\text{ب ج} - \text{ب ج}}{\text{ج و} - \text{ج و}} + \frac{\text{ب ج}}{\text{ج و} - \text{ج و}} = \frac{\text{ب ج} - \text{ب ج}}{\text{ج و} - \text{ج و}} + \frac{\text{ب ج}}{\text{ج و} - \text{ج و}} =$$

$$\frac{\text{ب ج} - \text{ب ج}}{\text{ج و} - \text{ج و}} + \frac{\text{ب ج}}{\text{ج و} - \text{ج و}} = \frac{\text{ب ج} - \text{ب ج}}{\text{ج و} - \text{ج و}} + \frac{\text{ب ج}}{\text{ج و} - \text{ج و}} =$$

## مثالیں

۱۔ وہ خطوطِ مستقیم کھینچو جن کی مساواتیں ہیں

$$(۱) \quad \text{لا} + \text{ما} = ۲, \quad (۲) \quad ۳ \text{ لا} - ۴ \text{ ما} = ۱۳$$

$$(۳) \quad ۴ \text{ لا} - ۳ \text{ ما} + ۱ = ۰, \quad (۴) \quad ۲ \text{ لا} + ۵ \text{ ما} = ۰$$

۲۔ ان خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطوں کے حسب ذیل جوڑوں کو

ملاتے ہیں :

$$(۱) \quad (۳, ۲) \text{ اور } (۱, ۴), \quad (۲) \quad (۱, ۲) \text{ اور } (۲, ۱)$$

$$\text{جواب: } (۱) \quad \text{لا} - ۳ \text{ ما} + ۴ = ۰, \quad (۲) \quad \text{لا} + \text{ما} = ۱$$

۳۔ ان خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۱، -۱) میں سے گزرتے

ہیں اور محور لا کے ساتھ علی الترتیب زاویے ۵۰° اور ۴۰° بناتے ہیں۔

$$\text{جواب: } ۱ + \text{ما} = \frac{\text{لا}}{\tan 40^\circ} \quad (۱ - \text{لا})$$

۴۔ حسب ذیل مساواتوں کو شکل لاجم + ما جب م - ع = ۰ میں کھینچو

$$(۱) \quad ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ ما} - ۱۵ = ۰, \quad (۲) \quad ۱۲ \text{ لا} - ۵ \text{ ما} + ۱۰ = ۰$$

$$\text{جواب: } (۱) \quad \frac{۳}{۱۲} \text{ لا} + \frac{۴}{۱۲} \text{ ما} - \frac{۱۵}{۱۲} = ۰, \quad (۲) \quad \frac{۱۲}{۱۲} \text{ لا} + \frac{۵}{۱۲} \text{ ما} - \frac{۱۰}{۱۲} = ۰$$

۵۔ اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرتا ہے اور

خط ۱۲-۱۳-۵ کے متوازی ہے۔ جواب: ۱۲-۱۳-۵ = ۷

۶۔ اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۲) میں سے گزرتا ہے اور نقاط

(۳، ۲) (۱، ۳) کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔ جواب: ۱۲-۱۳-۵ = ۷

۷۔ اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۶، ۵) میں سے گزرتا ہے اور محوروں پر مساوی مقبوعے قطع کرتا ہے۔ جواب: ۱۱ = ۱۲ + ۱۳

(۳۱)

۸۔ خطوط مستقیم کے حسب ذیل زوجوں کے نقاط تقاطع معلوم کرو:

(۱) ۱۲-۱۳-۵ اور ۱۱-۱۲-۱۳ (۲) ۱۱-۱۲-۱۳ اور ۱۲-۱۳-۵

(۳)  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  اور  $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

جواب: (۱) (۱۲، ۵) (۲) (۱، ۳) (۳)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1$  ،  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 1$

۹۔ ثابت کرو کہ تین خطوط مستقیم ۱۲-۱۳-۵ ، ۱۱-۱۲-۱۳ اور ۱۲-۱۳-۵

ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ تین نقطے (۱۱، ۱) (۳، ۲) اور (۱، ۳) ایک خط مستقیم

پر ہیں۔

نیز تین نقطے (۱، ۳) (۲، ۱) (۳، ۲) اور (۱، ۲) بھی ایک خط مستقیم پر ہیں۔

۱۱۔ اُس مثلث کے اضلاع کی مساواتیں معلوم کرو جس کے راسوں کے

محاذ (۱، ۲) (۲، ۱) (۳، ۲) ہیں۔

جواب: ۱۲-۱۳-۵ = ۷ ، ۱۱-۱۲-۱۳ = ۷ ، ۱۲-۱۳-۵ = ۷

۱۲۔ اُن خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جن میں سے ہر ایک، مثال کے

مثلث کے راسوں میں سے ایک میں سے اور مقابل کے ضلع کے نقطہ وسطی میں سے

گزرتا ہے۔ جواب: ۱۲-۱۳-۵ = ۷ ، ۱۱-۱۲-۱۳ = ۷ ، ۱۲-۱۳-۵ = ۷

۱۳۔ اُس متوازی الاضلاع کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے

اضلاع کی مساواتیں

۱۲-۱۳-۵ = ۷ ، ۱۱-۱۲-۱۳ = ۷ ، ۱۲-۱۳-۵ = ۷

ہیں۔

جواب: (د-ج) لا + (ب-ا) ما + ب ج-د = (د-ج) لا + (ب-ا) ما + ج-د =

۱۳۔ ا کی کیا قیمت ہونی چاہیے کہ تین خطوط مستقیم

$$۳۰ = ۲۰ + ۱۰ = ۲۰ + ۱۰ = ۳۰ = ۳۰ - ۶۲ + ۱۱ = ۳۰ - ۶۲ + ۱۱ = ۳۰$$

ایک نقطہ پر مل سکیں۔

۱۵۔ نقطوں (۲، ۱) اور (۳، ۴) کو ملانے والا خط نقطوں (۳، ۲)

اور (۴، ۱) کو ملانے والے خط سے کس نسبت میں تقسیم ہوتا ہے۔

جواب: خط کی تصنیف ہوتی ہے۔

۱۶۔ معلوم کرو کہ آیا نقطے (۳، ۲) اور (۲، ۳) خط مستقیم ۶۵-۱۱۶+۴۰= کی

ایک ہی جانب واقع ہیں یا مخالف جانبوں پر۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ نقطے (۰، ۰) اور (۲، ۴) خط ۶۵-۱۱۶+۴۰= کی مخالف

جانبوں پر واقع ہیں۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ مبداء اُس مثلث کے اندر ہے جس کے ضلعوں کی مساواتیں

$$۱۱-۶۲+۵۳=۰، ۱۱+۶۳+۱۵=۰، ۲۵+۶۴+۱۱=۰$$

ہیں۔ [متناظر اس (-۱، ۲) (۳، ۴) (-۳، ۳) ہیں]

۲۹۔ دو خطوط مستقیم کی مساواتیں دی گئی ہیں۔

ان خطوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔

(۱) اگر دیے ہوئے خطوں کی مساواتیں

$$۰ = ۲۰ + ۱۰ = ۲۰ + ۱۰ = ۳۰ = ۳۰ - ۶۲ + ۱۱ = ۳۰ - ۶۲ + ۱۱ = ۳۰$$

ہوں تو مطلوبہ زاویہ ۰، ۱۸۰ یا ۳۶۰ (۰، ۱۸۰، ۳۶۰) ہوگا۔

کیونکہ ۰ اور ۳۶۰ وہ زاویے ہیں جو وہ عمود محور لا کے ساتھ بناتے ہیں

جن کو مبداء سے ان خطوں پر علی الترتیب کھینچا گیا ہے اور یہ ظاہر ہے کہ کسی

دو خطوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی یا متمم ہوتا ہے جو ان خطوں

کے عمودوں کے درمیان بنتا ہے۔



(۲) اگر خطوں کی مساواتیں

$$ما = م لا + ج ، ما = م لا + ج$$

ہوں اور طہ ، طہ وہ زاویے ہوں جو یہ خطوط محور لاکے ساتھ بناتے ہیں تو

$$مس طہ = م اور مس طہ = م اور اس لیے$$

$$مس (طہ - طہ) = \frac{م - م}{م + م}$$

$$\therefore \text{مطلوبہ زاویہ مس} = \left( \frac{م - م}{م + م} \right) \text{ ہے۔}$$

یہ خطوط ایک دوسرے پر عمود ہونگے جبکہ

$$+ م م = ۰$$

اور متوازی ہونگے جبکہ

$$م = م$$

(۳) اگر خطوں کی مساواتیں

$$ولا + ب ما + ج = ۰ ، ولا + ب ما + ج = ۰$$

ہوں تو ان مساواتوں کو شکلوں

$$ما = - \frac{لا}{ب} لا - \frac{ج}{ب} \text{ اور } ما = - \frac{لا}{ب} لا - \frac{ج}{ب}$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس لیے (۲) کی رو سے مطلوبہ زاویہ

$$\text{مس} = - \frac{\frac{لا}{ب} + \frac{ج}{ب}}{\frac{لا}{ب} + ۱} \text{ یا } \text{مس} = \frac{ب - لا}{لا + ب}$$

ہے۔

$$\text{خطوط } ولا + ب ما + ج = ۰ ، اور ولا + ب ما + ج = ۰$$

ایک دوسرے پر عمود ہونگے اگر

$$ولا + ب ب = ۰$$

اور متوازی ہونگے اگر

$$\text{ب} - \text{ا} = \text{ب} - \text{ا} = 0 \text{ یا } \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

۳۔ عمودیت کی شرط صرفاً ان دو خطوں سے پوری ہوتی ہے جن کی مساواتیں

$$\text{ا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ج} = 0 \text{ اور } \text{ب} - \text{لا} - \text{ا} + \text{ج} = 0$$

ہیں۔ یہ شرط ان دو خطوں

$$\text{ا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ج} = 0 \text{ اور } \frac{\text{لا}}{3} - \frac{\text{ا}}{\text{ب}} + \text{ج} = 0$$

سے بھی پوری ہوتی ہے۔

پس اگر ایک دیے ہوئے خط مستقیم کی مساوات میں لا اور ما کے سروں کو باہم بدلا جائے (یا انہیں مغلوب کیا جائے) اور ان میں سے ایک کی علامت تبدیل کی جائے تو ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات حاصل ہوگی جو دیے ہوئے خط مستقیم پر عمود ہوگا، اب اگر یہ خط کسی دوسری شرط کو بھی پورا کرتا ہے تو مستقل رقم کو موزوں قیمت دینی چاہیے۔

مثال ۱۔ وہ خط جو مباد میں سے گزرتا ہے اور  $\text{ا} + \text{لا} + \text{ب} = 0$  پر عمود ہے

$$\text{ا} - \text{لا} - \text{ب} = 0 \text{ ہے۔}$$

مثال ۲۔ وہ خط جو نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرتا ہے اور  $\text{ا} + \text{لا} + \text{ب} = 0$  پر عمود ہے

$$\text{ا} + \text{لا} + \text{ب} = 0 \text{ ہے۔}$$

نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۳۔ خطوط

$$\text{ا} + \text{لا} + \text{ب} = 0 \text{ اور } \text{ا} - \text{لا} - \text{ب} = 0$$

کے درمیان حادہ زاویہ مستقیم ہے۔

مثال ۴ - ثابت کرو کہ نقطوں (۳، ۱) اور (۲، ۳) کو ملانے والا خط نقطوں (۲، ۵) اور (۳، ۹) کو ملانے والے خط پر عمود ہے۔

مثال ۵ - خطوط  $3x + 2y - 4 = 0$  اور  $x + 2y + 9 = 0$  کے درمیان حادہ زاویہ معلوم کرو۔

جواب:  $90^\circ$

مثال ۶ - خطوط  $3x - 2y + 4 = 0$  اور  $2x + 4y - 11 = 0$  کے درمیان حادہ زاویہ معلوم کرو۔

جواب:  $90^\circ$

مثال ۷ - وہ خطوط معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۲) میں سے گزرتے ہیں اور خط  $3x - 2y + 4 = 0$  کے ساتھ  $90^\circ$  کے حادہ زاویے بناتے ہیں۔

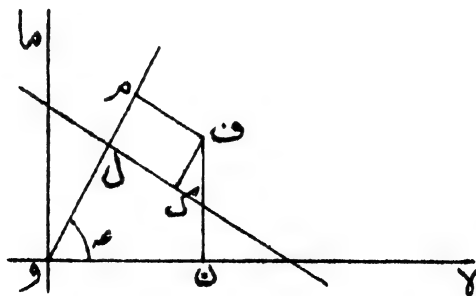
جواب:  $3x - 2y + 4 = 0$  اور  $2x + 4y - 11 = 0$ ۔

۳۱ - ایک دیے ہوئے خط مستقیم سے ایک دیے ہوئے نقطہ کا عمودی فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات

لاجم  $ax + by + c = 0$ ،  $a^2 + b^2 = 1$  (۱)

ہے اور فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدد لاء  $(x_1, y_1)$  ہیں۔



فرض کرو کہ دیے ہوئے خط مستقیم پر مبدا سے اور نقطہ (لا، ما) سے عمود ول 'ف' تک ہیں۔

فان کو دلا پر اور ف م کو ول پر عمود کھینچو۔  
 تب  $وم = ول$  پر ون اور ن ف کے ظلوں کا مجموعہ  
 اب ن ف، و ما کے متوازی ہے اور تمام صورتوں میں  
 زاویہ ما ول = زاویہ ما و لا + زاویہ لا ول  
 $= - زاویہ لا و ما + زاویہ لا ول = - \frac{\pi}{2} + ع$   
 ول پر ون کا ظل ون جم ع ہے اور ن ف کا ظل

ن ف جم  $(- \frac{\pi}{2} + ع)$

ہے۔ پس  $وم = لا$  جم ع + ما جب ع  
 ک ف = ل م = و م۔ ول

$= لا$  جم ع + ما جب ع - ع  
 پس خط لا جم ع + ما جب ع - ع = پر کسی نقطہ سے عمود کھینچا  
 جائے تو اس کا طول جملہ

لا جم ع + ما جب ع - ع

میں نقطہ کے محدودوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر خط کی مساوات  $لا + ب + ما + ج = ۰$  ہو تو اس کو (دفعہ ۲۰)  
 لکھا جاسکتا ہے

(۳۵)

$\frac{ا}{لا + ب} + \frac{ب}{لا + ب} + \frac{ج}{لا + ب} = ۰$  ..... (۲)  
 میں لکھا جاسکتا ہے اور یہ شکل وہی ہے جو (۱) کی ہے۔ اس لیے اس خط پر  
 نقطہ لا، ما سے کھینچے ہوئے عمود کا طول

$$\frac{ا}{لا + ب} + \frac{ب}{لا + ب} + \frac{ج}{لا + ب}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{لا} + \text{ب}} \quad (۳) \dots \dots \dots$$

ہے۔

دوسرا طریقہ :- اس خط کی مساوات جو نقطہ ف (لا، ما) میں گزرتا ہے اور خط لا + ب + ما + ج = پر عمود ہے  
ب (لا - لا) - (ما - ما) = ۰

ہے۔

اگر یہ عمودی خط دیے ہوئے خط سے نقطہ کی پر ملے اور کی کے محدود لا، ما ہوں تو چونکہ کی دونوں خطوں پر ہے اس لیے

$$\text{ب (لا - لا) - (ما - ما) = ۰} \dots \dots (۱)$$

اور لا + ب + ما + ج = جس کو لکھا جاسکتا ہے

$$\text{لا - لا + (ب - ما) - (ما - ما) = (لا + ب + ما + ج)} \dots (۲)$$

(۱) اور (۲) کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$(\text{لا} + \text{ب})^2 = \{(\text{لا} - \text{لا})^2 + (\text{ما} - \text{ما})^2\} + (\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج})^2$$

$$\text{اس لیے گ ف} = \{(\text{لا} - \text{لا})^2 + (\text{ما} - \text{ما})^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{لا} + \text{ب}}$$

پس جب ایک خط مستقیم کی مساوات کو شکل لا + ب + ما

+ ج = ۰ میں دیا جائے تو اس سے ایک دیے ہوئے نقطہ کا عمودی

فاصلہ جملہ لا + ب + ما + ج میں نقطہ کے محدود درج کرنے اور لا، ما کے سروں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر المربع سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر  $\overline{A+B}$  کو ہمیشہ مثبت فرض کیا جائے تو خط کی مثبت جانب کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کا طول مثبت ہوگا اور منفی جانب کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کا طول منفی ہوگا۔ [دیکھو دفعہ ۲۶]

۳۲۔ ان خطوں کی مساواتیں معلوم کرنا جو دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کریں۔ (۳۶)

اگر دو خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کے ناصف کھینچے جائیں اور ان ناصفوں میں سے ایک پر کے کسی نقطے سے خطوط پر عمود ڈالے جائیں تو یہ ظاہر ہے کہ یہ عمود مقدار میں ایک دوسرے کے مساوی ہوں گے۔ پس اگر خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$(۱) \quad \overline{A+B} + \overline{A+B} = 0 \dots \dots \dots$$

$$(۲) \quad \overline{A+B} - \overline{A+B} = 0 \dots \dots \dots$$

ہوں اور دو ناصفوں میں سے کسی ایک پر کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو

$$\frac{\overline{A+B} + \overline{A+B}}{\overline{A+B} + \overline{A+B}} \quad \text{اور} \quad \frac{\overline{A+B} - \overline{A+B}}{\overline{A+B} - \overline{A+B}}$$

مقدار میں مساوی ہونے چاہئیں۔  
اس لیے نقطہ (لا، ما) خطوط مستقیم

$$(۳) \quad \dots \dots \dots \frac{\overline{A+B} + \overline{A+B}}{\overline{A+B} + \overline{A+B}} \pm = \frac{\overline{A+B} - \overline{A+B}}{\overline{A+B} - \overline{A+B}}$$

میں سے کسی ایک پر ہے۔

اس لیے وہ دو خطوط جو (۳) سے حاصل ہوتے ہیں مطلوبہ ناصف ہیں۔ ہم ان دو ناصفوں میں تیز کر سکتے ہیں کیونکہ اگر ہم دونوں نسب نماؤں کو مثبت لیں اور اگر (۳) میں اوپر کی علامت لی جائے تو  $\overline{A+B} + \overline{A+B}$  اور

ا + لا + ب + ج + دو نوں یا تو مثبت ہونے چاہئیں یا دو نوں منفی۔

پس 
$$\frac{ا + لا + ب + ج}{\sqrt{ا^2 + لا^2 + ب^2}} = \frac{ا + لا + ب + ج}{\sqrt{ا^2 + لا^2 + ب^2}} \dots (۴)$$

میں ہر نقطہ 'خطوط' (۱) اور (۲) دونوں کی مثبت جانب ہے یا دونوں کی منفی جانب۔

اگر مساواتوں کو اس طرح لکھا جائے کہ مستقل ارقام دونوں مثبت ہوں تو سیدہ دو نوں خطوں کی مثبت جانب ہوگا اور اس لیے (۴) اس زاویہ کا ناصف ہوگا جس میں سیدہ واقع ہے۔

مثال ۱۔ خطوط ۴ لا - ۳ ما + ۱ = ۰ اور ۱۲ لا + ۵ ما + ۱۳ = ۰ کے درمیانی زاویوں کے ناصف 
$$\frac{۴ لا - ۳ ما + ۱}{۵} \pm \frac{۱۳ ما + ۵ لا + ۱۳}{۱۳}$$
 سے حاصل ہوتے

ہیں اور اوپر کی علامت لینے سے وہ ناصف ملتا ہے جس میں سیدہ واقع ہے۔ حسب ذیل مثال اہم ہے۔

مثال ۲۔ ایک مثلث ا ب ج کے راس ا ب ج کے محدود علی الترتیب (۱، ۲، ۳)، (۲، ۵)، (۸، ۹) ہیں۔ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز معلوم کرو۔

اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کی مساواتیں

$$۱۳ لا + ۱۶ ما - ۴۵۳ = ۰، ۱۹ لا - ۸ ما - ۳ = ۰، اور لا - ۴ ما + ۷ = ۰$$

ہیں۔ اگر ان مساواتوں کے دائیں جانبی ارکان میں ا ب ج کے محدود کو درج کیا جائے تو نتائج علی الترتیب -، +، - ہوں گے۔

اب اضلاع کی مساواتوں میں تمام ارقام کی علامتیں (اگر

ضرورت ہو) تبدیل کرو تاکہ ہر راس مقابل کے ضلع کی مثبت جانب ہو۔ تب مساواتیں ہوں گی

$$-۱۳ لا - ۱۶ ما + ۴۵۳ = ۰، ۱۹ لا - ۸ ما - ۳ = ۰، لا + ۴ ما - ۷ = ۰$$

$$\frac{۳-۶۸-۱۱۹}{\sqrt{۲۸+۲۱۹}} + = \frac{۴۵۳+۶۱۶-۱۱۳}{\sqrt{۲۱۶+۲۱۳}}$$

کوزاویہ (ج) کا اندرونی ناصف ہونا چاہیے کیونکہ اس مساوات کے دونوں ارکان مثبت ہونے چاہئیں یا دونوں منفی اور اس لیے ناصف پر کاٹوئی نقطہ (ج) اور ج ب دونوں کی مثبت جانب یا دونوں کی منفی جانب ہونا چاہیے۔

$$\frac{۴-۶۴+۱۱۹}{\sqrt{۲۴+۲۱}} + = \frac{۳-۶۸-۱۱۹}{\sqrt{۲۸+۲۱۹}}$$

زاویہ ب (ج) کا اندرونی ناصف ہے۔

پس اندرونی دائرہ کا مرکز مساواتوں

$$\frac{۴-۶۴+۱۱۹}{\sqrt{۱۴۷}} = \frac{۳-۶۸-۱۱۹}{\sqrt{۱۴۷}} = \frac{۴۵۳+۶۱۶-۱۱۳}{\sqrt{۱۴۷}}$$

سے حاصل ہوگا چنانچہ یہ نقطہ (۱۱، ۱۱) ہے۔

۳۳۔ دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں گزرنے والے خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔

مطلوبہ مساوات کو حاصل کرنے کا سب سے واضح طریقہ یہ ہے کہ دیے ہوئے خط مستقیم کا نقطہ تقاطع (لا، ما) معلوم کیا جائے اور پھر شکل ما-ما = م (لا-لا) استعمال کی جائے جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کی مساوات کی شکل ہے۔ لیکن حسب ذیل طریقہ ہمیں اوقات قابل ترجیح قرار پاتا ہے۔

فرض کرو کہ دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$(۱) \quad لا + ب + ما + ج = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

$$(۲) \quad لا + ب + ما + ج = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

ہیں۔ اب مساوات

$$(۳) \quad لا + ب + ما + ج + لہ (لا + ب + ما + ج) = ۰ \dots \dots \dots (۳)$$



پر غور کرو۔ یہ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے کیونکہ وہ پہلے درجہ کی مساوات ہے، نیز اگر (لا، ما) وہ نقطہ ہو جو دیے ہوئے خطوط مستقیم میں مشترک ہے تو حاصل ہونا چاہیے

$$لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$لا + ب + ما + ج + لہ (لا + ب + ما + ج) = ۰$$

اور اس لیے اس آخری مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ (لا، ما) خط (۳)

پر بھی ہے۔

پیر (۳) ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات ہے جو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔ نیز لہ کو موازن قیمت دینے سے یہ مساوات کسی دوسری شرط کو بھی پوری کر سکتی ہے، مثلاً وہ کسی دوسرے دیے ہوئے نقطہ میں سے گذرنے والے خط کو تعبیر کر سکتی ہے۔ اس لیے مساوات (۳) لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے ان تمام خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتے ہیں۔

مثال۔ اس خط کی مساوات معلوم کرو جو ب، ا کو خطوط ۲، ۳، ۵، ۶ سے

$$\text{اور } لا + ۲ + ما + ج = ۰ \text{ کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے۔}$$

کوئی خط جو نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے

$$لا + ۲ + ما + ج + لہ (لا + ۲ + ما + ج) = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ یہ نقطہ (۰، ۰) میں سے گذریگا اگر

$$۲ + لہ = ۰ \text{ یا } لہ = -۲$$

$$لا + ۲ + ما + ج + لہ (لا + ۲ + ما + ج) = ۰$$

$$لا + ما = ۰$$

یا

مطلوبہ مساوات ہے۔

۳۴ — اگر تین خطوط مستقیم کی مساواتیں علی الترتیب

$$لا + ب + ما + ج = ۰، لا + ب + ما + ج = ۰، لا + ب + ما + ج = ۰$$

ہوں اور اگر ہم تین مستقلات لہ، مہ، نہ معلوم کر سکیں ایسے کہ رشتہ  
لہ (لا + ب + ج) + مہ (لا + ب + ج) + نہ (لا + ب + ج) = ۰

(۱) . . . . .

متماثلہ درست ہو یعنی لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہو تو تین  
خطوط مستقیم ایک نقطہ پر ملیں گے۔ کیونکہ اگر کسی نقطہ کے محدود خطوں کی کسی  
دو مساواتوں کو پورا کرتے ہوں تو رشتہ (۱) سے یہ ظاہر ہے کہ یہ محدود تیسری  
مساوات کو بھی پورا کریں گے۔

یہ اصول اکثر استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال۔ دو تین خطوط مستقیم جو ایک مثلث کے راسوں کو مقابل کے  
ضلعوں کے تقاطع وسطی سے ملاتے ہیں ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

فرض کرو کہ راس 'د' ب، 'ج' علی الترتیب (لا، ما)، (لا، ما) اور  
(لا، ما) ہیں۔ اب ب ج، ج د، د ب کے تقاطع وسطی 'ع'، 'ف' علی الترتیب  
( $\frac{لا+ما}{۲}$ ،  $\frac{لا+لا}{۲}$ )، ( $\frac{لا+لا}{۲}$ ،  $\frac{لا+ما}{۲}$ )، ( $\frac{لا+ما}{۲}$ ،  $\frac{لا+لا}{۲}$ )

ہوں گے۔ اس لیے د کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{لا - لا}{لا - \frac{لا+لا}{۲}} = \frac{ما - ما}{ما - \frac{لا+ما}{۲}}$$

یا  
جوگی۔ اسی طرح ب ج، ع کی مساواتیں علی الترتیب

$$ما (لا + لا - لا) - لا (لا + ما - ما) + لا (لا + ما) - ما (لا + لا) = ۰$$

اور  
ہوں گی۔

اب چونکہ یہ تین مساواتیں متماثلہ معدوم ہوتی ہیں جبکہ انہیں باہم جمع کیا جاتا ہے

اس لیے ان سے تعبیر تین خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔  
 [ (۱) میں اندراج کرنے سے آسانی کے ساتھ یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ ث  
 جس کے محدود  $\frac{1}{2}$  (لا + لا + لا) ،  $\frac{1}{3}$  (ما + ما + ما) ہیں د پر ہے اور اس نتیجہ  
 کے تشاکل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ث ، ب ح اور ج ف پر بھی ہے۔ ]

## مثالیں

(۴۰)

۱۔ وہ زاویے معلوم کرو جو خطوط مستقیم کے حسب ذیل زوجوں کے  
 درمیان ہیں:

$$(۱) \text{ ما } = ۲ + لا ، ۵ + ۳ = ۸$$

$$(۲) \text{ لا } = ۲ + ما = ۴ ، ۰ = ۱ + لا - ۲$$

$$(۳) \text{ (لا + ب + ما + ج) } = ۰ ، \text{ (ا + ب + لا) } = ۰ ، \text{ (ب) } = ۱ ، \text{ (ب) } = ۱$$

جواب: (۱) ۴۵ ، (۲) ۹۰ ، (۳) ۳۵

۲۔ اُس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو  $۲ + لا + ۴ = ۵$  پر عمود ہو

اور نقطہ (۱، ۳) میں سے گزرے۔ جواب:  $۴ = لا - ۲ + ما = ۱۹$

۳۔ ان خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو مبدأ میں سے گزریں اور خطوط

$۳ + لا + ۲ = ۵$  اور  $۳ + لا + ۳ = ۴$  پر عمود ہوں۔ ان نقطوں کے محدود

معلوم کرو جہاں یہ عمود خطوں سے ملتے ہیں اور ثابت کرو کہ ان نقطوں کو ملائیو

خط کی مساوات  $۳ + لا + ۱۱ = ۳۵$  ہے۔

۴۔ خطوں  $۳ + لا + ۳ = ۴$  ،  $۵ + لا + ۱۲ = ۲۰$  اور  $۳ + لا + ۱۱ = ۳۵$

۸ = ۰ سے نقطہ (۳، ۲) کے عمودی فاصلے معلوم کرو۔ جواب: ۲

۵۔ ان خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو علی الترتیب نقاط (۱، ۱) اور

(۲، -۱) میں سے گزریں اور  $۳ + لا + ۴ = ۴$  کے متوازی ہوں۔ ان

خطوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرو۔ جواب:  $\frac{۱}{۵}$

۶۔ ان دو خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۲) میں سے

گذریں اور لا + ۲ = ۰ کے ساتھ ۵ کا زاویہ بنائیں۔

جواب: لا - ۳ + ما = ۰، ۳ لا + ما = ۹

۷۔ ان دو خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو لا + ۴ + ما = ۰ کے متوازی ہوں اور نقطہ (۱، -۱) سے اکائی فاصلہ پر واقع ہوں۔

جواب: لا + ۴ + ما = ۰، ۵ لا + ۳ ما = ۲۶

۸۔ اس خط کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ کو لا - ۴ - ما = ۰ اور

۲ لا - ۱ = ۰ کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے۔

جواب: ۳ لا + ۱۱ ما = ۰

۹۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۱) کو ۳ لا + ما

- ۲ = ۰ اور لا - ۲ + ما = ۰ کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے۔

جواب: ۴ لا + ۲۶ ما = ۳۳

۱۰۔ اس خط کی مساوات معلوم کرو جو ما - ۴ لا - ۱ = ۰ اور ۲ لا

+ ۵ ما - ۶ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے گزرے اور ۳ ما + ما = ۰ پر عمود ہو۔

جواب: ۸۸ ما - ۱۶۶ لا = ۱۰۱

۱۱۔ ایک مثلث کے راس (۲، ۱)، (۳، ۲) اور (-۱، ۱) ہیں۔

اس مثلث کے اضلاع پر مبدأ سے عمود کھینچے گئے ہیں۔ ان عمودوں کے طول

معلوم کرو۔ جواب:  $\frac{1}{5}$ ،  $\frac{1}{13}$ ،  $\frac{1}{17}$

۱۲۔ ان خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو خطوط مستقیم ۴ ما + ۳ لا

- ۱۲ = ۰ اور ۳ ما + ۴ لا - ۲۲ = ۰ کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کریں،

اور نیزہ شکل کھینچو جو ان چار خطوں کو تعبیر کرے۔

جواب: ما - لا + ۱۲ = ۰، ۴ ما + لا - ۳۶ = ۰

۱۳۔ خطوط لا + ۳ ما - ۱۰ = ۰، لا + ۳ ما - ۲۰ = ۰، لا - ۳ ما + ۵ = ۰

۳ لا - ما - ۵ = ۰ سے بنے ہوئے مستطیل کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو اور

نہایت کرو کہ وہ نقطہ  $(\frac{3}{4}, \frac{9}{4})$  پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۱۴۔ خطوط ما - لا = ۰، ما + لا = ۰، لا - ج = ۰ سے بنے ہوئے

جواب : ج

۱۵ - ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو خطوط  $ما - لا = ۲$ ،  $ما - لا = ۳$  اور  $ما - لا = ۵$  سے بنتا ہے  $\frac{۲}{۳}$  ہے۔

۱۶ - اس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جو خطوط  $ما = ۲ + لا$ ،  $ما = ۳ + لا$  اور  $ما = ۵ + لا$  سے بنے۔

جواب :  $\frac{۳۳۸}{۲۱}$ ۔  
 ۱۷ - ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو خطوں  $ما = ۱ + لا$ ،  $ما = ۲ + لا$  اور  $ما = ۳ + لا$  سے بنتا ہے

$$\frac{\frac{1}{2} (ج - ۱) (ج - ۲)}{۱۲ - ۲۲}$$

ہے۔

۱۸ - ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو خطوطِ مستقیم  $ما = ۱ + لا$ ،  $ما = ۲ + لا$  اور  $ما = ۳ + لا$  سے بنتا ہے

$$\frac{1}{4} \frac{(ج - ۱) (ج - ۲)}{۱۲ - ۲۲} + \frac{1}{2} \frac{(ج - ۱) (ج - ۲)}{۱۲ - ۲۲} + \frac{1}{4} \frac{(ج - ۱) (ج - ۲)}{۱۲ - ۲۲}$$

ہوگا۔ [مثال استعمال کرو]

۱۹ - ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم پر اس نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

۳۵ - ن ویں درجہ کی تجانس مساوات،  $مبدأ$  میں سے گزرنے والے ن خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی۔  
 فرض کرو کہ مساوات

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + (ن - ۱) + ن = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + (ن - ۱) + ن$$

ہے۔



اگر خطوط کے درمیان زاویہ طہ ہو تو

$$\text{مس ط} = \frac{۱۲ + ۱۲}{۱۲ + ۱۲} = \frac{۲۴}{۲۴} = ۱ \text{ باب } ۲ - \text{ج}$$

اگر ب' - ج مثبت ہے تو خطوط حقیقی ہیں، یہ خطوط منطبق ہونگے  
اگر ب' - ج = -

اگر ب' - ج منفی ہے تو خطوط خیالی ہیں لیکن حقیقی نقطہ (۰، ۰) میں سے گزرتے ہیں۔

اگر (۱ + ج) = ۰ تو خطوط ایک دوسرے کے علی القوام ہونگے  
یعنی لا اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہو تو خطوط علی القوام ہوں گے۔

۲۷۔ وہ شرط معلوم کرو کہ دوسرے درجہ کی عام مساوات  
(۲۳) دو خطوط مستقیم کو تعبیر کر سکے۔

دوسرے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ ما} + ۴ \text{ ب} + ۵ \text{ گ} + ۶ \text{ ف} + ۷ \text{ ج} = ۰ \dots (۱)$$

ہے۔ اگر یہ مساوات متماثلًا

$$(۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} + ۳ \text{ ن}) - (۱ \text{ لا} + ۲ \text{ م} + ۳ \text{ ن}) = ۰ \dots (۲)$$

کے معادل ہو تو (۱) اور (۲) میں سروں کو مساوی رکھتے ہیں

$$۱ \text{ لا} = ۱ \text{ لا} \quad ۲ \text{ ما} = ۲ \text{ م} \quad ۳ \text{ ب} = ۳ \text{ ن} \quad ۴ \text{ ج} = ۴ \text{ ن}$$

$$۱ \text{ م} + ۲ \text{ ن} = ۲ \text{ ف} + ۳ \text{ ن} + ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ گ} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ م} + ۵ \text{ ن} = ۱۰$$

آخری تین رشتوں کو مسلسل ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے

$$۸ \text{ ف گ} = ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ م} + ۴ \text{ ن} + ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ن} + ۳ \text{ م} + ۴ \text{ ن}$$

$$۴ \text{ م} + ۳ \text{ ن} + ۲ \text{ لا} + ۱ \text{ ن} + ۳ \text{ ن} + ۲ \text{ لا} + ۱ \text{ م} + ۲ \text{ ن}$$

$$۲ = ۱ ب ج + ۱ (۴ ف - ۲ ب ج) + ب (۴ گ - ۲ ج ۱)$$

$$+ ج (۴ ھ - ۲ ب) (ب)$$

پس ۱ ب ج - ۱ ف - ب گ - ج ھ + ۲ ف گ ھ = ۰ ..... (۳)

مطلوبہ شرط ہے۔  
اگر لائن اور ما دونوں کے سر صفر نہ ہوں تو اوپر کے نتیجہ کو زیادہ آسانی سے اس طرح حاصل کیا جاسکتا ہے کہ مساوات کو لایا جائے دو درجی مساوات سمجھ کر حل کیا جائے۔

فرض کرو کہ ۱ صفر نہیں ہے تو اگر ہم مساوات کو لائیں دو درجی مساوات سمجھ کر حل کریں تو

$$۱ لا + ۲ ھ + ۱ گ = ۱ (۴ ھ - ۲ ب) + ۱ (۴ گ - ۲ ب ج) + ب (۴ گ - ۲ ج ۱) + ج (۴ ھ - ۲ ب)$$

اب اس غرض کے لیے کہ یہ شکل ۱ لا + ۲ ب + ۱ ج = ۰ میں تبدیل ہو سکے یہ ضروری اور کافی ہے کہ علامت چتر کے اندر کا جملہ کامل مربع ہو۔ اس کے لیے شرط

$$(۴ ھ - ۲ ب) (۴ گ - ۲ ج) = (۴ گ - ۲ ج ۱) + ج (۴ ھ - ۲ ب)$$

ہے جس کو اسے تقسیم کرنے کے بعد وہ شرط (۳) کے حاصل ہو جاتی ہے۔

۳۸۔ ان خطوط کی تقسیم کی مساوات معلوم کرنا جو

$$۱ لا + ۲ ھ + ۱ لا + ۲ ب + ۱ گ + ۲ لا + ۲ ف + ۱ ج = ۰ ..... (۱)$$

$$۱ لا + ۲ م + ۱ ا = ۰ ..... (۲)$$

اور  
کے مشترک اقوالوں کو بدلتے بدلتے حاصل ہوتے ہیں۔  
(۳۴) مساوات (۱) کو مساوات (۲) کے ذریعہ دوسرے درجہ کی متجانس مساوات بناؤ تو حاصل ہوگا

$$۱ لا + ۲ ھ + ۱ لا + ۲ ب + ۱ گ + ۲ لا + ۲ ف + ۱ ج (۱ لا + ۲ م + ۱ ا) = ۰$$

$$+ م (۱ لا + ۲ م + ۱ ا) = ۰ ..... (۳)$$



اور یہ مطلوب مساوات ہے۔  
 کیونکہ مساوات (۳) متجانس ہونے کی وجہ سے وہ مبدا میں گزرنیوالے  
 خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے (دفعہ ۳۵)۔ یہ معلوم کرنے کے لیے کہ خطوط (۳)  
 خط (۲) سے کہاں متقاطع ہوتے ہیں (۳) میں ل لا + م ما = ا رکھو تو رشتہ  
 (۱) یور ا ہو گا جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ خطوط (۲) (۱) اور (۲) کے  
 مشترک نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔  
 مثال۔ ۰۰ خطوط معلوم کرو جو

$$۲ لا + ۲ لا + ۲ لا - ۲ لا + ۱ = ۰ \quad اور \quad ۲ لا + ۲ لا + ۲ لا - ۲ لا + ۱ = ۰$$

کے نقاط تقاطع کو مبدا سے ملاتے ہیں۔  
 خطوں کی مساوات

$$۲ لا + ۲ لا + ۲ لا - ۲ لا + ۱ = ۰ \quad اور \quad ۲ لا + ۲ لا + ۲ لا - ۲ لا + ۱ = ۰$$

ہے۔ یہ مساوات

$$۲ لا - ۲ لا - ۲ لا = ۰$$

میں تحویل ہوتی ہے۔ پس خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ مستقیم

۳۹۔ ان خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو دو خطوط مستقیم

$$۲ لا + ۲ لا + ۲ لا - ۲ لا + ۱ = ۰ \quad اور \quad ۲ لا + ۲ لا + ۲ لا - ۲ لا + ۱ = ۰$$

کے درمیانی زاویوں کی تصنیف کریں۔

اگر دیے ہوئے خطوط محور لاک ساتھ زاویے ط اور طہ بناتے  
 ہیں تو

$$(ما - لاس طہ) (ما - لاس طہ) = ۰$$

وہی ہے جو دی ہوئی مساوات ہے۔ پس

$$مس طہ + مس طہ = - \frac{مس طہ}{ب} \dots \dots (۱)$$

مس ط<sub>۱</sub> مس ط<sub>۲</sub> =  $\frac{ل}{ب}$  ، ..... (۲)

اگر طہ وہ زاویہ ہو جو نصفوں میں سے ایک، محور لا کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\text{طہ}_۱ + \text{طہ}_۲}{۲} = \text{طہ} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{طہ}_۱ - \text{طہ}_۲}{۲} = \text{طہ}$$

اور ان میں سے کسی صورت میں

$$\begin{aligned} \text{مس } ۲ \text{ طہ} &= \text{مس } (\text{طہ}_۱ + \text{طہ}_۲) \\ \text{یا} \quad \frac{\text{مس } ۲ \text{ طہ}}{\text{مس } ۱ \text{ طہ}} &= \frac{\text{مس } (\text{طہ}_۱ + \text{طہ}_۲)}{\text{مس } ۱ \text{ طہ}} \end{aligned}$$

اگر ایک نصف یہ (لا، ما) کوئی نقطہ ہو تو  $\frac{ل}{لا} = \text{مس طہ}$  (۳۵)

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{مس طہ}_۱ + \text{مس طہ}_۲}{\text{مس طہ}_۱ \text{ مس طہ}_۲} = \frac{\frac{ل}{لا} ۲}{\frac{ل}{لا} - ۱}$$

اس لیے (۱، ۲، ۳) کو استعمال کرنے سے مطلوبہ مساوات

$$\frac{۵۲}{۱-ب} = \frac{۲ لا لا}{لا - لا}$$

$$\text{یا} \quad \frac{لا لا}{۱-ب} = \frac{لا لا}{۵۲} \quad (۳) \quad \dots \dots \dots$$

حاصل ہوتی ہے۔

## مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ دو مخروط مستقیم لا، ۲ لا ما قط ط + لا = ۰، ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ طہ بناتے ہیں۔

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات  $لا + لا - لا + لا = ۱۸$  دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔ جواب:  $۵۵^\circ$

۳۔ ثابت کرو کہ حسب ذیل مساواتوں میں سے ہر ایک 'خطوط مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرتی ہے۔ ہر زوج کا درمیانی زاویہ بھی معلوم کرو۔  
(۱)  $(لا - لا)(لا - لا) = ۰$  ، (۲)  $لا - لا = ۰$  ،

(۳)  $لا = ۰$  ، (۴)  $لا - لا - لا - لا = ۰$  ، (۵)  $لا - لا + لا + لا = ۰$  ، (۶)  $لا - لا + لا + لا - لا - لا = ۰$  ،

(۷)  $لا + لا + لا + لا = ۰$  ،

۴۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

$لا + لا - لا + لا = ۰$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی؟ ثابت کرو کہ اگر یہ مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے تو ان کا درمیانی زاویہ  $۱۲$  ہے۔ جواب: لہ = ۲

۵۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

$لا + لا - لا + لا = ۰$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی؟ جواب:  $۱۰ - لا - لا = ۰$

۶۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

$لا + لا - لا + لا = ۰$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔ یہ خطوط حقیقی ہیں یا خیالی؟

جواب: ۲۸

مثال ۷۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات  $لا + لا - لا + لا = ۰$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی؟ جواب: لہ =  $\frac{۱۵}{۲}$

۸۔ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو

$لا + لا - لا - لا = ۰$  اور  $لا + لا - لا - لا = ۰$

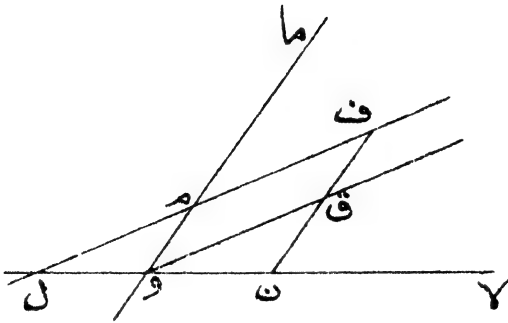
کے مشترک نقطوں کو مبداء سے ملاتے ہیں ایک دوسرے کے علی التوا نہیں۔

خطوط  $لا + لا - لا - لا = ۰$  اور  $لا + لا - لا - لا = ۰$  ہیں۔

## مائل محاور

(۲۶)

۴۰۔ خطِ مستقیم کی مساوات اُن محوروں کے حوالے سے معلوم کرنا جو ایک دوسرے سے زاویہ سہ پر مائل ہوں۔



فرض کرو کہ لی م ف کوئی خطِ مستقیم ہے جو محوروں سے نقاط ل، م پر ملتا ہے۔

فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدد (لا، ما) ہیں۔  
ف ن کو محور ما کے متوازی اور وق کو خط لی م ف کے متوازی کھینچو حسب شکل۔ تب

$$ن ف = ن ق + ق ف \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{لیکن } \frac{ن ق}{ون} = \frac{جب (سہ - ن وق)}{جب ن وق} = \frac{\text{مستقل}}{م (فرض کرو)}$$

$$\text{اور } ق ف = و م = \text{مستقل} = ج (فرض کرو)$$

اس لیے (۱) ہو جاتا ہے ما = م لا + ج جو مطلوبہ مساوات ہے۔  
اگر طہ وہ زاویہ ہو جو خط محور لا کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{م}} = \text{جب (ط۔ ط)}$$

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م جب سہ}}{\text{م + م جم سہ}}$$

۴۱۔ دفعات مابقی کے متعدد نتیجے درست رہتے ہیں خواہ محاور قائم (۴۷) ہوں یا مائل۔ ان نتیجوں کو آسانی سے پہچان لیا جاسکتا ہے۔

۴۲\*۔ دو خطوط مستقیم کی مساواتیں، زاویہ سہ پر مائل محور و حوالے سے دیکھی ہیں۔ ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔

اگر خطوں کی مساواتیں

$$\text{م} = \text{لا} + \text{ج} ، \text{ما} = \text{م} + \text{لا} + \text{ج}$$

ہوں اور اگر طہ اور طہ وہ زاویے ہوں جو وہ علی الترتیب محور لا کے ساتھ بناتے ہیں تو (دفعہ ۴۰)

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م جب سہ}}{\text{م + م جم سہ}} \text{ اور } \text{مس طہ} = \frac{\text{م جب سہ}}{\text{م + م جم سہ}}$$

اس لیے مس (طہ۔ طہ) =  $\frac{(\text{م} - \text{م}) \text{ جب سہ}}{(\text{م} + \text{م}) + (\text{م} + \text{م}) \text{ جم سہ}}$  ..... (۱)  
یا خطوں کا درمیانی زاویہ

$$\text{مس} = \frac{(\text{م} - \text{م}) \text{ جب سہ}}{(\text{م} + \text{م}) + (\text{م} + \text{م}) \text{ جم سہ}}$$

ہے۔

یہ خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں گے اگر

(۲) .....  $(\text{م} + \text{م}) + (\text{م} + \text{م}) \text{ جم سہ} = ۰$ ۔  
اگر خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$۱ \text{ لا + ب + ج} = ۰ \quad ۲ \text{ لا + ب + ج} = ۰$$

ہوں اور ان کے درمیان نہادویہ طہ ہو تو م = - ۱ ب اور م = - ۱ ب اور اسلئے  
ان قیمتوں کو (۱) میں درج کرنے سے

$$\text{مس طہ} = \frac{(۱ \text{ ب} - ۱ \text{ ب}) \text{ جب سے}}{(۱ \text{ ب} + ۱ \text{ ب} - ۱ \text{ ب}) \text{ جم سے}}$$

یہ خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہونگے اگر

$$۱ \text{ لا + ب + ج} = ۰ \quad (۱ \text{ ب} + ۱ \text{ ب}) \text{ جم سے} = ۰ \quad (۳)$$

پس کوئی خط جو لا + ب + ج = ۰ پر عمود ہے اُس کی مساوات

$$(ب - ۱ \text{ جم سے}) لا - (۱ - ب \text{ جم سے}) ما = \text{مستقل}$$

ہے۔ بالخصوص خطوط لا + ما جم سے = ۰ اور ما + لا جم سے = ۰، علی الترتیب  
محوروں ما = ۰ اور لا = ۰ کے عمود وار ہیں۔

$$۳ \text{ خط} - ۳ \text{ لا + ب + ج} = ۰ \quad (۴۸)$$

سے کسی نقطہ (لا، ما) کا عمودی فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ خط محاور لا اور ما کو علی الترتیب نقاط ک اور ل پر قطع  
کرتا ہے اور فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدد لا، ما ہیں اور  
ف ن وہ عمود ہے جو اس سے خط ل ک پر کھینچا گیا ہے۔ تب

$$\Delta \text{ فل ک} = \Delta \text{ فل و} + \Delta \text{ ف و ک} - \Delta \text{ ل و ک} \dots (۱)$$

$$\therefore \text{فن} \times \text{ل ک} = \text{ول} \times \text{لا جب سے} + \text{وک} \times \text{ما جب سے} - \text{وک} \times \text{ول}$$

$$\times \text{ جب سے} \dots \dots \dots (۲)$$

اگر ہم مثلث کے رقبہ کی علامت کے لحاظ سے کوئی قرارداد اختیار  
نہ کریں تو نقطہ اور خط کے مختلف محلوں کے لیے رشتہ (۱) میں ترمیم کرنی  
ہوگی، لیکن مساوات (۲) ہر صورت میں درست رہتی ہے۔ طالب علم کو

چاہیے کہ مختلف شکلیں کھینچ کر اس بیان کی صداقت کا بطور خود یقین کر لے۔

$$\begin{aligned} \text{اب وک} &= \frac{\text{ج}}{\text{ب}} \text{، ول} = \frac{\text{ج}}{\text{ب}} \\ \text{نیز لک} &= \text{وک} + \text{ول} = ۲ \text{وک} \times \text{ول جم سے} \\ &= \frac{\text{ج}}{\text{ب}} (۲ \text{ب} - \text{ب}) = ۲ \text{ب جم سے} \end{aligned}$$

= (۲) سے

$$\text{ف ن} = \frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{لا} + \text{ب} - ۲ \text{ب جم سے}} \text{ جب سے}$$

### دوسرا طریقہ

اُس خط کی مساوات جو نقطہ ف (لا، ما) میں سے گذرتا ہے اور خط  
 (لا + ب + ما + ج) = ۰ پر عمود ہے

(ب - ۱ جم سے) (لا - لا) - (۱ - ب جم سے) (ما - ما) = ۰  
 ہے۔ فرض کرو کہ عمود کے پائین ن کے محدود لا، ما ہیں پس ن دونوں خطوں پر  
 ہے اور اس لیے

$$\text{(ب - ۱ جم سے) (لا - لا) - (۱ - ب جم سے) (ما - ما) = ۰ \dots (۱)}$$

اور لا + ب + ما + ج = جس کو لکھا جاسکتا ہے

$$\text{(ب جم سے) (لا - لا) + (ب جم سے) (ما - ما) = - جب سے (لا + ب + ما)}$$

$$\text{(ج +) \dots \dots \dots (۲)}$$

(۱) اور (۲) کا مریج لیکر جمع کرنے سے

$$\text{(۱ + ۲) (ب جم سے) (لا - لا) + (۱ + ۲) (ب جم سے) (ما - ما) = - جب سے (لا + ب + ما)}$$

$$\text{جب سے (لا + ب + ما + ج) =}$$

پس 
$$\text{ن ف} = \frac{(\text{لا} + \text{ب} + \text{ا} + \text{ج})}{\text{ب} + \text{ا} + \text{ب} - \text{ا} + \text{ج} + \text{م} + \text{س}}$$
 جب سہ

۴۴ - خطوط

$$(\text{لا} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ا} = \text{ا})$$

کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا جبکہ محاورہ زاویہ سہ پر مائل ہوں -

اگر خطوط  $\text{ا} = \text{م} - \text{لا}$  اور  $\text{ا} = \text{م} - \text{لا}$

ہوں تو 
$$\text{م} + \text{م} = \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}}$$

اور 
$$\text{م} - \text{م} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

اس لیے 
$$\text{م} - \text{م} = \frac{\text{ا}^2 - \text{ا}}{\text{ب}}$$

لیکن  $\text{م} = \text{م} - \text{لا}$  اور  $\text{ا} = \text{م} - \text{لا}$  کا درمیانی زاویہ

مست 
$$\frac{(\text{م} - \text{م}) (\text{م} - \text{م})}{\text{ا} + (\text{م} + \text{م}) + \text{ج} + \text{س} + \text{م} + \text{س}}$$
 [دفعہ ۴۲]

ہے، اس لیے مطلوبہ زاویہ

مست 
$$\frac{\text{ا}^2 - \text{ا}}{\text{ب} + \text{ا} + \text{ب} - \text{ا} + \text{ج} + \text{س} + \text{م} + \text{س}}$$
 ہے -

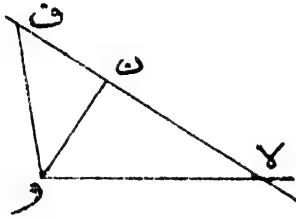
خطوط  $\text{لا} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ا} = \text{ا}$  ایک دوسرے کے علی القوائم ہونگے اگر  $\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} = \text{ج} + \text{س} = ۰$

قطبی محدود

۴۵ - خطِ مستقیم کی قطبی مساوات معلوم کرنا -



فرض کرو کہ مہدائے دیے ہوئے خط پر عمود ون ہے اور فرض کریں کہ  
ون = ع اور لا ون = ع۔  
فرض کرو کہ خط پر کوئی نقطہ ف ہے اور اس کے محدد ر، ط ہیں۔



تب شکل میں زاویہ ن و ف ' (طہ - عہ) ہے اور  
و ف جم ن و ف = ون  
اس لیے مطلوبہ مساوات  
ر جم (طہ - عہ) = ع

ہے۔

اس مساوات کو مساوات لاجم عہ + ماجب عہ = ع میں لاکر  
بجائے ر جم طہ اور ما کی بجائے ر جب طہ رکھ کر بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

۴۶۔ دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے  
خط کی قطبی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطے ف، ق اور ان کے محدد علی الترتیب ر، طہ اور ر، طہ ہیں۔  
فرض کرو کہ خط پر کوئی نقطہ س ہے اور اس کے محدد ر، طہ ہیں۔  
اب چونکہ

$$\Delta ف وق + \Delta ق و س - \Delta ف و س = ۰$$

اس لیے ر ر جب (طہ - طہ) + ر ر جب (طہ - طہ) - ر ر جب (طہ - طہ) = ۰  
اس لیے مطلوبہ مساوات

رَ رَ جب (طہ - طہ) + رَ رَ جب (طہ - طہ) = ۰

## مثالیں

۴۔

۱۔ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو مساوات  $ما - لا = ۰$  سے حاصل ہوتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوا'م ہیں خواہ محاور کے درمیان زاویہ کچھ ہی ہو۔

۲۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۲) میں سے گزرتے اور خط  $لا + ۲ = ما$  کو علی القوا'م قطع کرے، یہ معلوم ہے کہ محوروں کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہے۔

جواب:  $لا = ۱$

۳۔ وہ زاویہ معلوم کرو جو خط  $ما = ۵ + لا + ۶$  محور  $لا$  کے ساتھ بناتا ہے جبکہ محاور ایک ایسے زاویہ پر مائل ہوں جس کی جیب التمام  $\frac{3}{5}$  ہے۔

جواب:  $۴۵^\circ$

۴۔ اگر خطوط  $ما = م + لا + ج$  اور  $ما = م + لا + ج$ ، محور  $لا$  کے ساتھ مساوی زاویہ بنائیں تو

$م + م + م + م = ۰$

۵۔ اگر خطوط (۱، ۲)  $ب + لا + ج = ما = ۰$ ، محور  $لا$  کے ساتھ مساوی زاویہ بنائیں تو  $ب = (ج + م)$ ۔

۶۔ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو مساوات

$لا + ۲ + لا + م + ج = ۰$

سے حاصل ہوتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوا'م ہیں، محاور زاویہ  $۳۰^\circ$  پر مائل

۷۔ اس خط پر جو نقطوں (۱، ۲) اور (۲، ۱) کو ملاتا ہے قطب سے عمود کھینچا گیا ہے۔ اس عمود کے پائین کے قطبی مجدد معلوم کرو۔

۸۔ حسب ذیل مثالوں سے اہم امور کی توضیح ہوتی ہے:۔

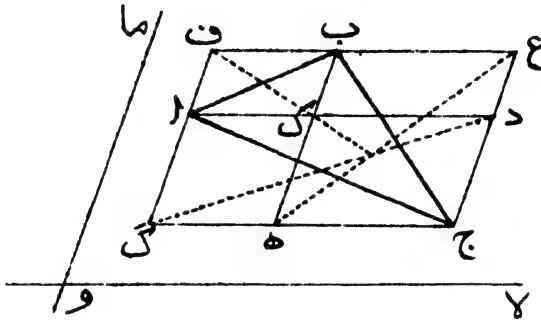
(۵۱)

(۱) ایک مثلث کے اضلاع پر انہیں وتر مان کر متوازی

الاضلاع کھینچے گئے ہیں جن کے ضلع دو دیے ہوئے خطوط مستقیم

متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان متوازی الاضلاعوں کے دوسرے وتر ایک نقطہ پر ملیں گے۔

متوازی الاضلاعوں کے اضلاع کے متوازی کسی دو خطوں کو محاور فرض کرو۔ فرض کرو کہ مثلث کے راسوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے محدود علی الترتیب (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما) ہیں



اب اس متوازی الاضلاع پر غور کرو جس کا ایک وتر 'ا-ب' ہے۔ اس کے دوسرے وتر کے سرے (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔

اس لیے وتر 'ا-ب' کی مساوات

$$\frac{لا-لا}{لا-لا} = \frac{ما-ما}{لا-لا}$$

ہوگی یا

$$لا(ما-ما) + ما(لا-لا) + لا-لا = لا-لا$$

اسی طرح 'ب-ج' کی مساوات

$$لا(ما-ما) + ما(لا-لا) + لا-لا = لا-لا$$

اور 'د-ا' کی مساوات

$$لا(ما-ما) + ما(لا-لا) + لا-لا = لا-لا$$

ہوگی۔

ان تین مساواتوں کا مجموعہ متماثلًا معدوم ہوتا ہے اس لیے یہ تین خطوط

ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ [دفعہ ۳۴]

(۲) ایک ثابت نقطہ (ا) میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو دو دیے

ہوئے خطوط مستقیم ولا، و ما کو علی الترتیب نقطوں ق، ق پر قطع کرتا ہے۔

متوازی الاضلاع وق ق کی تکمیل کی گئی ہے۔ اس کے طریق کی مساوات

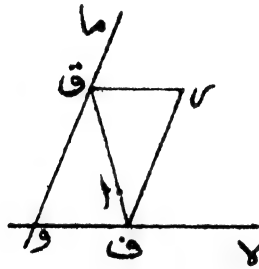
معلوم کرو۔

دیے ہوئے دو خطوں کو محاور تسلیم کرو اور فرض کرو کہ (ا) کے محدود ف، گ ہیں۔

(۵۲) فرض کرو کہ ق ق کی مساوات، اس کے ممکنہ محلوں میں سے کسی ایک میں،

$$(۱) \dots\dots\dots = \frac{لا}{بہ} + \frac{لا}{عہ} = ۱$$

ہے۔ تب نقطہ س کے محدود ع اور بہ ہوں گے۔



لیکن چونکہ خط ق ق نقطہ (ف، گ) میں سے گذرتا ہے اس لیے قیتیں

لا = ف، ما = گ مساوات (۱) کو پورا کرتی ہیں۔ اس لیے

$$(۲) \dots\dots\dots = \frac{ف}{بہ} + \frac{گ}{عہ} = ۱$$

پس نقطہ س کے محدود ع اور بہ، رشتہ (۲) کو ہمیشہ پورا کرتے ہیں۔ نقطہ

س کے محدودوں کو ع اور بہ کی بجائے لا اور ما کہنے سے اس کے طریق کی مساوات

$$۱ = \frac{گ}{ا} + \frac{ف}{لا}$$

معلوم ہوتی ہے۔

(۳) ایک ثابت نقطہ و میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو دو دیے ہوئے متوازی خطوط مستقیم کو علی الترتیب نقطوں ف اور ق پر قطع کرتا ہے۔ ف اور ق میں سے خطوط مستقیم مستقل سمتوں میں کھینچے گئے ہیں جو نقطہ س پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ س کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

ثابت نقطہ و کو مبدا اور محور م کو متوازی خطوط مستقیم کے متوازی لو۔ فرض کرو کہ ان متوازی خطوط مستقیم کی مساواتیں  $لا = ۱$ ،  $ب = ۱$  ہیں۔

اب اگر وف ق کی مساوات  $ما = م$  لا ہو تو ف کا فصل ۱ اور اس لیے اس کے معین کی قیمت م ۱ ہے۔ نیز ق کا فصل ب اور اس لیے اس کا معین م ب ہے۔

فرض کرو کہ ف س ہمیشہ خط  $ما = م$  لا کے متوازی ہے اور ق س ہمیشہ  $ما = م$  لا کے متوازی ہے تو ف س کی مساوات

ما - م ۱ = م (لا - ۱) ..... (۱)

اور ق س کی مساوات

ما - م ب = م (لا - ب) ..... (۲)

ہوگی۔

نقطہ س پر رشتے (۱) اور (۲) دونوں پورے ہوں گے اور ہم م کی کسی مخصوص قیمت کے جواب میں س کے محدودوں کو ہذات مساواتیں (۱) اور (۲) کے حل کرنے سے معلوم کر سکیں گے۔ لیکن ہمارا مقصود یہ نہیں ہے۔ ہمیں تو وہ جبری رشتہ مطلوب ہے جو نقطہ س کے محدودوں (لا، ما) سے پورا ہوتا ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اس رشتہ کو معلوم کرنے کے لیے مساواتوں (۱) اور (۲) سے م کو صرف ساقط کرنا ہوگا۔ چنانچہ نتیجہ حاصل ہوگا۔

(ب - ۱) ما = م ب (لا - ۱) - م ۱ (لا - ب)

یہ مساوات پہلے درجہ کی ہے اور اس لیے مطلوبہ طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(۴) ایک مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ اس کے اندرونی

اور جانیبی دائروں کے مرکز معلوم کرنا۔

فرض کر دو کہ راسوں (ا، ب، ج) کے محدود علی الترتیب (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما) ہیں۔ جب ج کی مساوات

$$ما(لا-لا) - (لا-لا) + (لا-لا) = ۰ \dots\dots\dots (۱)$$

ہے، ج کی مساوات

$$ما(لا-لا) - (لا-لا) + (لا-لا) = ۰ \dots\dots\dots (۲)$$

ہے، اور ب کی مساوات

$$ما(لا-لا) - (لا-لا) + (لا-لا) = ۰ \dots\dots\dots (۳)$$

ہے۔

مذکورہ دائروں میں سے کسی ایک کے مرکز سے ان خطوں پر عمود مقداریں  
ساوی ہیں۔ اس لیے ان چار دائروں کے مرکز مساواتوں

$$\frac{ما(لا-لا) - (لا-لا) + (لا-لا)}{\sqrt{(لا-لا)^2 + (لا-لا)^2}} = \pm$$

$$\frac{ما(لا-لا) - (لا-لا) + (لا-لا)}{\sqrt{(لا-لا)^2 + (لا-لا)^2}} = \pm$$

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{ما(لا-لا) - (لا-لا) + (لا-لا)}{\sqrt{(لا-لا)^2 + (لا-لا)^2}} = \pm$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر مثلث کے راسوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے محدودوں کو مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) میں علی الترتیب درج کیا جائے تو ان تین مساواتوں کے دائیں جانبی اراکین وہی ہوں گے۔ اس لیے (دفعہ ۲۶) مثلث کے راس سب کے سب یا تو خطوط (۱)، (۲)، (۳) کی مثبت جانبوں پر واقع ہوں گے یا سب کے سب منفی جانبوں پر۔

اندرونی دائرہ کے مرکز سے مثلث کے ضلعوں پر عمود سب کے سب اُسی سمت میں کھینچے ہوتے ہیں جس میں مثلث کے راسوں سے ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہوں۔ پس (۴) میں تمام اہامات کی علامتیں اندرونی دائرہ کے لیے مثبت ہیں۔

جانبی دائروں کے لیے علامتیں علی الترتیب - ++، -+، ++، -+ ہیں۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ (۴) میں مندرجہ کسروں کے نسب نامہ مثلث (ب ج ج کے اضلاع 'ا'، 'ب'، 'ج' ہیں۔

اب اگر تمام اہامات کی علامتوں کو مثبت لیا جائے یعنی اگر (لا، ما) اندرونی مرکز (In-centre) ہو تو تینوں شمار کنندوں کا مجموعہ  $\Delta_2$  اور تینوں نسب ناموں کا مجموعہ  $= 1 + b + c$  کیونکہ لا، ا، ر، ما کے سر دونوں مجموعوں میں صفر ہیں۔

$$\frac{\Delta_2}{1 + b + c} = \text{پس ہر کسر}$$

اب شمار کنندوں اور نسب ناموں کو ترتیب وار لا، لا، لا سے ضرب دو اور جمع کر دو تو ہر کسر

$$\frac{la \times \Delta_2}{1 + b + c + la}$$

$$la(1 + b + c) = 1 + b + c + la \quad \text{اس طرح}$$

$$la(1 + b + c) = 1 + b + c + la \quad \text{اس طرح}$$

ان سے اندرونی مرکز کے محدود اضلاع کے طولوں اور راسوں کے محدود رقوم میں حاصل ہوتے ہیں۔

نوٹ۔ اوپر کے نتیجہ کو ہم اس واقعہ سے بھی فوراً معلوم کر سکتے تھے کہ اندرونی مرکز (ا، ب) ج پر کی تین کیتوں کے لیے جو مقابل کے اضلاع کی متناسب ہوں "کیت کا مرکز" ہے، اور یہ اس واقعہ سے مستنبط ہوتا ہے کہ وہ خط جو ہر اس اندرونی مرکز سے ملتا ہے مقابل کے ضلع کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے درمیان نسبت اس نسبت کا عکس ہوتی ہے جو اس کے سروں پر کی کیتوں کے درمیان

## دوسرے باب پر مثالیں

۱۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت متقاطع خطوط پر اس کے مقطوعوں کے نکاتیوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات  $b^2 - 2 \cdot la + a^2 = 0$  دو ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ جو علی الترتیب خطوط مستقیم  $la + 2 \cdot la + b^2 = 0$  کے علی القیاس ہیں۔

۳۔ ان خطوں کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (ا، ب) میں سے گزریں اور مساوات

$$b^2 + b \cdot a - a^2 - 2 \cdot la + 0 = 0 \text{ بن لائے۔}$$

سے تعبیر شدہ ان خطوں پر علی الترتیب عمود ہوں۔

۴۔ ان خطوط مستقیم کے درمیانی زاویے معلوم کرو جو مساوات  $la^2 + 3 \cdot la - 2 \cdot la^2 = 0$  سے تعبیر ہوتے ہیں۔

۵۔ (ا، ب) دو ثابت خطوط مستقیم ہیں اور (ا، ب) ثابت نقطہ



ان خطوں پر ف، ق کوئی دو نقطے ہیں ایسے کہ نسبت ا، ف : ب، ق مستقل ہے۔  
ثابت کرو کہ ف، ق کے وسطی نقطہ کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۶۔ اگر ایک خط مستقیم ایسا ہو کہ کئی ثابت نقطوں سے اس پر کھینچے ہوئے  
عمودوں کا مجموعہ صفر ہو تو ثابت کرو کہ یہ خط مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے گا۔

۷۔ ف، م، ن وہ عمود ہیں جو ایک نقطہ ف سے دو ثابت  
خطوط مستقیم پر کھینچے گئے ہیں جو نقطہ و پر ملتے ہیں۔ ن، ق اور م، ق کو ان خطوط مستقیم  
کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ نقطہ ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر نقطہ ف  
کا طریق ایک خط مستقیم ہو تو نقطہ ق کا طریق بھی ایک خط مستقیم ہوگا۔

۸۔ ایک ثابت نقطہ و میں سے ایک خط مستقیم و، ف، ق کھینچا  
گیا ہے جو دو ثابت خطوط مستقیم سے نقاط ف، ق پر ملتا ہے۔ خط مستقیم  
و، ف، ق میں ایک نقطہ س ایسا لایا گیا ہے کہ و، ف، س، و، ق سلسلہ  
موسیقیہ میں ہیں۔ ثابت کرو کہ س کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۹۔ خطوں ع = ج، ع = ج، ع = ج، ع = ج سے بنے ہوئے متوازی الاضلاع کے تروں کی مساواتیں معلوم کرو جہاں

$$\begin{aligned} \text{ع} &= \text{لاجم ع} + \text{ماجب ع} - \text{ع} \\ \text{ع} &= \text{لاجم ع} + \text{ماجب ع} - \text{ع} \end{aligned}$$

۱۰۔ ا، ب، ج، د ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ا کو قطب اور ا، ب  
کو ابتدائی خط مان کر متوازی الاضلاع کے چار ضلعوں اور دو تروں کی مساواتیں  
معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک دیے ہوئے نقطہ (ھ، ک) سے محوروں پر عمود کھینچے گئے

ہیں اور ان عمودوں کے پائین کو ملا لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ (ھ، ک) سے اس  
خط پر عمود کا طول

ھ ک جب ۲

$$\sqrt{\text{ھ}^۲ + \text{ک}^۲} = \text{ھ ک جب ۲}$$

ہے اور اس کی مساوات  $لا - ک = ما = ح$  ہے۔

۱۲۔ دو خطوط مستقیم محدودوں کے مبدا میں سے گزرتے ہیں، ان میں سے ہر خط سے ایک نقطہ (لا، ما) کا فاصلہ ضہ ہے۔ ثابت کرو کہ یہ دو خطوط مساوی

$$(لا - ما) = ۲ = ضہ (لا + ما)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۳۔ دیے ہوئے خطوط مستقیم ولا، وما پر دو ثابت نقطے (ا، ب) اور نیز کوئی دو نقطے ف، ق لیے گئے ہیں ایسے کہ وف + وق = و ا + و ب ثابت کرو کہ (ق اور ب ف کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۱۴۔ ایک مربع کے ضلعوں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے دو متقابلہ راسوں کے محدود ۳، ۴ اور ۱، ۲ ہیں۔

۱۵۔ ایک مثلث کا قاعدہ اور قاعدے پر کے زاویوں کا فرق دیے گئے ہیں۔ اس مثلث کے راس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۱۶۔ ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو کہ اس پر ایک ہی خط مستقیم کے دو دیے ہوئے حصوں کے محاذی مساوی زاویے بنیں۔

۱۷۔ خطوں

$$لاجم ط + ماجب ط = ا، لاجم ف + ماجب ف = ا$$

ہر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب، خط

$$لاجم ط + ف + ماجب ط = اجم ط = اجم ف + ف + ماجب ف = اجم ط$$

پر اسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کے مربع کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کے طریق کی مساوات  $لا + ما = ا$  ہے۔

۱۸۔ ف، ا، ف ب خطوط مستقیم ہیں جو ثابت نقطوں (ا، ب) میں سے گزرتے ہیں اور ایک دیے ہوئے خط پر مستقل طول قطع کرتے ہیں۔ ف

طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو خطوط  $AB$  و  $CD$  کے درمیان

$$AB = ۴، CD = ۳، AD = ۴، BC = ۴، اور AC = ۳$$

$$= ۴، B سے بنتا ہے (۴-۴) (B-B) = ۴$$

۲۰۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو خطوط  $AD$  و  $BC$  کے درمیان

$$AD = ۴، BC = ۳، اور AC = ۳$$

$$\frac{AD \times BC}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

ہے۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ خطوں

$$AD \text{ و } BC \text{ کا رقبہ } = ۴$$

میں سے ایک، اور خطوں

$$AD \text{ و } BC \text{ کا رقبہ } = ۴$$

میں سے ایک کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے وہ اس زاویہ کے مساوی ہے جو  
نظام کے دوسرے دو خطوں کے درمیان ہے۔

۲۲۔ وہ شرط معلوم کرو کہ خطوں

$$AD \text{ و } BC \text{ کا رقبہ } = ۴$$

میں سے ایک، خطوں

$$AD \text{ و } BC \text{ کا رقبہ } = ۴$$

میں سے ایک پر مطبق ہو سکے۔

۲۳۔ وہ شرط معلوم کرو کہ خطوں

$$AD \text{ و } BC \text{ کا رقبہ } = ۴$$

میں سے ایک، خطوں

$$AD \text{ و } BC \text{ کا رقبہ } = ۴$$

میں سے ایک پر عمود ہو۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ نقطہ (۱، ۸) اس مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے جس کے اضلاع کی مساواتیں علی الترتیب  
 $۳ + لا = ۴ = ۱۲ - لا = ۵ = ۱۵ - ۱ = ۱۵$ ۔

ہیں۔

۲۵۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدود جس کے راس (۱، ۲)، (۲، ۳) اور (۳، ۱) ہیں  $\frac{1}{4}$  (۸ + ۱۰) اور  $\frac{1}{4}$  (۱۶ - ۱۰) ہیں۔ نیز جارجی دائروں کے مرکز معلوم کرو اور مختلف صورتوں کا فرق دکھاؤ۔

۲۶۔ اگر محاور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

$$(لا - ۳ ما) لا = م ما (ما - ۳ لا)$$

سے ایسے تین خطوط تعبیر ہوتے ہیں جو مباد میں سے گذرتے ہیں اور ایک دوسرے کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

$$۲۶۔ خطوط لا + لا + ۲ = لا + ما + ب ما = ۲$$

پر نقطہ (لا، ما) سے عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کا حاصل ضرب

$$\frac{لا + لا + ۲ = لا + ما + ب ما}{(۱ - ب) + (۱ - ب) + ۲}$$

۴

۲۸۔ اگر نقطہ (لا، ما) سے خطوط لا + لا + ۲ = لا + ما + ب ما = ۲ پر عمود

ع، ع، ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(ع + ع) (ع + ب) = (۱ - ب) + (۱ - ب) + ۲ = (۱ - لا) + ب ما$$

$$۴ + (۱ + ب) لا + ما + ۲ = (لا + ما)$$

۲۹۔ اگر تین خطوط مستقیم

۱)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$   
 پر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہو اور ک کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

-4-

۳۰۔ مساوات

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) + \dots + 1^2$$

سے تعمیر شدہ تین خطوں میں سے دو خطوط علی القوا لم ہوں گے اگر

$$= 1 + 3 + 3 + \dots + 3 + 3 + 3 + \dots + 3 + 3 + 3 + \dots$$

۳۱ — ثابت کرو کہ مساوات

$$= \tilde{L} \tilde{U} \tilde{Z} + (\tilde{L} - \tilde{U}) \tilde{L} - r - (\tilde{L} + \tilde{U}) \tilde{d}$$

سے خلوتِ مستقیم کے ایسے دو زوج تعمیر ہوتے ہیں جو علی القوام ہیں۔ نیز اگر ۲ با

$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 + 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 + 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 + 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 + 91 + 93 + 95 + 97 + 99 = 2500$

۳۲ — وہ ضروری اور کافی شرط کہ

$$0 = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$$

سے تعبیر شدہ خلوطِ مستقیم میں سے دو علی القوائم ہوں یہ ہے کہ

$$= (ع + ج + 1) (1 - ع) + (ع ب + 1) (ب + 1)$$

۳۳ - دمنخینوں

۱۰ = لا + ۲ ه + لا + ما + ب + ۲ ما + ۲ گ + لا =

و لا + ۲ + لا + ۲ + ب + ۲ + ۲ = لا .

191

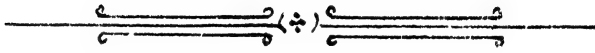
کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ طوائف والے خطوط مستقیم

علی القوا تم ہوئے اگر گ (۱ + پ) = گ (۱ + ب) -

۳۴۔ اگر ایک مثلث کے راسوں سے دوسرے مثلث کے اضلاع پر

کھینچے ہوئے عمود ایک نقطہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ دوسرے مثلث کے راسوں سے پہلے مثلث کے اضلاع پر کھینچے ہوئے عمود بھی ایک نقطہ پر ملیں گے۔

۳۵۔ اگر ایک مثلث کے راس تین ہم نقطہ ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہوں اور مثلث کے دو اضلاع ثابت نقطوں میں سے گزریں تو ثابت کرو کہ تیسرا ضلع بھی ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے گا۔

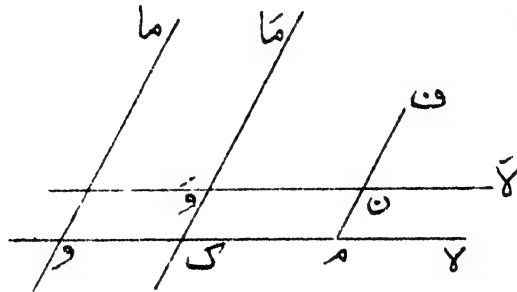


## تیسرا باب

(۵۹) محور کی تبدیلی غیر موسمی نسبتیں یا چلیبی نسبتیں۔ درپیش  
محوروں کی تبدیلی

۴۸۔ جب ہمیں محوروں کے ایک جٹ کے حوالے سے ایک منحنی کی مساوات معلوم ہو تو ہم محوروں کے دوسرے جٹ کے حوالے سے اس کی مساوات کو اخذ کر سکتے ہیں۔

۴۹۔ محوروں کی سمت بدلے بغیر محدودوں کے مبداء کو تبدیل کرنا۔

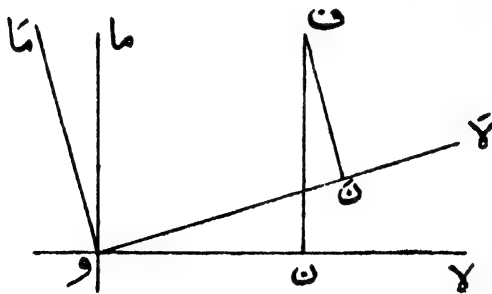


فرض کرو کہ ابتدائی محاورہ 'لا' و 'ما' ہیں اور نئے محاورہ 'لا' و 'ف'۔

وَمَا جِہَاں وَلَا، ولا کے متوازی اور وَمَا وَمَا کے متوازی ہے۔  
 فرض کرو کہ ابتدائی محوروں کے حوالے سے وَ کے محدد ہ، ک ہیں۔  
 فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدد ابتدائی محوروں کے  
 حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لا، ما ہیں۔ ف م کو  
 وما کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ ف م، ولا کو م پر اور ولا کو  
 ن پر قطع کرتا ہے۔

(۶۰) تب لا = و م = و ک + ک م = و ک + و ن = ہ + لا  
 اور ما = م ف = م ن + ن ف = ک و + ن ف = ک + ما  
 پس کسی نقطہ کے ابتدائی محدد نئے محددوں کی رقوم میں معلوم ہو چکے  
 اور اگر ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں درج کیا جائے تو تمنحنی کی نئی مساوات  
 حاصل ہوگی۔  
 ادھر کے بیان میں محاور قائم یاائل ہو سکتے ہیں۔

۵۔ مبداء کو بدلے بغیر محوروں کی سمت تبدیل کرنا  
 جبکہ دونوں نظام قائم ہوں۔



فرض کرو کہ ابتدائی محاور ولا، وما ہیں اور نئے محاور ولا،  
 وما۔ فرض کرو کہ زاویہ لا ولا = طہ۔



فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدود ابتدائی محوروں کے حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لا، مائیں۔ ف ن کو ولا پر عمود اور ف ن کو ولا پر عمود کھینچو۔

کسی خط پر ون اور ن ف کے ظلوں کا مجموعہ، اس خط پر ون اور ن ف کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

اب ولا اور و ما پر ظل لو تو

$$\text{لا} = \text{لاجم طه} + \text{ماجم} \left( \frac{\pi}{4} + \text{طه} \right)$$

$$\text{ما} = \text{لاجم} \left( \text{طه} - \frac{\pi}{4} \right) + \text{ماجم طه}$$

$$\text{لا} = \text{لاجم طه} - \text{ماجم طه}$$

$$\text{ما} = \text{لاجم طه} + \text{ماجم طه}$$

پس کسی نقطہ کے ابتدائی محدود، نئے محدود کی رقوم میں معلوم ہو چکے (۶۱) اور اگر ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں درج کیا جائے تو منحنی کی نئی مساوات حاصل ہوگی۔

مثال ۱۔ ایک منحنی کی مساوات  $\text{لا}^3 + \text{لا}^2 + \text{ما} + \text{ما}^3 - \text{لا}^2 - \text{لا}^3$

۲۲ + ما = ۵۰ ہے۔ نقطہ (۳، ۲) میں سے گزرنے والے قائم محاور کے حوالے سے یہ مساوات کیا ہو جائے گی جبکہ لا کا نیا محور پرانے محور کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائے۔

اول سبداؤ کو نقطہ (۳، ۲) پر منتقل کرو جس کے لیے لا، ما کی بجائے

علی الترتیب لا، ۲، ما، ۳ رکھنا ہو گا چنانچہ نئی مساوات

$$3(\text{لا} + 2) + 2(\text{لا} + 2) + (3 + 2) + (3 + 2) - 18 - (3 + 2) = 50 + (3 + 2)$$

ہوگی جو

$$3\text{لا}^3 + 2\text{لا}^2 + \text{ما} + \text{ما}^3 - 1 = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے یا زبروں کو اڑا دیا جائے تو

$$3 \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا} \text{ لا}^2 + 3 \text{ لا}^2 - 1 = 6 \dots\dots\dots (1)$$

محوروں کو ۵۴ کے زاویہ میں سے گھمانے کے لیے لا کی بجائے لا<sup>۱</sup> - لا<sup>۲</sup> اور لا کی بجائے لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> رکھنا چاہیے۔ تب مساوات (۱)

$$1 = 3 \left( \frac{\text{لا}^2 - \text{لا}^2}{2\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \left( \frac{\text{لا}^1 - \text{لا}^2}{2\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\text{لا}^1 + \text{لا}^2}{2\sqrt{2}} \right) + 3 \left( \frac{\text{لا}^1 + \text{لا}^2}{2\sqrt{2}} \right)^2$$

ہو جائے گی جو ۴ لا<sup>۲</sup> + ۲ لا<sup>۲</sup> = ۱ میں تحویل ہوتی ہے۔  
پس مطلوبہ مساوات

$$4 \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا}^2 = 1$$

ہے۔  
مثال ۲۔ مساوات لا<sup>۱</sup> - لا<sup>۲</sup> + ۲ لا + لا<sup>۲</sup> + ۴ لا = ۱۔ کیا ہو جائیگی

جبکہ مبدا کو نقطہ (۱، ۲) پر منتقل کیا جائے؟ جواب: لا<sup>۱</sup> - لا<sup>۲</sup> + ۳ = ۰۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ مساوات ۶ لا + لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> + ۵ لا = ۱

+ ۵ = ۰ ان محوروں کے حوالے سے جو ایک خاص نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور ابتدائی محوروں کے متوازی ہیں ۶ لا + لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> + ۵ لا = ۰ ہو جاتی ہے۔

جواب: نقطہ (۱، ۱) ہے۔

مثال ۴۔ مساوات لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + ۳ لا + لا<sup>۲</sup> + ۲ لا - لا<sup>۲</sup> = ۱۔ کیا ہو جائیگی

جبکہ محوروں کو ۳۰ کے زاویہ میں سے گھمادیا جائے؟

جواب: ۵ لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> = ۰۔

مثال ۵۔ مساوات لا<sup>۱</sup> - لا<sup>۲</sup> + لا + لا<sup>۲</sup> + لا - لا<sup>۲</sup> = ۰ کو ان

محوروں کے حوالے سے معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۰) میں سے گزرتے ہیں اور ان خطوں کے متوازی ہیں جو ابتدائی محوروں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف

کرتے ہیں۔ جواب: ۲ لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> = ۰۔

مثال ۶۔ مساوات  $لا + ۲ ج = ما + ۱$  کو مستحیل کرو

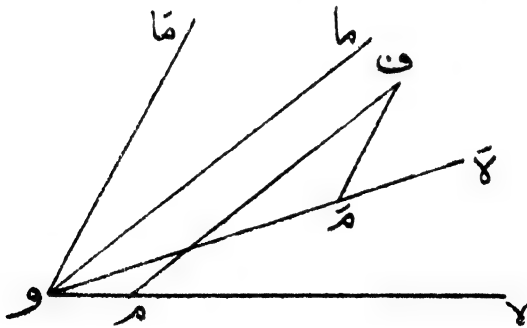
جبکہ قائم محوروں کو زاویہ  $\frac{\pi}{4}$  میں سے گھمایا گیا ہو۔

جواب:  $(ج + ۱) لا + (ج - ۱) ما = ۱$

۵۱۔ مبدا کو بدلے بغیر مائل محوروں کے ایک جٹ سے (۶۲) دوسرے جٹ میں تبدیل کرنا۔

فرض کرو کہ  $ولا$ ،  $وما$  ابتدائی محاور ہیں جو زاویہ سے پر مائل ہیں۔

فرض کرو کہ  $ولا$ ،  $وما$  نئے محاور ہیں جو زاویہ سے پر مائل ہیں۔ فرض کرو کہ زاویہ  $لا ولا$  طے کے مساوی ہے۔



فرض کرو کہ  $ف$  کوئی نقطہ ہے جس کے محدد ابتدائی محوروں کے حوالے سے  $لا$ ،  $ما$  اور نئے محوروں کے حوالے سے  $ولا$ ،  $وما$  ہیں چنانچہ شکل میں  $وم = لا$ ،  $مف = ما$ ،  $وم = لا$ ،  $مف = ما$  جہاں  $مف$

و ما کے متوازی اور مَرف، و ما کے متوازی ہے۔  
کسی خط پر و ما اور مَرف کے غللوں کا مجموعہ، اُس خط پر و ما  
اور مَرف کے غللوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔  
ایک ایسے خط پر ظل لوجو و لا پر عمود ہے، تب

$$\text{ما جب سہ} = \text{لا جب} (\frac{\pi}{4} - \text{طہ}) + \text{ما جب} (\frac{\pi}{4} - \text{سہ} - \text{طہ})$$

ما جب سہ = لا جب طہ + ما جب (طہ + سہ)  
پھر ایک ایسے خط پر ظل لوجو و ما پر عمود ہے، تب

$$\text{لا جب} (\frac{\pi}{4} + \text{سہ}) = \text{لا جب} (\text{سہ} + \frac{\pi}{4} - \text{طہ}) + \text{ما جب} (\text{سہ} + \frac{\pi}{4} - \text{طہ} - \text{سہ})$$

لا جب سہ = لا جب (سہ - طہ) + ما جب (سہ - سہ - طہ)  
یہ ضابطے شاذ ہی استعمال کئے جاتے ہیں۔ وہ نتیجے جو محوروں کی  
تبدیلی سے ماضل ہوتے ہیں بالعموم بالواسطہ معلوم کئے جاتے ہیں،  
جیسا کہ سب ذیل مثال میں کیا گیا ہے۔

۵۲۔ اگر محوروں کی تبدیلی سے لا<sup>۱</sup> + ۲ لا + ۲ ما + ب<sup>۱</sup> ما (۶۳)

بدل کر لا<sup>۱</sup> + ۲ لا + ۲ ما + ب<sup>۱</sup> ما ہو جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1 + \text{ب} - ۲ \text{ج} \text{سہ}}{\text{ج} \text{ب} \text{سہ}} = \frac{1 + \text{ب} - ۲ \text{ج} \text{سہ}}{\text{ج} \text{ب} \text{سہ}}$$

جہاں سہ اور سہ محوروں کے ان دو جٹوں کے زوایاے  
میلان ہیں۔

اگر سبدا، و ہو اور ف کوئی نقطہ ہو جس کے محدود استدارائی  
محوروں کے حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لا، ما  
ہیں تو

و ف<sup>۲</sup> = لا<sup>۲</sup> + ما<sup>۲</sup> + ۲ لا ما جم سہ  
 نیز و ف<sup>۲</sup> = لا<sup>۲</sup> + ما<sup>۲</sup> + ۲ لا ما جم سہ  
 پس لا<sup>۲</sup> + ما<sup>۲</sup> + ۲ لا ما جم سہ بد لکر لا<sup>۲</sup> + ما<sup>۲</sup> + ۲ لا ما جم سہ ہو جاتا ہے۔ نیز بموجب فرض

لا<sup>۲</sup> + ۲ لا ما + ب ما بد لکر لا<sup>۲</sup> + ۲ لا ما + ب ما  
 ہوتا ہے۔ اس لیے اگر لہ کوئی مستقل عدد ہو تو

لا<sup>۲</sup> + ۲ لا ما + ب ما لہ (لا<sup>۲</sup> + ۲ لا ما جم سہ + ما)  
 بد لکر لا<sup>۲</sup> + ۲ لا ما + ب ما لہ (لا<sup>۲</sup> + ۲ لا ما جم سہ + ما)  
 ہو جائے گا۔ پس اگر لہ کو ایسا منتخب کیا جائے کہ ان میں سے ایک جملہ  
 کامل مربع ہو تو دوسرا بھی لہ کی اُسی قیمت کے لیے کامل مربع ہوگا۔  
 جملہ اول کامل مربع ہوگا اگر

$$(ل + لہ) (ب + لہ) - (لہ + لہ جم سہ) = ۰$$

اور جملہ دوم کامل مربع ہوگا اگر

$$(ل + لہ) (ب + لہ) - (لہ + لہ جم سہ) = ۰$$

لہ کو معلوم کرنے کے لیے درجہ دوم کی یہ جو دو مساواتیں ہیں  
 ان کی اصلیں وہی ہونی چاہئیں۔ ان کو اشکال

$$لہ جب ۲ سہ + (ل + ب - ۲ جم سہ) لہ + ب - ۲ سہ = ۰$$

اور لہ جب ۲ سہ + (ل + ب - ۲ جم سہ) لہ + ب - ۲ سہ = ۰

میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(۱) \dots \frac{ل + ب - ۲ جم سہ}{جب ۲ سہ} = \frac{ل + ب - ۲ سہ}{جب ۲ سہ}$$

$$(۲) \dots \frac{ل + ب - ۲ سہ}{جب ۲ سہ} = \frac{ل + ب - ۲ سہ}{جب ۲ سہ}$$

اگر محوروں کے یہ دو جٹ علی القوائم ہوں تو یہ مساواتیں حسب ذیل سادہ شکلیں اختیار کرتی ہیں:

$$1 + ب = ا + ب \quad 'ا - ب = ه - ا - ب - ه' \dots (۳)$$

۵۲۔ محوروں کے کسی تغیر سے مساوات کا درجہ نہیں بدلتا۔

دفعات ۴۹، ۵۰، اور ۵۱ سے ہم دیکھتے ہیں کہ محوروں کو خواہ کسی طرح تبدیل کیا جائے نئی مساوات لا اور ما کی بجائے شکل

$$ل + ا + م + ن \quad اور \quad ل + ا + م + ن$$

کے جملوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ جملے پہلے درجہ کے ہیں اور اس لیے ابتدائی مساوات میں لا اور ما کی بجائے یہ جملے درج کئے جائیں تو مساوات کے درجہ میں کوئی اضافہ نہیں ہوگا۔ اسی طرح مساوات کا درجہ گھٹ نہیں سکتا کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو نئی مساوات سے پرانی مساوات پر عود کرنے سے درجہ میں اضافہ ہونا چاہئے۔

مثال ۱۔ قائم محوروں کے حقیقی استحالہ سے ثابت کرو کہ اگر  $لا + ۲$

$$۲ لا + ما + ب = ما + بد لکر لا + ۲ لا + ما + ب = ما + ب = ۲ + ب$$

اور

$$ه - ا - ب = ه - ا - ب$$

مثال ۲۔ محوروں کے ایک جٹ سے دوسرے جٹ میں متحیل

کرنے کے لیے ضابطہ

$$لا = م + لا + ن + ما \quad ما = م + لا + ن + ما$$

ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{م + م}{ن + ن} = \frac{م + م - ۱}{ن + ن - ۱}$$

جبکہ دونوں جٹوں میں مبداء وہی ہو۔

[ $لا + ما + ۲ لا + ما + ب = بد لکر لا + ۲ لا + ما + ب = لا + ما + ب = ۲ + ب$ ۔ اسیلے

لا اور ما کی بجائے دئے ہوئے جملے درج کرو اور لا<sup>۲</sup> اور ما<sup>۲</sup> کے سروں کو اکائی کے مساوی رکھو اور پھر حجم سہ کو ساقط کرو۔

مثال ۳۔ ان طریقوں (Loc) کی مساواتیں معلوم کرو جو

$$(لا + ب + ج) = (لا + ب)$$

$$اور (لا + ب + ج) = (ب - لا - ا + د) = (ا + ب)$$

سے تعبیر ہوتے ہیں جبکہ عمودی خطوں لا + ب + ج = اور ب - لا - ا + د = کو علی الترتیب لا اور ما کے محوروں کے طور پر لیا گیا ہو۔

جواب: ما<sup>۲</sup> - (لا + ب) = ۰

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ مساواتوں

$$لا + ب + ج = ۰ اور (لا + ب + ج) - ۳(ب - لا - ا + د) = ۰$$

سے تعبیر شدہ خطوط ایک متساوی الاضلاع مثلث کے ضلع بناتے ہیں۔  
[محوروں کو خطوں لا + ب + ج = ۰ اور ب - لا - ا + د = ۰ پر تبدیل کر دو تو یہ مساواتیں

$$ما + ج = (ا + ب) = ۰ اور ما - ۳(ب - لا - ا + د) = ۰$$

ہو جائیں گی اور نتیجہ واضح ہے۔]

## غیر موافقی یا چلیسی نسبتیں

۵۴\*۔ ایک خط مستقیم پر نقطوں کے کسی جٹ کو سوت کہتے ہیں،

اور ایک نقطہ میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کے کسی جٹ کو پینسل کہتے ہیں، اور اس کے ہر خط کو شعاع یا کرن کہتے ہیں۔

اگر ایک خط مستقیم پر ف، ق، س، چار نقطہ ہوں تو نسبت

$$\frac{ف ق}{ق س} : \frac{ف س}{س ر} \text{ یا } \frac{ف ق}{ق س} : \frac{ف س}{س ر}$$

کو سعت ف، ق، ر، س کی غیر موسیقی نسبت یا چلیبی نسبت  
 کہا جاتا ہے اور اس کو {ف، ق، ر، س} سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ -  
 اگر ایک سعت کی چلیبی نسبت - اکے مساوی ہو تو اس کو موسیقی  
 کہتے ہیں۔ -

یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر {ف، ق، ر، س} = - اتو  
 ف، ق، ر، س = (ف، ر - ف، ق) : (ف، س - ف، ر)  
 اس لیے ف، ق، ر، س سلسلہ موسیقی میں ہیں۔  
 اگر ف، ق، ر، س موسیقی سعت ہو تو ق، ر، س کو ف، ر  
 کے لحاظ سے موسیقی طور پر مزدوں کہا جاتا ہے۔

۵۵۔ اگر چار خطوط مستقیم و ف، ق، ر، س کسی  
 خط مستقیم سے علی الترتیب نقاط ف، ق، ر، س پر قطع ہوں  
 تو سعت ف، ق، ر، س کی چلیبی نسبت مستقل ہوتی ہے۔  
 فرض کرو کہ دے ہوئے خطوں کی مساواتیں

$$ا = م، لا = م، لا = م، لا = م، لا = م، لا = م$$

ہیں۔  
 فرض کرو کہ قاطع خط ف، ق، ر، س مساوات  $ا = م، لا = م$  سے  
 تعبیر ہوتا ہے۔ تب اگر محور لا پر ف، ق، ر، س کے ظل  $ا، ب، ج، د$   
 ہوں تو مبداء سے ان ظلوں کے فاصلے علی الترتیب

$$\frac{ک}{م-ا}، \frac{ک}{م-ب}، \frac{ک}{م-ج}، \frac{ک}{م-د}$$





ہیں۔ پس مطلوبہ پیمائشی نسبت

$$\frac{م}{م} = \frac{۵۰ م \times ۵۰}{۵۰ م \times ۵۰}$$

ہے۔

ظاہر ہے کہ خطوط

لا = ۰، ما = م لا = ۰، ما = م لا = ۰۔

سے یہ موسیقی پتلا بنتی ہے

اگر محاور ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو خطوط ما = م لا = ۰، اور ما = م لا = ۰۔ دو محوروں میں سے کسی ایک سے مساوی زاوے بناتے ہیں۔

پس اگر کوئی پنسل موسیقی ہو اور دو متبادل کریں ایک دوسری کے علی القوائم ہوں تو یہ کریں دوسری دو کرنوں کے اندرونی اور بیرونی زاویوں کی تصنیف کریں گی۔

۵۔ ذواربعۃ الاضلاع کے تین وتروں میں سے ہر وتر دوسرے دو وتروں سے موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ خطوط مستقیم ق ا ب، ق د ج، ف د ا اور ف ج ب، ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع ہیں۔ وہ خط جو ان میں دو خطوں کے نقطہ تقاطع کو دوسرے دو خطوں کے نقطہ تقاطع سے ملاتا ہے ذواربعۃ الاضلاع کا ایک وتر ہے۔ اس لیے تین وتر ہوتے ہیں یعنی ف ا ق، ا ج ب، ب د (شکل دیکھو)

ج ب اور ب ا کو علی الترتیب محاور لا اور ما فرض کرو۔ فرض کرو کہ نقطوں ج، ف، ا، ق کے محدود علی الترتیب

(لا، ۰)، (لا، ۰)، (۰، ما)، (۰، ما) اور (۰، ما) ہیں۔

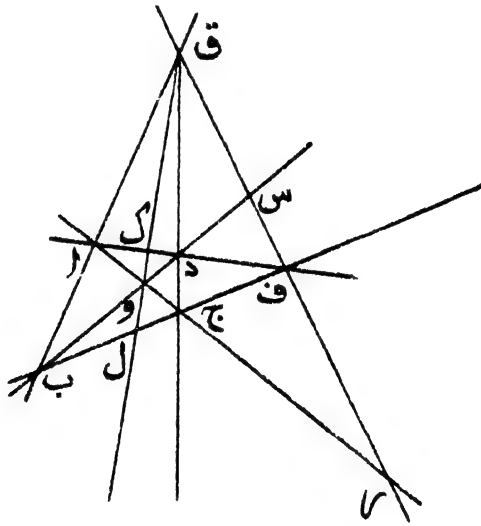
اب ج (۰، ما) اور ف (۰، ما) کی مساواتیں

$$۰ = ۱ - \frac{۱}{\text{ما}} + \frac{\text{لا}}{\text{لا}}، ۰ = ۱ - \frac{۱}{\text{ما}} + \frac{\text{لا}}{\text{لا}}$$

ہیں۔ اس لیے ب س کی مساوات

$$۰ = \left( \frac{۱}{\text{لا}} - \frac{۱}{\text{ما}} \right) \text{ما} + \left( \frac{۱}{\text{لا}} - \frac{۱}{\text{لا}} \right) \text{لا}$$

ہے۔



ا ف اور ج ق کی مساواتیں

$$۰ = ۱ - \frac{۱}{\text{ما}} + \frac{\text{لا}}{\text{لا}}، ۰ = ۱ - \frac{۱}{\text{ما}} + \frac{\text{لا}}{\text{لا}}$$

ہیں۔ اس لیے ب د کی مساوات

$$۰ = \left( \frac{۱}{\text{لا}} - \frac{۱}{\text{ما}} \right) \text{ما} - \left( \frac{۱}{\text{لا}} - \frac{۱}{\text{لا}} \right) \text{لا}$$

ہے۔

دفعہ ۵۶ سے یہ متنبہ ہوتا ہے کہ پینل ب (ب، د، ب ج، ب  
ب سر موسیقی پینل ہے اور اس لیے سعتیں ۱، ۲، ۳ اور ۴،  
س، ۴، ۵ سر موسیقی ہیں۔

۵۸۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ خطوط مستقیم ۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا = ۱۰۰ اور  
۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا = ۱۰۰۔ موسیقی طور پر مزدوج ہوں۔  
فرض کرو کہ خطوں کے زوج

$$۱ لا = ۱۰۰، ۲ لا = ۱۰۰$$

$$۳ لا = ۱۰۰، ۴ لا = ۱۰۰$$

اور ہیں۔ اب اگر ۱ لا = ۱۰۰، ۲ لا = ۱۰۰، ۳ لا = ۱۰۰، ۴ لا = ۱۰۰ سے موسیقی  
پینل بنے تو حاصل ہونا چاہیے (دفعہ ۵۵)

$$۱ - = \frac{(۱۰۰ - ۱۰۰)(۱۰۰ - ۱۰۰)}{(۱۰۰ - ۱۰۰)(۱۰۰ - ۱۰۰)}$$

$$۱۰۰ ۱۰۰ ۱۰۰ ۱۰۰ = (۱۰۰ + ۱۰۰)(۱۰۰ + ۱۰۰)$$

لیکن دی ہوئی مساواتوں سے

$$۱۰۰ + ۱۰۰ = ۱۰۰ - \frac{۱۰۰}{۱۰۰}، ۱۰۰ = \frac{۱۰۰}{۱۰۰}$$

$$۱۰۰ + ۱۰۰ = ۱۰۰ - \frac{۱۰۰}{۱۰۰}، ۱۰۰ = \frac{۱۰۰}{۱۰۰}$$

پس مطلوبہ شرط

$$۱۰۰ + ۱۰۰ = ۱۰۰ - \frac{۱۰۰}{۱۰۰}$$

ہے۔

۵۹۔ اسی طریقہ پر ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ نقطوں کے وہ زوج جو  
مساواتوں

۱ لا + ۲ لا + ب = ۰ اور ۱ لا + ۲ لا + ما + ب = ۰  
 سے حاصل ہوتے ہیں موسیقی طور پر مزدوج ہوں گے اگر  
 ۱ ب + ۲ ب = ۰

## دریچ

۶۰۔ تعریف - فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے خط مستقیم پر

و ایک ثابت نقطہ ہے اور اسی خط پر نقطوں کے جوڑے 'ف' 'ق' 'ق' 'ق'؛ 'س'؛ 'س'؛ وغیرہ ایسے ہیں کہ

و ف × و ق = و ق × و ق = و س × و س = ... = متقل = ک  
 تب ہم کہتے ہیں کہ یہ نقطے دریچ میں ایک نظام بناتے ہیں اور نقطہ و اس  
 نظام کا مرکز ہے۔ 'ف' 'ق' جیسے دو نقطے ایک دوسرے کے مزدوج  
 کہلاتے ہیں۔ مرکز کا مزدوج نقطہ لامتناہی فاصلہ پر ہوتا ہے۔

اگر ہر نقطہ مرکز کے اسی جانب ہو جس جانب اس کا مزدوج ہے  
 تو دو نقطے 'ک' 'گ' مرکز کے مخالف جانبوں پر ایسے موجود ہوں گے  
 کہ و ک = ۱ = و گ = ۰ و ف × و ق = ۱ ان نقطوں 'ک' 'گ' کو دوسرے  
 نقطے یا ماسکے کہا جاتا ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ جب یہ دو ماسکے دیے گئے ہوں تو دریچ پوری طرح  
 متعین ہو جاتا ہے۔

مزدوج نقطوں کے مزدوج معلوم ہوں تو بھی دریچ پوری طرح  
 متعین ہوتا ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ ان نقطوں 'ا' 'آ' اور 'ب' 'ب' (فرض کرو)  
 کے فاصلے کسی نقطہ سے جو اس خط مستقیم میں ہے جس میں دیے ہوئے

نقطے واقع ہیں 'ا' اور 'ب' ہیں۔ فرض کرو کہ درپیش کے مرکز کا فاصلہ اُسی نقطہ سے لا ہے۔ تب حسب ذیل رشتہ حاصل ہوتا ہے:

$$(ا-ا)(لا-لا) = (ب-ب)(لا-لا)$$

$$(ا+ا-ا-ب-ب)(لا-لا) = (ا-ا-ب-ب)(لا-لا)$$

پس مرکز کا صرف ایک محل ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اگر  $ا+ا = ب+ب$  یعنی اگر 'ا' اور 'ب' کا نقطہ وسطی ایک ہی ہو تو ان چار نقطوں سے جو درپیش متعین ہوگا اُس کا مرکز لاتنا ہی یہ ہوگا اور اس کے بالعکس۔

اس طرح اگر نقطوں کے کوئی زوج 'ا'، 'ب'؛ 'ج'، 'ب'؛ 'ج'، 'ج' وغیرہ ایسے ہوں کہ 'ا'، 'ب'؛ 'ج'، 'ج' وغیرہ کے نقاط وسطی منطبق ہوتے ہوں تو ان نقطوں سے درپیش کا وہ نظام حاصل ہوگا جس کا مرکز لاتنا ہی یہ ہوگا۔

مرکز کے محل کو ہندسی طریقہ پر اسی طرح معلوم کیا جاسکتا ہے کہ مزدوج نقطوں کے دو جوڑوں میں سے ایک ایک کو لے کر اس کے نقطوں میں سے گزرتا ہوا ایک دائرہ کھینچا جائے تو داخلہ میں مقالہ ۳ مسئلہ ۳ ان دائروں کا مشترک وتر اُس خط کو جس پر مزدوج نقطے واقع ہیں مطلوبہ مرکز میں قطع کرے گا۔

۶۱۔ اگر متعدد نقطے درپیش میں ہوں تو ان میں سے

کسی چار نقطوں کی چلیپی نسبت ان کے چار مزدوجوں کی چلیپی نسبت کے مساوی ہوگی۔

فرض کرو کہ کوئی چار نقطے 'ف'، 'ق'، 'ر'، 'س' ہیں اور مرکز سے ان نقطوں کا فاصلہ علی الترتیب 'ف'، 'ق'، 'ر'، 'س' ہیں اس لیے ان کے مزدوجوں کے

$$\text{فاصلے } \frac{ک}{ق}، \frac{ک}{ر}، \frac{ک}{س} \text{ ہوں گے۔ تب}$$

$$\left\{ \frac{ف-ق}{ق-س} \right\} = \left\{ \frac{ق-ر}{ر-س} \right\}$$

اور

$$\frac{\left(\frac{ک}{ق} - \frac{ک}{س}\right) \left(\frac{ک}{ق} - \frac{ک}{ر}\right)}{\left(\frac{ک}{ق} - \frac{ک}{س}\right) \left(\frac{ک}{ق} - \frac{ک}{ر}\right)} = \frac{(ف - ق)(ر - س)}{(ف - ق)(ر - س)}$$

پس  $\{ف ق ر س\} = \{ف ق ر س\}$   
 اس سے ہم اس امر کا امتحان کر سکتے ہیں کہ آیا کوئی چھ نقطے درپیش  
 میں ہیں یا نہیں۔ کیونکہ ۱، ۲ اور ۳ ب سے حاصل شدہ درپیش میں  
 'ف' مزدوج نقطے ہونگے اگر

$$\{اب ا ف\} = \{اب ا ف\}$$

\*۲۔ درپیش کے کوئی دو مزدوج نقطے اور اس کے دواکے  
 ایک موسیقی سعت بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ درپیش کے دواکے 'گ' ہیں اور مرکز وہ ہے۔  
 فرض کرو کہ 'و = ج = وک'۔  
 تب و سے نقطوں 'گ' کے فاصلے مساوات  
 لا - ج = ۲ = ۰

کی اصلیں ہیں۔  
 نیز و سے مزدوج نقطوں کے کسی زوج کے فاصلے مساوات  
 لا + ۲ لا + ج = ۰

کی اصلیں ہیں۔  
 پس سکہ دفعہ ۵۸ سے فوراً ماخوذ ہوتا ہے۔

\*۳۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ مساواتوں

$$۱ لا + ۲ لا + ب = ۰، ۱ لا + ۲ لا + ب = ۰،$$

$$۱^۱ ل + ۲^۲ ل + ۳^۳ ب = ۰$$

سے حاصل شدہ نقطوں کے تین زون درپچ میں ہوں۔

ان فاصلوں کا حاصل ضرب جو ہر زون کے دو نقطے کسی نقطہ  $لا = د$  سے رکتے ہیں ایک ہی ہونا چاہئے، فرض کرو کہ وہ  $ل$  کے مساوی ہے۔

مساوات

(۷۱)

$$۱^۱ (لا - د) + ۲^۲ (لا - د) + ۳^۳ (د - لا) = ۰$$

کی اصلوں کا حاصل ضرب

$$(۱^۱ د - ۲^۲ ل + ۳^۳ ب)$$

ہے۔ پس  $ل$  کی کسی قیمت کے لیے حاصل ہونا چاہئے

$$۱^۱ (د - ل) - ۲^۲ ل + ۳^۳ ب = ۰$$

$$۱^۱ (د - ل) - ۲^۲ ل + ۳^۳ ب = ۰$$

$$۱^۱ (د - ل) - ۲^۲ ل + ۳^۳ ب = ۰$$

اور  $د - ل$  اور  $د$  کو سا قفا کرنے سے مطلوبہ شرط

$$۰ = \begin{vmatrix} ۱^۱ & ۲^۲ & ۳^۳ \\ ۱^۱ & ۲^۲ & ۳^۳ \\ ۱^۱ & ۲^۲ & ۳^۳ \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۶۴۔ دفعہ ماسبق سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ایک خط مستقیم پر چھ نقطوں کو جو درپچ میں ہوں کسی نقطہ سے ملایا جائے تو اس طریقہ سے جو پنسل بنے گی وہ کسی دوسرے خط مستقیم سے ایسے چھ نقطوں میں منقطع ہوگی جو درپچ میں ہوں گے۔

سب سے اول یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر چھ خطوں کی کوئی پنسل کسی خط مستقیم  $ف$  سے نقطوں کے ایسے تین زونوں میں قطع ہو جو درپچ میں



ہوں تو یہ پسل فب ق کے متوازی کسی خط سے درپچ میں قطع ہوگی۔

اب فرض کرو کہ خطوط مستقیم کے تین زون

۱ م ۲ م ۳ م لا م ا م ب م م ۰ وغیرہ

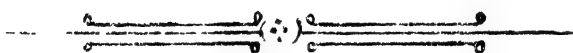
ہیں جہاں محور لا اُس خط کے متوازی ہے جو خطوں کو نقطوں کے ایسے زوجوں میں قطع کرتا ہے جو درپچ میں ہیں، اور محور م کسی دوسرے خط مستقیم کے متوازی ہے جو کوئی بھی ہو سکتا ہے۔

تب ہم جانتے ہیں کہ م ۱، خطوں کو درپچ میں قطع کریگا اور ایسے

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

لیکن یہ وہ شرط بھی ہے کہ لا ۱، خطوں کو نقطوں کے ایسے

تین زوجوں میں قطع کرے جو درپچ میں ہوں۔

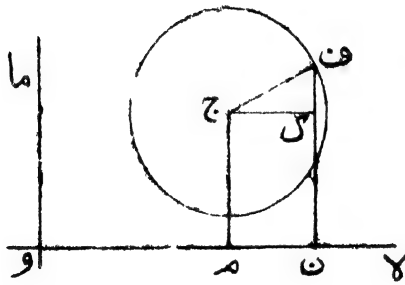


## چوتھا باب

## دائرہ

(۴۲)

۶۵۔ قائم محوروں کے حوالے سے دائرہ کی مساوات معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز ج ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ ف ہے۔  
 فرض کرو کہ ج کے محدد (د'ع) اور ف کے محدد (لا'ما) ہیں۔ فرض کرو کہ  
 دائرہ کا نصف قطر ہے۔ ج م اور ف ن کو و ما کے متوازی اور  
 ج ک کو و لا کے متوازی کھینچو (حسب شکل)۔ تب  

$$ج ک' + ک ف' = ج ف'$$

$$ج ک = لا - د'ک$$

$$ف ن = ما - و$$
 لیکن

$$\therefore (لا - د) + (ما - ع) = ا^2 \dots\dots\dots (۱)$$

مطلوبہ مساوات ہے۔

اگر دائرہ کا مرکز مبدا ہو تو د اور ع دونوں صفر ہوں گے اور دائرہ کی

(۳)

مساوات

$$لا + ما = ا^2 \dots\dots\dots (۲)$$

ہوگی۔

مساوات (۱) لکھی جاسکتی ہے

$$لا + ما - ۲ د - ۲ ع + د + ع - ا^2 = ۰$$

اس لیے کسی دائرہ کی مساوات شکل

$$لا + ما + ۲ گ + ۲ ف + د + ع - ا^2 = ۰ \dots\dots\dots (۳)$$

کی ہوتی ہے جہاں گ، ف، د، ع مستقلات ہیں۔

اس کے بالعکس مساوات (۳) ایک دائرہ کی مساوات ہوگی۔ کیونکہ اس کو لکھا جاسکتا ہے

$$(لا + گ) + (ما + ف) = ا^2 - گ - ف - ج$$

اور اس مساوات سے ظاہر ہے کہ اس کے طریق پر کسی نقطہ سے نقطہ

(-گ، -ف) کا فاصلہ مستقل ہے اور یہ فاصلہ  $\sqrt{ا^2 - گ - ف - ج}$  کے مساوی

ہے۔ پس مساوات (۳) ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہے جس کا نصف قطر

$$\sqrt{ا^2 - گ - ف - ج}$$

ہے اور مرکز نقطہ (-گ، -ف) پر ہے۔

اگر  $ا^2 - گ - ف - ج = ۰$  تو دائرہ کا نصف قطر صفر ہے اور دائرہ کو

ایسی صورت میں نقطہ دائرہ کہتے ہیں۔

اگر  $۲ + ۲ = ۴$  منفی ہو تو لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں مساوات کو پورا نہیں کر سکی، ایسی صورت میں دائرہ کو خیالی دائرہ کہتے ہیں۔ مندرجہ بالا بیان سے یہ واضح ہے کہ دوسرے درجہ کی کوئی مساوات ایک دائرہ کو تعبیر کرے گی بشرطیکہ (۱) لا اور ما کے سر مساوی ہوں اور (۲) کوئی رقم ایسی نہ ہو جس میں لا ما آئے۔

۶۶۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک دائرہ کی عام مساوات  
 $لا + ما + ۲ = ۲ + لا + ۲ + ف + ج = ۰$

ہے۔ اس مساوات میں تین مستقلات ہیں۔ اگر ہم ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرنا چاہیں جو تین دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے یا کوئی اور شرطیں پوری کرے تو ہم اس کی مساوات کو مندرجہ بالا شکل کی مساوات فرض کریں گے اور دی ہوئی شرطوں کے ذریعہ زیر بحث دائرہ کے لیے مستقلات گ، ف، ج کی قیمتیں متعین کریں گے۔

مثال ۱۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو تین نقطوں (۰، ۱)، (۱، ۰) اور (۱، ۲) میں سے گزرتا ہے۔

[فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا + ما + ۲ = ۲ + لا + ۲ + ف + ج = ۰$$

ہے۔ اب چونکہ نقطہ (۱، ۰) دائرہ پر ہے اس لیے لا = ۰ اور ما = ۱ رکھنے سے مساوات پوری ہونی چاہئے

$$۰ + ۱ + ۲ = ۲ + ۰ + ۲ + ف + ج = ۰$$

نیز (۰، ۱) دائرہ پر ہے اس لیے

$$۰ + ۰ + ۲ = ۲ + ۰ + ۲ + ف + ج = ۰$$

اور (۱، ۲) دائرہ پر ہے اس لیے

$$۰ + ۱ + ۲ = ۲ + ۱ + ۲ + ف + ج = ۰$$

پس گ = ف = -۱ اور ج = ۱

اس لیے مطلوبہ مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ - لا۲ - لا۲ + ما۲ = ۰$$

ہے۔

مثال ۲۔ اگر ایک دائرہ کے ایک قطر کے سروں 'ا' ب کے محدود (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، لا)، (لا، لا) ہوں تو دائرہ کی مساوات (لا، لا) + (ما، ما) (ما، لا) = ۰ ہوگی۔

[وہ خط جو دائرہ پر کے کسی نقطہ ف (لا، ما) کو اسے ملاتا ہے محور لا کے ساتھ زاویہ مس<sup>۱</sup>  $\frac{ما - لا}{لا}$  بناتا ہے، اور وہ خط جو ف کو ب سے

ملاتا ہے محور لا کے ساتھ زاویہ مس<sup>۱</sup>  $\frac{ما - لا}{لا}$  بناتا ہے۔ اب چونکہ خطوط ف ا اور ف ب علی القوالم ہیں اس لیے

$$۰ = \frac{ما - لا}{لا} \times \frac{ما - لا}{لا} + ۱$$

$$۰ = (لا - لا)(لا - لا) + (ما - ما)(ما - لا)$$

مثال ۳۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا مرکز (۴، -۳) ہے اور نصف قطر ۵ ہے۔

مثال ۴۔ اس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو جس کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ - لا۲ + لا۲ - ما۲ = ۱۱$$

جواب: مرکز (۱، ۲) نصف قطر ۴ ہے۔

مثال ۵۔ اس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو جس کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ - لا۲ + لا۲ - ما۲ = ۱۶$$

جواب: مرکز  $(\frac{۲}{۵}, \frac{۲}{۵})$  نصف قطر ۲ ہے۔

مثال ۶۔ نقطوں (۱، ۳)، (۲، ۱)، اور (۱، ۱) میں سے گزرنیوالے

دائرہ کی مساوات معلوم کریو۔ جواب:  $5\lambda + 5\mu - 11\lambda - 9\mu - 12 = 0$

مثال ۷۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقطوں  $(-1, 0)$ ،  $(0, 1)$  اور  $(1, 1)$  میں سے گزرتا ہے۔ (۵)

جواب:  $5\lambda + 5\mu - 11\lambda - 9\mu - 12 = 0$

مثال ۸۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقطوں  $(1, 0)$ ،  $(0, 1)$  اور  $(1, 1)$  میں سے گزرتا ہے۔

جواب:  $5\lambda + 5\mu - 11\lambda - 9\mu - 12 = 0$

۶۔ دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جبکہ محاور زاویہ سے پر مائل ہوں۔

نقطہ  $(د, ع)$  سے نقطہ  $(لا, ما)$  کے فاصلہ کا مربع

$(لا-د)^2 + (ما-ع)^2 = 2(لا-د)(ما-ع) + 2(د+ع)(لا+ما)$  ہوگا۔ اس لیے اس دائرہ کی مساوات جس کا مرکز نقطہ  $(د, ع)$  پر اور جس کا نصف قطر ۱ ہو

$(لا-د)^2 + (ما-ع)^2 = 2(لا-د)(ما-ع) + 2(د+ع)(لا+ما)$  (۱)

یا  $لا+ما+2(لا-د)(ما-ع) = 2(د+ع)(لا+ما)$  (۲)

$2(د+ع)(لا+ما) = 2(لا-د)(ما-ع) + 2(د+ع)(لا+ما)$  (۲)

ہوگی۔

پس کسی دائرہ کی مساوات بحوالہ مائل محاور شکل

$لا+ما+2(لا-د)(ما-ع) = 2(د+ع)(لا+ما)$  (۳)

کی ہوگی جہاں گ، ف کسی مخصوص دائرہ کے لحاظ سے مستقلات ہیں لیکن مختلف دائروں کے لیے مختلف ہیں۔

مساوات (۳) درست رہے گی اگر ہم اس کی طرفین کو کسی مستقل عدد سے ضرب دیں، تب اس کی شکل ہو جائے گی:

$لا+ما+2(لا-د)(ما-ع) = 2(د+ع)(لا+ما)$  (۴)

پس ایک دائرہ کی مساوات بحوالہ مائل محاور دوسرے درجہ کی

ہوتی ہے اور (۱) لا اور ما کے سر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں اور (۲) لا ما اور لا کے سروں کی نسبت ۲ جم سہ ہوتی ہے جہاں سہ محوروں کا درمیانی زاویہ ہے۔

ہم اس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کر سکتے ہیں جس کی مساوات لا + ما + ۲ لا ما جم سہ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ہے۔ کیونکہ مساوات مساوات (لا - د) + (ما - ع) + ۲ (لا - د) (ما - ع) جم سہ = لا = کے مماثل ہوگی اگر د + ع جم سہ = گ + ع + د جم سہ = ف اور د + ع + ۲ د ع جم سہ = لا = ج۔ اس لیے جب سہ = گ + ع جم سہ = گ جم سہ = ف اور لا جب سہ = ف + گ ۲ ف گ جم سہ = ج جب سہ =

۶۸۔ تعریف۔ فرض کرو کہ کسی منحنی پر ف اور ق دو نقطے لے (۴۶)

گئے ہیں اور فرض کرو کہ نقطہ ق منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ف سے قریب اور قریب تر آتا ہے، تب خط ف ق کے انتہائی محل کو جبکہ ق حرکت کر کے ف تک آئے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جائے منحنی کا مماس نقطہ ف کہتے ہیں۔

وہ خط جو ف میں سے گذر کر مماس پر عمود ہو نقطہ ف پر منحنی کا مماس کہلاتا ہے۔

۶۹۔ دائرہ لا + ما = لا کے کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات

معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دائرہ پر کے کسی دو نقطوں کے محدد لا، ما اور لا، ما ہیں۔

نقطہ (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے گذر نیوالے قاطع کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{ما - ما}{ما - ما} \dots\dots\dots (۱)$$

ہے۔ لیکن چونکہ یہ دو نقطے دائرہ پر ہیں اس لیے

$$لا^۲ + ما^۲ = لا^۲ اور لا^۲ + ما^۲ = لا^۲$$

$$اس لیے \dots\dots\dots لا^۲ - لا^۲ = ما^۲ - ما^۲ \dots\dots\dots (۲)$$

مساواتوں (۱) اور (۲) کی متناظر طرفوں کو ضرب دینے سے

$$(۳) \dots\dots\dots (لا - لا)(لا + لا) = (ما - ما)(ما + ما) \dots\dots\dots (۳)$$

اب فرض کرو کہ نقطہ (لا، ما) نقطہ (لا، ما) تک حرکت کرتا ہے

اور بالآخر اس پر منطبق ہوتا ہے، تب انتہا میں وتر نقطہ (لا، ما) پر تماس

بنجاتا ہے۔ پس تماس کی مساوات (۳) میں لا = لا اور ما = ما لکھنے سے

حاصل ہوتی ہے چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$(لا - لا)(لا + لا) + (ما - ما)(ما + ما) = ۰$$

$$یا لا لا + ما ما = لا لا + ما ما = لا^۲$$

$$لا لا + ما ما = لا^۲$$

نقطہ (لا، ما) پر کے تماس کی مطلوبہ مساوات ہے۔

۴۔ اس دائرہ کے کسی نقطہ پر کے تماس کی مساوات معلوم

کرنا جس کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ = لا^۲ + ۲ف + ما + ج = ۰$$

ہے۔ دو نقطوں (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے گزرنے والے قاطع کی مساوات

(۴)

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{ما - ما}{ما - ما} \dots\dots\dots (۱)$$



ہے۔ چونکہ یہ دو نقطے دائرہ پر ہیں اس لیے

$$لا + ما + گ لا + ف ما + ج = .$$

$$لا + ما + گ لا + ف ما + ج = .$$

$$(لا - لا) (لا + لا) = (گ + گ) - (ما - ما) (ما + ما + ف) \dots (۲)$$

مساواتوں (۱) اور (۲) کی متناظر طرفوں کو ضرب دو تو قاطع کی

مساوات

$$(لا - لا) (لا + لا) = (گ + گ) - (ما - ما) (ما + ما + ف)$$

حاصل ہوگی۔

اس لیے (لا، ما) پر کے مماس کی مساوات

$$(لا - لا) (لا + لا) + (گ + گ) + (ما - ما) (ما + ما + ف) = .$$

یا

$$لا + ما + گ لا + ف ما = لا + ما + گ لا + ف ما$$

ہے۔

طرفین میں گ لا + ف ما + ج جمع کرو تو چونکہ (لا، ما) دائرہ پر ہے اس لیے مماس کی مساوات ہو جاتی ہے

لا + ما + گ لا + ف (لا + لا) + ف (ما + ما) + ج = .

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ نقطہ (لا، ما) پر کے مماس کی مساوات 'دائرہ کی مساوات سے لا کو لا لائیں، ما کو ما لائیں، ۲ لا کو لا لائیں، اور ۲ ما کو ما لائیں بدلنے سے معلوم کیجا سکتی ہے۔

مثال ۱۔ دائرہ لا + ما = ۲۵ کے نقطہ (۳، ۴) پر کے مماس کی مساوات ۳ + لا + ۴ + ما = ۲۵ ہے۔

مثال ۲۔ لا + ما = ۲۶ - لا - ۳ - ما = ۲ کے نقطہ (۲، ۲) پر کے مماس کی مساوات

$$۲۶ - لا - ۳ - ما = ۲ - (۲ - لا) - (۲ - ما) = .$$

یا

$$۲۶ - لا - ۳ - ما = ۲ - ۲ + لا + ۲ - ۲ + ما = ۱۰ + لا + ما$$

ہے۔

مثال ۳۔  $لا + ما = ۱۶۹$  کے نقطوں (۱۲، ۵) (۵، ۱۲) پر کے  
ماسوں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ ماس نقطہ (۴، ۴) پر علی القوم  
مستطاع ہوتے ہیں۔

مثال ۴۔  $لا + ما - لا - لا = ۴ + ۴ = ۰$  کے نقطوں (۲، ۲)  
اور (۲، ۲) پر کے ماس معلوم کرو۔ جواب:  $لا = ۴$  اور  $ما = ۴$

۱۷۔ ایک دائرہ کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا۔ (۷۸)

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا + ما = ۲$$

ہے۔ اگر اس پر (لا، ما) کوئی نقطہ ہے تو اس نقطہ پر ماس کی مساوات  
 $لا + ما = ۲$  ..... (۱)

ہے۔

اس خاص کی مساوات جو (لا، ما) میں سے گزر کر (۱) پر عمود موجب  
دفعہ ۳۔

$$(لا - لا) (لا - ما) - (ما - ما) (لا - لا) = ۰$$

$$یا لا - ما - ما - لا = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔ یہ نقطہ (لا، ما) پر عماد کی مطلوبہ مساوات ہے۔

مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ دائرہ کے کسی نقطہ پر کا عماد  
مبدأ میں سے گزرتا ہے یعنی دائرہ کے مرکز میں سے۔

۱۸۔ ایک دیے ہوئے خط مستقیم اور دائرہ کے نقاط تقاطع  
معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا + ما = ۲ \dots \dots \dots (۱)$$

اور خط مستقیم کی مساوات

$$ما = م + لا + ج \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔ ان نقطوں پر جو خط مستقیم اور دائرہ میں مشترک ہیں یہ دونوں رشتے پورے ہوتے ہیں۔ خط پر کے نقطے مساوات  $ما = (م + لا + ج)$  کو پورا کرتے ہیں اور دائرہ پر کے نقطے مساوات  $ما = لا$  کو پورا کرتے ہیں۔ اس لیے مشترک نقطوں کے لیے مساوات حاصل ہوتی ہے

$$(م + لا + ج) = لا$$

$$لا (۱ + م) + ۲ م ج + لا + ج = لا \dots \dots \dots (۳)$$

یہ ایک دو درجی مساوات ہے اور ہر دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں حقیقی اور مختلف، یا حقیقی اور مساوی، یا خیالی۔

پس لا کی دو قیمتیں ہیں اور ان کے جواب میں ما کی دو قیمتیں (۲) سے معلوم ہوتی ہیں۔ اس طرح پر خط مستقیم ایک دائرہ سے دو نقطوں پر ملتا ہے حقیقی اور مختلف، یا دو منطبق، یا دو خیالی نقطوں پر۔ خیالی نقطے وہ ہیں جنکے محدودوں میں سے ایک یا دونوں خیالی ہوں۔

خط مستقیم اور دائرہ کے خیالی نقاط تقاطع کو ہندسی طور پر تعبیر کرنا ناممکن ہے، لیکن ہم دیکھیں گے کہ خیالی نقطے اور خطوط اکثر اہم مفہوم کے حامل ہوتے ہیں اور ان پر غور کرنا ضروری ہے تاکہ ہم اپنے مسئلوں کو عام سے عام شکلوں میں بیان کر سکیں۔

مساوات (۳) کی اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہو گئی اگر

$$(۱ + م) (ج - لا) = م ج$$

$$ج = لا (۱ + م) \dots \dots \dots (۴)$$

یعنی اگر لا کی دو قیمتیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو ما کی دو قیمتیں بھی (۲) کی رو سے ایک دوسرے کے مساوی ہوتی چاہئیں۔

اس لیے وہ دو نقطے جن پر دائرہ خط سے منقطع ہوتا ہے منطبق ہو گئے

$$اگر ج = لا \sqrt{۱ + م} -$$

پس خط  $ما = م + لا + ا$ ، دائرہ  $لا + ا = م$  کو م کی تمام قیمتوں کے لیے مس کرے گا۔

چونکہ جذر  $ما + م$  کو کوئی ایک علامت دیجا سکتی ہے اس لیے یہ مستبط ہوتا ہے کہ م کی ہر قیمت کے جواب میں دائرہ کے دو ماس ہوتے ہیں یعنی کسی دیے ہوئے خط کے متوازی دو ماس ہوتے ہیں۔  
مثال ۱۔ ثابت کرو کہ  $لا = ۷$  اور  $ما = ۸$ ، دائرہ

$$لا + ما - ۲ - لا - ۲ - ما - ۱۲ = ۰$$

کو مس کرتے ہیں۔ ماسوں کے نقاط ماس معلوم کرو۔ جواب: (۷، ۳) اور (۸، ۲)

مثال ۲۔ خط  $لا + م - ۲ - ۵ = ۰$  اور دائرہ  $لا + ما = ۲۵$  کے نقاط تقاطع معلوم کرو۔  
جواب: (۷، ۵) اور (۳، ۳)

مثال ۳۔ معلوم کرو کہ خط  $۳ + لا + م + ۴ = ۷$ ، دائرہ  $لا + ما - ۲ - لا - ۲ - ما - ۱۲ = ۰$

کو کہاں قطع کرتا ہے۔ جواب: خط نقطہ (۱، ۱) پر مس کرتا ہے۔

۳۔ ایک دائرہ کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے نقاط وسطی کا طریق معلوم کرنا۔ (۸۰)

دائرہ کے مرکز کو مبدا، اور محور لا کو وتروں کے متوازی لو۔  
فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا + ما = ۲، \dots \dots \dots (۱)$$

ہے اور فرض کرو کہ متوازی وتروں میں سے کسی ایک کی مساوات

$$ما - ج = ۰، \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔

(۱) اور (۲) کے نقاط تقاطع کے لیے

$$لا + ج = ۲$$

$$لا = \pm \sqrt{ا^2 - ج^2}$$

چونکہ لا کی یہ دو قیمتیں مساوی اور مختلف العلامت ہیں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وتر کے نقطہ وسطی کا فاصلہ صفر ہے یعنی وتر کا وسطی نقطہ ہمیشہ محور ما پر رہتا ہے۔ یہ ج کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔ اگر ج > ا تو لا کی دونوں قیمتیں خیالی ہیں لیکن ان کا مجموعہ تاہم صفر ہے اور اسلئے وتر کا وسطی نقطہ پھر بھی محور ما پر رہتا ہے۔

پس ایک دائرہ کے متوازی وتروں کے نقاط وسطی کا طریق مرکز میں گذرنے والا وہ خط مستقیم ہے جو وتروں پر عمود ہے۔ اس طریق کو اس خط کے اُس حصہ تک محدود فرض کرنے کی ضرورت نہیں ہے جو دائرہ کے اندر ہے۔

۴۔ دفعات ماسبق میں ہم نے دائرہ کے کوئی ہندسی خواص تسلیم نہیں کئے ہیں الا آنکہ اس کے کسی نقطہ سے مرکز کا فاصلہ مستقل رہتا ہے۔ اگر ہم ان مسئلوں کو مان لیں جو اقلیدس جلد ۳ میں ثابت کئے گئے ہیں تو دفعات ماسبق کے بعض نتیجے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ اُس دائرہ پر جس کی مساوات  $لا^2 + ما^2 = ا^2$  ہے کوئی نقطہ (لا، ما) ہے تو اُس خط کی مساوات جو (لا، ما) سے دائرہ کے مرکز تک

کھینچا گیا ہے  $\frac{لا}{ا} - \frac{ما}{ا} = 0$  ہے اور (لا، ما) میں سے گذرنے والے

عمودی خط کی مساوات (دفعہ ۳)

$$(لا - لا') + (ما - ما') = 0$$

$$لا - لا' + ما - ما' = 0$$

یا مرکز سے یہ خط اس نقطہ پر کا محاس ہے۔

پھر خط ما - م لا - ج = ۰، دائرہ لا^2 + ما^2 = ا^2 کو مس کرے گا اگر (۱)

خط کا عمودی فاصلہ دائرہ کے مرکز سے نصف قطر کے مساوی ہو اس لیے شرط

$$ج = \pm \sqrt{1 + م^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۵۔ کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے دو مماس کھینچے جاسکتے ہیں اور یہ دو مماس حقیقی ہوں گے اگر یہ نقطہ دائرہ کے باہر ہو، منطبق ہوں گے اگر نقطہ دائرہ پر ہو، اور خیالی ہوں گے اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہو۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا^2 + ما^2 = ر^2$$

ہے اور فرض کرو کہ کسی نقطہ کے محدد (ک، ھ) ہیں۔ فرض کرو کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہیں۔ تب (لا، ما) پر کے مماس کی مساوات

$$لا لا + ما ما = ر^2$$

ہوگی۔ یہ مماس نقطہ (ک، ھ) میں سے گزرے گا اگر

$$ھ لا + ک ما = ر^2 \quad (۱) \dots \dots \dots$$

لیکن (لا، ما) دائرہ پر ہے اس لیے

$$لا لا + ما ما = ر^2 \quad (۲) \dots \dots \dots$$

مساواتوں (۱) اور (۲) سے لا اور ما کی وہ قیمتیں معلوم ہوں گی جن پر کے مماس مخصوص نقطہ (ک، ھ) میں سے گزرتے ہیں۔ ما کی بجائے (۲) میں اندراج کرو تو

$$لا^2 = \frac{(لا - ھ)(لا + ھ)}{ک}$$

$$لا^2 (ھ + ک) - ۲ لا ھ (لا + ک) + لا^2 (ک - ھ) = ۰ \quad (۳) \dots \dots$$

مساوات (۳) سے فصلے حاصل ہوتے ہیں اور (۱) سے متناظر میں معلوم ہوتے ہیں۔ اب چونکہ مساوات (۳) ایک دو درجی مساوات ہے اس لیے دو نقطے ہیں جن پر کے ماس نقطہ (ھ، ک) میں سے گزرتے ہیں۔ مساوات (۳) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہونگی بوجب اسکے کہ

$$\Delta^2 - 4(\Delta - \Delta^2)(\Delta^2 + \Delta^2)$$

مفر سے بڑا، اس کے مساوی، یا اس سے کم ہو۔ یعنی بوجب اسکے کہ

مفر سے بڑا، اس کے مساوی، یا اس سے کم ہو۔ یعنی بوجب اس کے کہ نقطہ (ھ، ک) دائرہ کے باہر، دائرہ پر، یا دائرہ کے اندر ہو۔

## مثالیں

(۸۲)

۱۔ ان نقطوں کے محدود معلوم کرو جہاں خط  $2\Delta + 1 = 0$ ، دائرہ  $\Delta^2 + \Delta^2 = 0$  کو قطع کرتا ہے۔ جواب: (۱، -۱) اور  $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$

۲۔ ثابت کرو کہ خط  $2\Delta - 3 = 0$ ، دائرہ  $\Delta^2 + \Delta^2 = 0$  کو مس کرتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ دائرے  $\Delta^2 + \Delta^2 = 2$  اور  $\Delta^2 + \Delta^2 = 10$  ایک دوسرے کو نقطہ (۱، ۱) پر مس کرتے ہیں۔

۴۔ ثابت کرو کہ دائرہ  $\Delta^2 + \Delta^2 = 2$  اور  $\Delta^2 + \Delta^2 = 0$ ، محاور لا اور ما کو مس کرتا ہے۔

۵۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو خطوط  $\Delta = 0$ ،  $\Delta = 0$  اور  $\Delta = 0$  کو مس کرتا ہے۔ جواب:  $\Delta^2 + \Delta^2 = 2$  اور  $\Delta^2 + \Delta^2 = 0$

۶۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو خطوط  $\Delta = 0$ ،  $\Delta = 0$  اور  $\Delta = 0$  کو مس کرتا ہے۔





ہیں۔ فرض کرو کہ نقاط تماس کے محدود  $ہ$ ،  $ک$  اور  $ہ$ ،  $ک$  ہیں اور دائرہ کی مساوات  $لا + ما = لا' + ہ'$  ہے۔

(۸۳)

ماسوں کی مساواتیں حسب دفعہ ۶۹

$$لا + ہ + ماک - لا' = ہ' = ۰$$

$$لا + ہ + ماک - لا' = ہ' = ۰$$

ہونگی۔ لیکن چونکہ یہ دونوں ماس نقطہ  $(لا، ما)$  میں سے گذرتے ہیں اس لیے یہ دونوں مساواتیں محدودوں  $لا، ما$  سے پوری ہوتی ہیں، اسلئے

$$لا + ہ + ماک - لا' = ہ' = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

$$لا + ہ + ماک - لا' = ہ' = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) وہ شرطیں ہیں کہ نقاط  $(ہ، ک)$  اور  $(ہ، ک)$  اس خط مستقیم پر واقع ہوں جس کی مساوات

$$لا + لا + ما - ما' = ۰ \dots \dots \dots (۳)$$

ہے۔

پس (۳) اس خط مستقیم کی مطلوبہ مساوات ہے جو نقطہ  $(لا، ما)$  سے کھینچے ہوئے ماسوں کے نقاط تماس میں سے گذرتا ہے۔

اگر دائرہ کی مساوات  $لا + ما + گ + لا + ۲ + ف + ج = ۰$  ہو تو ہم اسی طریقہ پر (دفعہ ۷۰ کے نتیجہ کو مانکر) ثابت کر سکتے ہیں کہ اس خط کی مساوات جو نقطہ  $(لا، ما)$  سے کھینچے ہوئے ماسوں کے نقاط تماس میں گذرتا ہے

$$لا + لا + ما + ما + گ + (لا + لا) + ف + (ما + ما) + ج = ۰$$

ہے۔

اگر نقطہ  $(لا، ما)$  دائرہ کے باہر ہو تو اس سے کھینچے ہوئے دو ماس حقیقی ہوں گے اور اس لیے محدود  $ہ$ ،  $ک$  اور  $ہ$ ،  $ک$  حقیقی ہوں گے لیکن اگر نقطہ  $(لا، ما)$  دائرہ کے اندر ہو تو یہ دو ماس خیالی ہوں گے لیکن اس صورت میں بھی وہ خط جس کی مساوات (۳) ہے حقیقی خط ہوگا جبکہ  $لا$  اور  $ما$  حقیقی ہوں۔ اس طرح ایک حقیقی خط ہوتا ہے جو دائرہ کے اندر و بی نقطہ

کھینچے ہوئے دو خیالی ماسوں کے خیالی تقاطع تاس کو ملاتا ہے۔  
**تعریف۔** اگر کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے ماس کھینچے گئے ہوں  
 اور ان ماسوں (خیالی یا حقیقی) کے نقاط تاس کو ایک خط مستقیم کے ذریعہ  
 ملایا جائے تو اس خط مستقیم کو دائرہ کے لحاظ سے اس نقطہ کا قطبی کہتے ہیں۔  
 ایک خط مستقیم ایک دائرہ کو بن نقطوں (حقیقی یا خیالی) پر قطع کرتا ہے  
 ان نقطوں پر کھینچے ہوئے ماسوں کے نقطہ تقاطع کو دائرہ کے لحاظ سے  
 اس خط کا قطب کہتے ہیں۔

۷۔ فرض کرو کہ کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے دو ماس ت ف  
 ت ق ہیں۔ فرض کرو کہ ق، ف کی جانب حرکت کر کے بالآخر ف پر  
 آکر منطبق ہوتا ہے تو ت بھی حرکت کر کے بالآخر ف پر آکر منطبق ہوگا اور  
 ماس ت ف اور ت ق بالآخر ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے  
 اور وتر ف ق بھی منطبق ہوگا۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ ت کا قطبی جبکہ  
 ت دائرہ پر ہو اس نقطہ پر کے ماس پر منطبق ہوتا ہے۔



یہ دفعہ ۶ کے نتیجہ کے مطابق ہے۔ کیونکہ قطبی کی مساوات اُسی  
 شکل کی ہے جو ماس کی مساوات کی ہے اور اس لیے ایک نقطہ کا قطبی  
 جبکہ نقطہ دائرہ پر ہو اس نقطہ پر کا ماس ہوتا ہے

۸۔ اگر ایک نقطہ ف کا قطبی، ق میں سے گزرے تو  
 ق کا قطبی، ف میں سے گزرے گا۔

فرض کرو کہ ف کے محدد (لا، ما) ہیں اور ق کے (لا، ما)۔ فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات لا + ما = لا' = ما' ہے۔

(لا، ما) اور (لا، ما) کے قطبیوں کی مساواتیں علی الترتیب

$$\text{لا} + \text{لا} = \text{ما} - \text{ما} = ۰ \quad (۱)$$

$$\text{لا} + \text{ما} = \text{لا}' - \text{ما}' = ۰ \quad (۲)$$

ہیں۔ اگر ق، ف کے قطبی پر ہے تو اس کے محدد مساوات (۱) کو پورا کرنا چاہئیں اس لیے

$$\text{لا} + \text{لا} = \text{ما} - \text{ما} = ۰$$

لیکن یہ وہ شرط بھی ہے کہ ف، خط (۲) پر ہو یعنی ق کے قطبی پر اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

اگر ق، ایک ثابت خط مستقیم پر ہو اور ف اس خط کا قطب ہو تو ق کا قطبی، ف میں سے گزرنا چاہیے کیونکہ بموجب فرض ف کا قطبی ق میں سے گزرتا ہے۔

اس کے بالعکس اگر کسی ثابت نقطہ ف میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا جائے اور ق اس خط کا قطب ہو تو چونکہ ف، ق کے قطبی پر ہے اس لیے نقطہ ق ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہونا چاہیے یعنی ف کے قطبی پر۔

(۸۵) اگر دو نقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ مرا پر لیں تو مرا خط ف ق کا قطب ہوگا۔

چونکہ مرا، ف کے قطبی پر ہے اس لیے مرا کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے، اسی طرح وہ ق میں سے بھی گزرتا ہے اور اس لیے اس کو خط ف ق ہونا چاہیے۔

۷۹۔ دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی کیلئے ہندسی عمل۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ہے اور ف کوئی نقطہ ہے اور اس کے محدد لاء، مآ ہیں۔

دائرہ کے لحاظ سے ف کے قطبی کی مساوات

$$r^2 = \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \quad (1)$$

ہے۔

اس خط کی مساوات جو دائرہ کے مرکز و اور ف کو ملاتا ہے

$$\rho = \frac{r^2}{\rho \cos \theta} \quad (2)$$

ہے۔

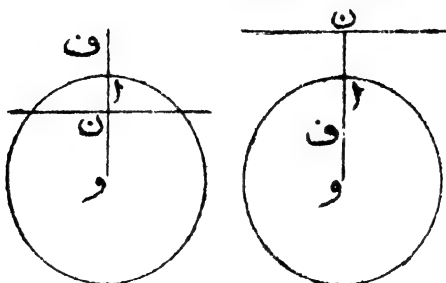
مساواتوں (۱) اور (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کا قطبی اس خط پر عمود ہوتا ہے جو اس نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملاتا ہے۔

اگر و سے قطبی پر عمود و ن ہو تو

$$\text{ون} = \frac{r^2}{\rho \cos \theta} \quad (\text{دفعہ ۳۱})$$

$$\text{وف} = \rho \cos \theta$$

$$\text{ون} \times \text{وف} = r^2$$



۸۶) پس قطبی کو حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل عمل حاصل ہوتا ہے۔  
 وف کو لاؤ اور فرض کرو کہ وہ دائرہ کو (پ) قطع کرتا ہے۔ خط وف پر  
 ایک ایسا نقطہ ن کو کہ وف : وا = و : ون۔ ن میں سے  
 ایک خط وف پر عمود کھینچو۔

مثال ۱۔ دائرہ لا + ما = ۴ کے لحاظ سے حسب ذیل نقطوں کے  
 قطبیوں کی مساواتیں لکھو:

$$(۱) (۳، ۲) (۲) (۱، ۳) (۳) (۱، ۱)$$

مثال ۲۔ لا + ۲ = ۳ - ما = ۶۔ کا قطب بلحاظ دائرہ  
 لا + ما = ۵ =

کے معلوم کرو۔

[اگر لا، ما قطب ہے تو دیا ہوا خط وہی ہے جو لا + ما = ۵ = ہے  
 اس لیے

$$\frac{۵}{۶} = \frac{ما}{۲} = \frac{لا}{۲}$$

اس لیے مطلوب قطب (۵، ۵) ہے۔  
 مثال ۳۔ حسب ذیل نقطوں کے قطب اس دائرہ کے لحاظ سے  
 معلوم کرو جس کی مساوات لا + ما = ۳۵ ہے:-

$$(۱) لا + ۴ = ۶ - ما = ۷، (۲) لا + ۳ = ۲ - ما = ۵، (۳) لا + ۱ = ۱ - ما = ۱$$

جوابات: (۱) (۳۰، ۳) (۲) (۲۱، ۱۳) (۳) (۵، ۳۵) (ب)

مثال ۴۔ ان نقطوں کے محدود معلوم کرو جہاں خط لا = ۱، دائرہ لا + ما =  
 ۵ کو قطع کرتا ہے۔ ان نقطوں پر کے ماسوں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ  
 وہ نقطہ (۴، ۱) پر متقاطع ہوتے ہیں۔

جواب: (۱، ۳) (۱، ۳)

مثال ۵۔ ان نقطوں کے محدود معلوم کرو جہاں خط لا + ما = ۲۵  
 دائرہ لا + ما = ۵ کو قطع کرتا ہے اور ان نقطوں پر کے ماسوں کی مساواتیں

معلوم کر دو اور ثابت کر دو کہ یہ مماس نقطہ (۸، ۶) پر متقاطع ہوتے ہیں۔ نقطہ (۸، ۶) کے قطبی کی مساوات بلحاظ اس دائرہ کے لکھو۔  
 مثال ۶۔ اگر نقطہ (۸، ۶) کا قطبی بلحاظ دائرہ  $۲ = ۲$  کے دائرہ (۸، ۶) کا قطبی ہے۔  
 $۲ = ۲$  کو مس کرے تو ثابت کر دو کہ (۸، ۶) اس منحنی پر ہے جس کی مساوات  $۲ = ۲$  ہے۔

## ۸۰۔ دائرہ کی قطبی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کر دو کہ دائرہ کا مرکز ج ہے اور اس کے قطبی محدغہ 'عہ' ہیں۔  
 فرض کر دو کہ دائرہ کا نصف قطر ۱ کے مساوی ہے۔

فرض کر دو کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ ف کے قطبی محدغہ (ر، ط) ہیں۔ تب

$$ج ف = ۱، ج و = ۲، ج و ف = ۲، ج و ف = ۲$$

لیکن ج ف = ۱، ج و = ۱، ج و ف = ۱، ج و ف = ۱، ج و ف = ۱، ج و ف = ۱

زاویہ لا و ف = ط - اس لیے

$$۱ = ۱ + ۲ - ۲ = ۲ - ۲ = ۰ \text{ (ط - عہ) } \dots \dots \dots (۱)$$

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

اگر میدان دائرہ کے مرکز پر ہو تو غہ = ۱ اور اس لیے (۱) سے

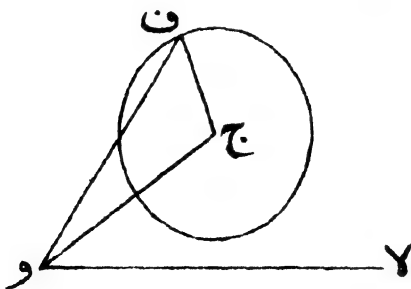
(۸۴)

$$۱ = ۲ - ۲ = ۰ \text{ (ط - عہ) } \dots \dots \dots (۲)$$

اور اگر ابتدائی خط مرکز میں سے گزرے تو عہ صفر ہوگا اور مطلوبہ مساوات

$$۱ = ۲ - ۲ = ۰ \text{ (ط - عہ) } \dots \dots \dots (۳)$$

ہوگی۔





جو گ، گم + ۲ ف، ف - ج، ج - ۰ =  
میں تحویل ہوتی ہے۔

متبادل ثبوت :- دائروں کے ایک مشترک نقطہ (لا، ما) پر کے

ماسوں کی مساواتیں

لا، لا + ما، ما + گ، (لا + لا) + ف، (ما + ما) + ج، ۰ =  
اور لا، لا + ما، ما + گ، (لا + لا) + ف، (ما + ما) + ج، ۰ =  
ہیں۔ یہ ماس علی القوائم ہونگے اگر

(لا، لا + گ،) + (لا، لا + گم) + (ما، ف) + (ما، ف) = ۰

یعنی لا، لا + ما، ما + لا، لا + گ، گ + ما، ف + ف + گ، گ + ف، ف = ۰ ..... (۱)

لیکن چونکہ (لا، ما) دونوں دائروں پر ہے اس لیے

لا، لا + ما، ما + گ، لا، لا + ۲ ف، ما، ج، ۰ = ..... (۲)

لا، لا + ما، ما + گ، لا، لا + ۲ ف، ما، ج، ۰ = ..... (۳)

(۱) کو ۲ سے ضرب دو اور (۲) اور (۳) کے مجموعہ کو تفریق کرو تو

گ، گم + ۲ ف، ف - ج، ج - ۰ =

۸۲۔ اُس ماس کا طول معلوم کرنا جو ایک دیے ہوئے  
نقطہ سے ایک دائرہ کا کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ دیا ہوا نقطہ ت ہے اور دائرہ کا مرکز ج ہے۔ فرض  
کرو کہ ت سے دائرہ کے دو ماسوں میں سے ایک ت ف ہے۔  
تب ہم جانتے ہیں کہ زاویہ ج ف ت قائمہ زاویہ ہے اس لیے

ت ف = ج ت - ج ف ..... (۱)

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات



(لا۔ ۱) + (ما۔ ب) - ج = ۰ ..... (۲)  
 ہے اور فرض کرو کہ ت کے محدود لا، ما ہیں تو  
 ج ت = (لا۔ ۱) + (ما۔ ب)  
 اس لیے (۱) کی رو سے

ت ف = (لا۔ ۱) + (ما۔ ب) - ج = ۰ ..... (۳)  
 اس لیے مساوات (۲) کے دائیں جانبی رکن میں محدودوں لا، ما کو درج  
 کرنے سے ت ف = یعنی ماس کے طول کا مربع معلوم ہوتا ہے۔

(۸۹) پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ماس = ۰ ایک دائرہ کی مساوات ہو  
 (جہاں ماس کو اختصاراً لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج کی بجائے لکھا گیا  
 ہے) اور ماس میں کسی نقطہ کے محدود درج کئے جائیں تو نتیجہ اُس ماس کے  
 طول کے مربع کے مساوی ہوتا ہے جو اُس نقطہ سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو  
 یا اُس مستطیل (اقلیدس جلد سوم مسئلہ ۳) کے رقبہ کے مساوی جس کے  
 متصلہ اضلاع اُن وتروں کے مقطوع ہوں جو نقطہ میں سے کھینچے گئے  
 ہوں۔ اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہو تو مستطیل کا رقبہ منفی ہوگا اور ماس کا  
 طول خیالی۔

اگر دائرہ کی مساوات

$$۱ لا + ب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

ہو تو کسی نقطہ سے ماس کے طول کا مربع معلوم کرنے کے لیے اول (۱) سے تقسیم  
 کرنا چاہئے اور پھر اُس نقطہ کے محدود درج کرنا چاہئے جس سے ماس کھینچا گیا ہے  
 ماسوں کے اُس زوج کی مساوات معلوم کرنا جو کسی نقطہ  
 سے دائرہ لا + ما = ۱ کے کھینچے گئے ہوں۔  
 فرض کرو کہ نقطہ (لا، ما) سے کھینچے ہوئے ماس ت ف اور ت ق

ہیں۔

اب اگر ان میں سے ایک ماس پر کوئی نقطہ  $س$  ( $لا$ ،  $ما$ ) ہو (فرض کرو کہ  $ت$   $ف$  پر) اور  $ف$   $ق$  پر عمود  $ت$   $ل$  اور  $س$   $م$  کیلئے جائیں تو متشابه مثلثوں سے

$ت$   $ف$  :  $س$   $ر$   $ف$  =  $ت$   $ل$  :  $س$   $م$  ..... (۱)  
لیکن  $ف$   $ق$  کی مساوات

$$لا + ما - ل = ل$$

$$ہے، اس لیے \frac{ت}{س} = \frac{ت}{س} = \frac{لا + ما - ل}{لا + ما - ل}$$

اور دفعہ ۸۲ کی رو سے

$$\frac{ت}{س} = \frac{لا + ما - ل}{لا + ما - ل}$$

اس لیے (۱) سے

$$(لا + ما - ل) - (لا + ما - ل) = (لا + ما - ل) - (لا + ما - ل)$$

اس لیے ماسوں میں سے کسی ایک کا کوئی نقطہ، طریق

$$(لا + ما - ل) - (لا + ما - ل) = (لا + ما - ل) - (لا + ما - ل)$$

پر ہے اور اس لیے یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

## دو دائروں کی بنیادی محور

۸۳ — اگر ایک دائرہ کی مساوات

$$لا + ما + گ + لا + ف + ج = ۰$$

اور دوسرے دائرہ کی مساوات

$$لا + ما + گ + لا + ف + ج = ۰$$

ہو تو مساوات (۹۰)

$$لا + ما + گ + لا + ف + ما + ج = لا + ما + گ + لا + ف + ما + ج$$

(۳) . . . . .

صرف کسی ایسے نقطے کے محدودوں سے پوری ہوگی جو (۱) اور نیز (۲) پر ہو۔  
اس لیے مساوات (۳) ان نقطوں میں سے گزرنے والے طریق کو تعبیر  
کرتی ہے جو دونوں دائروں میں مشترک ہیں۔

لیکن مساوات (۳)

$$۲ (گ - گ) (لا + لا) (ف - ف) (ما + ج - ج) = ۰ \dots (۴)$$

میں تخویل ہوتی ہے اور یہ مساوات درجہ اول کی ہے اور اس لیے ایک  
خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

پس مساوات (۳) یا (۴) ان نقطوں میں سے گزرنے والے  
خط مستقیم کی مساوات ہے جو دائروں (۱) اور (۲) میں مشترک ہیں۔  
اگر دو دائرے (۱) اور (۲) ایک دوسرے کو حقیقی نقطوں میں قطع  
نہ کریں تو بھی (۳) یا (۴) سے حاصل شدہ خط مستقیم تمام صورتوں میں حقیقی ہوگا  
بشرطیکہ گ، ف، ج، گ، ف، ج حقیقی ہوں۔ اس طرح ہمیں ایک ایسے  
حقیقی خط مستقیم کی مثال ملتی ہے جو دو دائروں کے خیالی نقاط تقاطع میں  
سے گزرتا ہے۔

مساوات (۳) کا دوسرا ہندسی مفہوم بھی دیا جاسکتا ہے۔

اگر  $۰ =$  ایک دائرہ کی مساوات ہو جس میں لا کا سر ایک ہو  
اور اگر کسی نقطہ کے محدودوں میں درج کئے جائیں تو نتیجہ اس ماس کے  
مربع کے مساوی ہوگا جو اس نقطہ سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو (دفعہ ۸۲)۔  
اب اگر خط مستقیم (۳) پر کسی نقطہ کے محدودوں کو اس مساوات کی  
دائیں جانب کا جملہ اس ماس کے مربع کے مساوی ہوگا جو نقطہ (لا، ما)  
سے دائرہ (۱) کا کھینچا گیا ہے اور بائیں جانب کا جملہ اس ماس کے مربع  
کے مساوی ہوگا جو نقطہ (لا، ما) سے دائرہ (۲) کا کھینچا گیا ہے۔

پس خط (۳) کے کسی نقطہ سے دو دائروں (۱) اور (۲) کے ماس

کھینچے جائیں تو یہ حماس ایک دوسرے کے مساوی ہوں گے۔

**تعریف** - وہ خط مستقیم جو دو دائروں کے تقاطع (حقیقی یا خیالی) میں سے کھینچا گیا ہو ان دائروں کا بنیادی محور کہلاتا ہے۔

یہ قابل ذکر ہے کہ دو دائروں کے بنیادی محور کی یہ تعریف بھی ہو سکتی ہے کہ وہ ان نقطوں کا طریق ہے جن سے ان دو دائروں کے

کھینچے ہوئے حماس طول میں مساوی ہوتے ہیں۔

ان دو دائروں کے مرکوزوں کے محدود علی الترتیب - گ، ف اور - گ، - ف ہیں، اس لیے ان کو ملانے والے خط مستقیم کی مساوات

$$\frac{لا + گ}{گ - ف} = \frac{لا + ف}{ف - گ}$$

ہے جو (حسب دفعہ ۳۰) خط (۴) پر عمود ہے۔

پس دو دائروں کا بنیادی محور ان کے مرکوزوں کو ملانے والے خط پر عمود ہوتا ہے۔

**۸۴ -** تین دائروں میں سے دو کے تین بنیادی محور ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

اگر تین دائروں کی مساواتیں  $س = ۰$ ،  $س = ۰$ ،  $س = ۰$  ہوں جن میں سے ہر ایک میں لا کا سر ایک ہو تو پہلے اور دوسرے کے بنیادی محور کی مساوات

$$س - س = ۰$$

ہے۔ دوسرے اور تیسرے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

$$س - س = ۰$$

ہے اور تیسرے اور پہلے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

س = س = ۰  
 ہے۔ اب یہ ظاہر ہے کہ اگر ان میں سے دو مساواتیں کسی نقطہ کے محدود  
 سے پوری ہوں تو تیسری مساوات بھی ان محدودوں سے پوری ہوگی۔  
 ان تین بنیادی محوروں کے نقطہ تقاطع کو دائروں کا بنیادی مرکز  
 کہتے ہیں۔

## ہم محور دائرے

۸۵۔ دائروں کے ایک نظام کی مساوات معلوم کرنا جنہیں

ہر زوج کا بنیادی محور وہی ہو۔

اگر مشترک بنیادی محور کو محور مافرض کیا جائے تو نظام کے  
 دائروں میں سے کسی دو کی مساوات (جبکہ اس کو معیاری شکل میں لکھا  
 گیا ہو جس میں لاکھنؤ کاٹی ہو) صرف لاکھ میں مختلف ہو سکتی ہے۔  
 اس طرح دائروں کے نظام کی تمام مساوات جبکہ ان دائروں میں سے  
 کسی زوج کے بنیادی محور کی مساوات لا = ۰ ہو

$$لا + ما + ۲گ + ۲ف + ج = ۰$$

ہے جہاں ف اور ج تمام دائروں کے لیے وہی ہیں۔

اگر مبداء کو (۰، ف) پر تبدیل کیا جائے تو مطلوبہ مساوات شکل

$$لا + ما + ۲گ + ۲ف + ج = ۰ \quad (۱)$$

اختیار کرتی ہے جہاں ج تمام دائروں کے لیے وہی ہے اور گ مختلف

دائروں کے لیے مختلف ہے۔ بنیادی محور دائروں کو حقیقی نقطوں میں قطع کرے گا اگر ج منفی ہو

اور خیالی نقطوں میں قطع کرے گا اگر ج مثبت ہو۔

مساوات (۱) کو شکل

$$(لا + گ) + ما = گ - ج$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ پس اگر گ کو  $\pm$  راج کے مساوی لیا جائے تو دائرہ نقطوں ( $\pm$  راج) میں سے ایک میں تحویل ہوگا۔

ان نقطہ دائروں کو ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے کہا جاتا ہے۔

جب ج مثبت ہوتا ہے یعنی جب دائرے خود خیالی نقطوں میں منقطع ہوتے ہیں تو انتہائی نقطے حقیقی ہوتے ہیں اور اس کے بالعکس جب دائرے حقیقی نقطوں میں منقطع ہوتے ہیں تو انتہائی نقطے خیالی ہوتے ہیں۔ دفعہ ۸۱ میں معلوم شدہ شرط سے یہ فوراً مستنبط ہوتا ہے کہ مساواتوں

$$لا + ما + ۲ گ - لا + ج = ۰$$

$$لا + ما + ۲ ف - ج = ۰$$

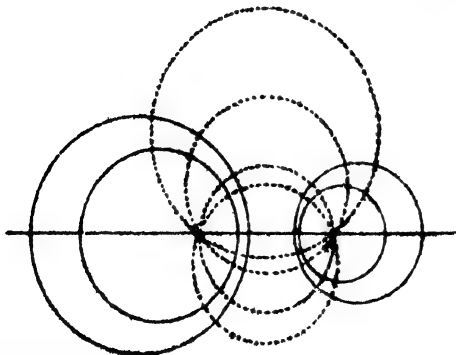
اور

سے تعبیر شدہ ہم محور دائروں کے دو نظامات جہاں ج تمام دائروں کیلئے وہی ہے ایسے ہیں کہ ایک نظام کا کوئی دائرہ دوسرے نظام کے تمام دائروں کو علی القوام قطع کرتا ہے۔

یہ دو علی القوام نظامات ایسے ہیں کہ ایک نظام کے مشترک نقطے دوسرے نظام کے انتہائی نقطے ہیں۔

شکل ذیل میں

(۹۳)



دائروں کے ایک نظام کو پورے خطوں سے اور دوسرے نظام کو نقطہ دار خطوں سے تعبیر کیا گیا ہے۔

۸۶ \*۔ اگر دو دائروں کی مساواتیں  $s =$  اور  $s' =$  ہوں تو مساوات  $s = s'$  کی تمام قیمتوں کیلئے

ان تمام دائروں کو تعبیر کرے گی جو  $s =$  اور  $s' =$  کے مشترک نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

اگر  $s =$  اور  $s' =$  علی الترتیب

$\lambda + \mu + 2$  گ  $\lambda + 2$  ف  $\mu + 2$  ج  $= 0$  (۱)

$\lambda + \mu + 2$  گ  $\lambda + 2$  ف  $\mu + 2$  ج  $= 0$  (۲)

ہوں تو مساوات  $s = s'$  لے

$\lambda + \mu + 2$  گ  $\lambda + 2$  ف  $\mu + 2$  ج  $= 0$  (۳)

ہوگی۔ اب مساوات (۳) صریحاً ایک دائرہ کی مساوات ہے خواہ لکھی

قیمت کچھ ہی ہو۔ نیز اگر کسی نقطہ کے محدود (۱) اور (۲) دونوں کو پورا کریں تو وہ (۳) کو بھی پورا کریں گے۔

پس  $s = s'$  لے کر کسی قیمت کے لئے ایک ایسے دائرہ کی مساوات ہے جو  $s = 0$  کے مشترک نقطوں میں سے گزرتا ہے۔

لے کر مناسب قیمت دیکر دائرہ (۳) کو کسی دوسرے نقطہ میں سے گزرا جاسکتا ہے اس لئے  $s = s'$  سے وہ تمام دائرے تعبیر ہوتے ہیں جو  $s = 0$  اور  $s' = 0$  کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔

مساوات  $s = s'$  لے کر کاہنہ سی مفہوم قابل غور ہے۔

اس نقطہ سے جس کے محدود مساوات  $s = s'$  کو پورا کرتے ہیں دائروں  $s = 0$  اور  $s' = 0$  کے ماس کھینچو تو دفعہ ۲۰ سے معلوم ہوگا

کہ  $س =$  کے ماس کا مربع،  $س =$  کے ماس کے مربع کا لہ گنا ہے۔  
اس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

اُس نقطہ کا طریق جو اس طرح حرکت کرے کہ اس سے  
دو دیے ہوئے دائروں کے ماس ایک مستقل نسبت میں ہوں  
ایک ہم محور دائرہ ہوتا ہے۔

۸۷۔ اگر دو دائروں کے مرکز  $و$  و  $و'$  اور نصف قطر  $۱$  و  $۱'$  ہوں تو  
وہ دو نقطے جو خط  $وو'$  کو داخلا اور خارجاً نسبت  $۱:۱'$  میں تقسیم کرتے  
ہیں ان دو دائروں کے مشابہت کے مرکز کہلاتے ہیں۔  
مشابہت کے مرکبوں کے خواص پر بحث کرنے کا بہترین طریقہ  
ہندسی طریقہ ہے۔

ان میں سے اہم ترین خواص یہ ہیں (۱) دو دائروں کے مشترک  
ماسوں میں سے دو، مشابہت کے ہر مرکز میں سے گذرتے ہیں،  
(۲) دو دائروں کے مشابہت کے ایک مرکز میں سے گذرنے والا  
کوئی خط مستقیم ان دو دائروں سے مشابہتاً منقطع ہوتا ہے۔

## مشابہت

۱۔ اُس ماس کا طول معلوم کرو جو نقطہ (۵، ۲) سے دائرہ  $۱$  و  $۱'$  کا  
کھینچا گیا ہے۔  
۲۔  $۱$  و  $۱'$  کا کھینچا گیا ہے۔  
نیز ان ماسوں کا طول معلوم کرو جو نقطہ (۱۶، ۴) سے دائرہ  
 $۱$  و  $۱'$  کا کھینچا گیا ہے۔  
۳۔  $۱$  و  $۱'$  کا کھینچا گیا ہے۔  
جواب:  $۳$ ،  $۲$ ،  $۳$

۲۔ نقطوں (۰، ۳)، (۲، ۰)، (۱، ۱) میں سے گذرنیوالے  
دائرہ کی مساوات معلوم کرو اور مبداء میں سے گذرنے والے تمام دایروں کے



مقطوعات کے مستقل متطیل کی قیمت معلوم کرو۔ جواب:  $\frac{18}{5}$   
 ۳۔ دائروں  $لا + ما + ۲ + لا + ۳ - ما - ۷ = ۰$  اور  $لا + ۲ - لا - ۲ - ما - ۷ = ۰$   
 کے بنیادی محور کی مساوات معلوم کرو۔ جواب:  $لا + ما - ۲ = ۰$   
 ۴۔ دائروں  $لا + ما + ب + لا + ب - ما - ج = ۰$  اور  $لا + لا + ما + ۲ + لا - لا = ۰$   
 کا بنیادی محور معلوم کرو۔ جواب:  $لا - ب + ما + ج = \frac{1}{1-ب}$

(۹۵) ۵۔ دائروں  $لا + ما + لا + لا + ب + ما + ج = ۰$  اور  $لا + ما + ب + لا + ما + ج = ۰$   
 کا بنیادی محور اور مشترک وتر کا طول معلوم کرو۔  
 جواب:  $لا - ما = ۰$ ،  $\left\{ \frac{1}{۴} (۱ + ب) - ۲ - ج \right\}$

۶۔ ثابت کرو کہ تین دائرے  
 $لا + ما + ۲ + لا + ۳ - ما - ۷ = ۰$ ،  $لا + ۲ + لا + ۳ + ما + ۸ - ما - ۱۶ = ۰$   
 اور  $لا + ما + ۲ + لا + ۱۲ - ما - ۲۴ = ۰$   
 ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

۷۔ تین دائروں  
 $لا + ما + ۲ + لا + ۳ - ما - ۷ = ۰$ ،  $لا + ۲ + لا + ۳ + ما + ۸ - ما - ۱۶ = ۰$   
 اور  $لا + ما + ۲ + لا + ۱۲ - ما - ۲۴ = ۰$

کا بنیادی مرکز معلوم کرو۔ جواب:  $(-۲، -۱)$   
 ۸۔ دائروں

$لا + ما = ۱$  اور  $(لا - ۱) + (۳ - ما) = ۳$   
 کے مشترک مماس معلوم کرو۔

خط  $لا + ما + ن = ۰$ ۔ دونوں دائروں کو مس کرے گا اگر

$ن = لا + ۲ + ما$  اور  $(لا + ۳ + ما + ن) = ۳$ ،  $(لا + ۲ + ما) = ۲$   
 پس  $۲ = ن \pm (لا + ۳ + ما + ن)$

اگر  $لا + ۳ + ما - ن = ۰$  تو  $(لا + ۳ + ما) = ۲$ ،  $لا + ۲ + ما$  اور اس لیے

$$م = ۰ \text{ یا } ۳ل + ۴م = ۰$$

پس جب  $م = ۰$  تول  $ن$  اور مساوات  $لا + ۱ = ۰$  ہے۔

لیکن جب  $۳ل = ۰$  تو  $۳ن = ۵م$  اور مساوات  $۳ل - ۳ما - ۵ = ۰$  ہے۔

$$\text{پھر اگر } ۳ل + ۴م + ۳ن = ۰ \text{ تول } ۰ \text{ یا } ۳ل = ۴م$$

پس جب  $۳ل = ۰$  تو  $م = ۰$  اور مساوات  $ما - ۱ = ۰$  ہے۔

لیکن جب  $۳ل = ۴م$  تو  $۳ن = ۵م$  اور مساوات  $۳ل + ۴ما$

$$۵ = ۰ \text{ ہے۔}$$

۹۔ ان خطوط متیقم کی مساواتیں معلوم کرو جو دائروں

$$لا + ما = ۴ \text{ اور } (۳ل - ۳ما) + ۱ = ۰$$

دونوں کو مس کرتے ہیں۔ نیز مشابہت کے مرکزوں کے محدد معلوم کرو۔

$$\text{جواب: } ۳ل + ۲ما - ۸ = ۰ \text{ اور } ۳ل + ۲ما - ۱۵ = ۰$$

$$(۰, ۸) \text{ و } (۰, \frac{۱۵}{۲})$$

۱۰۔ اگر نقطہ (ف، گ) سے دائرہ  $لا + ما = ۲$  کے تماس کا طول اس

ماس کا دوچند ہو جو نقطہ (ف، گ) سے دائرہ  $لا + ما = ۳$  کا ہے تو

$$۲ + گ + ف + ۴م = ۲$$

۱۱۔ اگر کسی نقطہ سے دائرہ  $لا + ما = ۲$  کے تماس کا طول اس ماس

کے طول کا تین گنا ہو جو اسی نقطہ سے دائرہ  $لا + ما = ۴$  کا ہے تو ثابت کرو کہ

یہ نقطہ دائرہ

$$۴ل + ۲ما - لا - ۱۸ = ۰$$

پر ہونا چاہئے۔

۱۲۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو دائروں  $لا + ما = ۲$

۳ - ۴ = ۰ اور  $لا + ما + ۳ل - لا - ۲ما - ۱ = ۰$  کے نقاط تقاطع میں سے اور نقطہ

(۲، ۱) میں سے گذرتا ہے۔

$$\text{جواب: } لا + ما + ۴ل - لا - ۲ما + ۵ = ۰$$

۱۳۔ ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو  $لا + ما = ۴$  اور  $لا + ما$

۲- لا- ۲+ ۲=۰ کے نقاط تقاطع میں سے گزرے اور خط لا+ ۲=۰ کو مس کرے۔  
جواب: لا+ ۲=۰۔ لا- ۲=۰۔

(۹۶)

۸۸۔ حسب ذیل مثالوں میں بعض اہم ہیں۔  
(۱) ہم محور دائروں کے ایک سلسلہ کے لحاظ سے کسی ثابت نقطہ کے قطبی ایک دوسرے ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور نظام کے انتہائی نقطوں میں سے ایک کا قطبی تمام دائروں کے لیے وہی ہے۔  
دائروں کا نظام مساوات

$$\text{لا} + \text{ما} + ۲ + \text{لا} + \text{ج} = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ج تمام دائروں کے لیے وہی ہے (دفعہ ۸۵)۔  
نظام کے انتہائی نقطہ (ج ± ۰) ہیں۔

فرض کرو کہ ثابت نقطہ کے محدود (ف) گ ہیں۔ تب (۱) کے لحاظ سے  
قطبی کی مساوات

$$\text{ف} + \text{لا} + \text{گ} + \text{ما} + ۱ + (\text{لا} + \text{ف}) + \text{ج} = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

ہوگی۔

۱ کی قیمت خواہ کچھ بھی ہو خط مستقیم (۲) ہمیشہ اُس نقطہ میں سے گزرے گا  
جو ف + لا + گ + ما + ج = ۰ اور لا + ف = ۰ سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر ف = ج ± ۰ اور گ = ۰ تو مساوات (۲) 'ف' (لا + ف) +  
+ ۱ (لا + ف) = ۰ میں تحویل ہوتی ہے اور اس لئے لا + ف = ۰۔

پس انتہائی نقطوں میں سے ایک کا قطبی وہ خط ہے جو دوسرے انتہائی  
نقطہ میں سے گزرتا ہے اور بنیادی محور کے متوازی ہے۔

(۲) اگر ۱ ب ج کوئی مثلث ہو اور ایک دائرہ کے لحاظ سے تین  
نقطوں کے قطبیوں سے مثلث (ب ج بنے چنانچہ ب ج، (کا قطبی ہے  
ج) ب کا قطبی ہے اور (ب ج کا قطبی ہے تو تین خطوط مستقیم (ب ج  
ب ب ج ج ایک نقطہ پر ملیں گے۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

(۱) .....  $\text{لا} + \text{ما} = \text{لا}^2$   
ہے اور فرض کرو کہ نقطوں (ا) 'ب' ج کے محدود علی الترتیب لا، ما اور لا، ما اور لا، ما ہیں۔

اب تین خطوط مستقیم جب ج، ج، (ا) 'ب' کی مساواتیں

(۲) .....  $\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا} = \text{لا}^2$   
(۳) .....  $\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا} = \text{لا}^2$   
(۴) .....  $\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا} = \text{لا}^2$  اور  
ہیں۔

(۱) (۳) اور (۴) کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والا ایک خط ہے اور اس لیے اس کی مساوات (دفعہ ۳۳)

$$\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا} = \text{لا}^2 \text{ لہ } (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا})$$

میں شامل ہے۔ لیکن یہ خط ۱ میں سے بھی گزرتا ہے جس کے محدود (لا، ما) ہیں۔

اس لیے ہم لہ کو مساوات

$$\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا} = \text{لا}^2 \text{ لہ } (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا})$$

سے معلوم کرتے ہیں۔

پس ۱ کی مساوات

$$(\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا}) = (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا})$$

$$(۵) \dots \dots (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا}) = (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا})$$

ہے۔

دوسری مساواتیں متشکل ہونے کی وجہ سے لکھ لی جاسکتی ہیں۔ چنانچہ

وہ ہونگی

(۹۶)

$$(\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا}) = (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا})$$

$$(۶) \dots \dots (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا}) = (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا})$$

$$(\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا}) = (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا})$$

$$(۷) \dots \dots (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا}) = (\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} - \text{لا})$$

چونکہ یہ تین مساواتیں (۵)، (۶) اور (۷) باہم جمع کرنے پر متماثل معدوم ہوتی ہیں اس لیے ان مساواتوں سے تعبیر شدہ خطوط (ا) 'ب ب' اور ج ج ایک نقطہ پر ملتے چاہئیں (دفعہ ۳۴)۔

(۳) دو دیے ہوئے دائروں کے نقاط تقاطع میں سے ایک و ہے اور و میں سے گزرنے والا کوئی خط ان دائروں کو کمر علی الترتیب ف اور ق پر قطع کرتا ہے۔ ف ق کے وسطی نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

و کو مبدأ قرار دو اور فرض کرو کہ دائروں کی مساواتیں (دفعہ ۸۰)

$$r = ۱۲ \text{ (جم - طہ - عم)} \text{ اور } r = ۲ \text{ (جم - طہ - بہ)}$$

ہیں۔

تب ط کی کسی مخصوص قیمت کے لیے

$$وف = ۱۲ \text{ (جم - طہ - عم)} \dots\dots\dots (۱)$$

$$وق = ۲ \text{ (جم - طہ - بہ)} \dots\dots\dots (۲)$$

اگر 'ف ق کا وسطی نقطہ ہے تو

$$و = \frac{۱}{۲} (وف + وق)$$

$$\therefore و = \frac{۱}{۲} (جم - طہ - عم) + ب \text{ (جم - طہ - بہ)}$$

س کا طریق

$$ر = ۱ \text{ (جم - طہ - عم)} + ب \text{ (جم - طہ - بہ)}$$

$$= (۱ \text{ (جم - طہ - عم)} + ب \text{ (جم - بہ)}) + (۱ \text{ (جم - طہ - عم)} + ب \text{ (جم - بہ)})$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے یہ طریق وہ دائرہ ہے جس کی مساوات

$$ر = ۱ \text{ (جم - طہ - عم)}$$

ہے جہاں ا اور ب مساواتوں

$$ا \text{ (جم - طہ - عم)} + ب \text{ (جم - بہ)} = ا \text{ (جم - طہ - عم)} + ب \text{ (جم - بہ)}$$

سے معلوم ہوتے ہیں۔

(۴) اگر ایک مثلث ا ب ج کے خارجہ دائرہ پر کے کسی نقطہ سے مثلث کے ضلعوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے پائیں ایک خط مستقیم برآقع ہوں گے۔

نقطہ و کو مبداء اور اس میں سے گزرنے والے قطر کو ابتدائی خط لہو۔ تب  
دائرہ کی مساوات  $r = ۱۲$  حجم طہ ہوگی۔

فرض کرو کہ نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے زاویہ معد علی الترتیب 'ع'، 'ب'، 'ج' ہیں  
خط ب ج وہ خط ہے جو (۱۲ حجم ب'، 'ب') اور (۱۲ حجم ج'، 'ج') کو ملاتا  
ہے۔ ب ج کی قطبی مساوات معلوم کرنے کے لیے عام شکل  $ع = رجم (ط - ف)$   
لو (دفعہ ۴۵) اور ب اور ج کے محدود درج کرو۔ اس طرح  $ع$  اور  $ف$  کو معلوم  
کرنے کے لیے دو مساواتیں حاصل ہونگی یہ مساواتیں

$$ع = ۱۲ (جم ب) (جم ب - ف)$$

$$ع = ۱۲ (جم ج) (جم ج - ف)$$

ہونگی۔ پس  $ف = ب + ج$  اور  $ع = ۱۲ (جم ب + جم ج)$ ۔ اس لیے ب ج کی  
مساوات

$$۱۲ (جم ب + جم ج) = رجم (ط - ب - ج) \dots \dots (۱)$$

ہے۔

اسی طرح ج اور ا ب کی مساواتیں علی الترتیب

$$۱۲ (جم ج + جم ع) = رجم (ط - ج - ع) \dots \dots (۲)$$

$$۱۲ (جم ع + جم ب) = رجم (ط - ع - ب) \dots \dots (۳)$$

ہونگی۔

نقطوں (۱)، (۲)، (۳) پر نقطہ و سے عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے  
پائین کے محدود علی الترتیب (۱۲ حجم ب + جم ج)، (۱۲ حجم ج + جم ع)، (۱۲ حجم ع + جم ب)  
(۱۲ حجم ع + جم ب) ہوں گے۔ یہ تین نقطے سب کے سب اس خط مستقیم پر ہیں جس کی مساوات  
 $۱۲ (جم ع + جم ب) = رجم (ط - ع - ب) \dots \dots (۴)$

ہے۔

عمودوں کے پائین میں سے گزرنے والے اس خط کو مثلث کے لمخا سے  
نقطہ و کا خط پائین کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ دائرہ پر دو سرانقطہ  $د$  ہے اور اس کا زاویہ محدود  $ض$  ہے۔

چار نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' میں سے تین تین کو چار طریقوں سے لیا جاسکتا ہے اور اس طرح چار مثلثوں کے جواب میں و کے چار خطوط پائین مائل ہوں گے۔ ہم نے ان میں سے ایک خط پائین کی مساوات معلوم کی ہے یعنی مساوات (۴)۔ دیگر تین کی مساواتیں تشاکل سے لکھ لی جاسکتی ہیں چنانچہ یہ مساواتیں

۱۲ جم بہ جم بہ جم ضہ = رجم (طہ - جہ - ضہ) ..... (۵)  
 ۱۲ جم جم ضہ جم عہ = رجم (طہ - جہ - ضہ - عہ) ..... (۶)  
 اور ۱۲ جم ضہ جم عہ جم بہ = رجم (طہ - ضہ - عہ - بہ) ..... (۷)

ہوں گی۔

نقطوں (۴)، (۵)، (۶) اور (۷) پر نقطہ و سے عمودوں کے پائین کے عدد (۱۲ جم عہ جم بہ جم بہ عہ + جم بہ عہ + جم بہ عہ) وغیرہ ہوں گے۔ یہ چار نقطے سب کے سب اس خط پر ہیں جس کی مساوات

۱۲ جم عہ جم بہ جم بہ جم ضہ = رجم (طہ - عہ - بہ - جہ - ضہ) ..... (۸)

صریحاً اس مسئلہ کی توسیع کی جاسکتی ہے۔

(۵) خطوط مستقیم ۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا کے درمیان زاویوں کی تنصیف کرنے والے خطوں کی مساواتیں معلوم کرنا۔

دیے ہوئے خطوط مستقیم اور کسی دائرہ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا کے نقاط تقاطع میں سے جہاں دائرہ کا مرکز ان خطوں کا نقطہ تقاطع ہے متوازی خطوط مستقیم کے دو زوج کھینچے جاسکتے ہیں جن میں سے ہر زوج مطلوبہ نصفوں میں سے ایک کے متوازی ہوگا۔

اب صریحاً ۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا کے خطوط اور دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے اور (۱) سے دو متوازی خطوط مستقیم تعبیر ہوتے ہیں جو

(۱) لا + ۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا = ۰ ..... (۲)

سے تعبیر شدہ خطوط مستقیم کے متوازی ہیں بشرطیکہ (۲) کا دائرہ بائیں رکن ایک کامل





لا + ما - گم - لا - ف - م + م = '، وغیرہ  
سے علی القوائم منقطع ہوتا ہے۔

تب  
گم + ف - ج - م = '،  
گم + ف - ج - م = '، وغیرہ

اس لیے

$$= \begin{vmatrix} گم & ف & ا & م \\ گم & ف & ا & م \\ گم & ف & ا & م \\ گم & ف & ا & م \end{vmatrix}$$

$$= م (ب ج د) - م (ج د ا) + م (د ا ب) - م (ا ب ج) =$$

کیونکہ 'ا' نقطہ (گم، ف) ہے وغیرہ۔  
(۲) اگر ایک دائرہ پر کوئی چار نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہوں اور دائرہ کے  
مستوی میں و کوئی نقطہ ہو تو

$$وا \times دب ج د - وب \times ج د ا + وج \times د ا ب - ود \times ا ب ج =$$

بطیموس کا مسئلہ اخذ کرو۔

و کو مبدا، قرار دو اور فرض کرو کہ نقطہ 'ا' کے محدد (لا، ما) ہیں وغیرہ۔

دائرہ ب ج د

$$= \begin{vmatrix} لا + ما & لا & ما & ا \\ لا + ما & لا & ما & ا \\ لا + ما & لا & ما & ا \\ لا + ما & لا & ما & ا \end{vmatrix}$$

(۱۰۰) ہے۔ اگر یہ دائرہ نقطہ (لام، ما) میں سے گزرے تو

$$= \begin{vmatrix} و^۱ & لا & لا & ا \\ و^۲ & لا & لا & ا \\ و^۳ & لا & لا & ا \\ و^۴ & لا & لا & ا \end{vmatrix}$$

ہے  $و^۱ \times \Delta \text{بج} - و^۲ \times \Delta \text{ج} + و^۳ \times \Delta \text{ج} - و^۴ \times \Delta \text{ب} + و^۵ \times \Delta \text{ب} - و^۶ \times \Delta \text{ج}$

-  $و^۷ \times \Delta \text{بج} =$

و کے تمام مقامات کے لیے یہ درست ہے۔ اس لیے اگر دائرہ اب ج د کے مستوی میں کوئی چار نقطے 'ق'، 'ر'، 'س' ہوں تو

$ف^۱ \times \Delta - ف^۲ \times \Delta + ف^۳ \times \Delta - ف^۴ \times \Delta =$

$ق^۱ \times \Delta - ق^۲ \times \Delta + ق^۳ \times \Delta - ق^۴ \times \Delta =$  وغیرہ  
پس  $\Delta$ ،  $\Delta$ ،  $\Delta$ ،  $\Delta$  کو ساٹھ کرنے پر

$$= \begin{vmatrix} ف^۱ & ف^۲ & ف^۳ & ف^۴ \\ ق^۱ & ق^۲ & ق^۳ & ق^۴ \\ ر^۱ & ر^۲ & ر^۳ & ر^۴ \\ س^۱ & س^۲ & س^۳ & س^۴ \end{vmatrix}$$

یہاں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، ایک دائرہ پر ہیں اور 'ف'، 'ق'، 'ر'، 'س' دائرہ کے مستوی میں کوئی چار نقطے ہیں

اب فرض کر دو کہ 'ف'، 'ق'، 'ر'، 'س' پر منطبق

ہوتا ہے، وغیرہ تو

$$= \begin{vmatrix} \text{ا}^1 \text{ب}^1 & \text{ا}^2 \text{ج}^2 & \text{ا}^3 \text{د}^3 \\ \text{ب}^1 \text{ج}^1 & \text{ب}^2 \text{د}^2 & \text{ب}^3 \text{ا}^3 \\ \text{ج}^1 \text{د}^1 & \text{ج}^2 \text{ا}^2 & \text{ج}^3 \text{ب}^3 \\ \text{د}^1 \text{ا}^1 & \text{د}^2 \text{ب}^2 & \text{د}^3 \text{ج}^3 \end{vmatrix}$$

یعنی  $\text{ا}^1 \text{ب}^1 \times \text{ج}^2 \text{د}^3 \pm \text{ا}^2 \text{ج}^1 \text{د}^3 \pm \text{ا}^3 \text{ج}^2 \text{د}^1 \pm \text{ا}^1 \text{د}^2 \text{ج}^3 =$

اور یہ تعلیموں کا سلسلہ ہے۔

(۸) اگر دائروں ب ج د، ج د ا، د ا ب، ا ب ج کے مرکز  
'و'، 'و'، 'و' اور نصف قطر 'ر'، 'ر'، 'ر' ہوں جہاں 'ا'، 'ب'، 'ج'،  
'د' ایک مستوی میں کوئی چار نقطے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$(\text{ا}^1 \text{و}^1 - \text{ر}^1)^2 - (\text{ب}^1 \text{و}^1 - \text{ر}^1)^2 + (\text{ج}^1 \text{و}^1 - \text{ر}^1)^2 - (\text{د}^1 \text{و}^1 - \text{ر}^1)^2 = 0$$

دائرہ ب ج د

$$= \begin{vmatrix} \text{ا}^1 + \text{ر}^1 & \text{ا}^2 & \text{ا}^3 & 1 \\ \text{ا}^1 + \text{ر}^1 & \text{ب}^2 & \text{ب}^3 & 1 \\ \text{ا}^1 + \text{ر}^1 & \text{ج}^2 & \text{ج}^3 & 1 \\ \text{ا}^1 + \text{ر}^1 & \text{د}^2 & \text{د}^3 & 1 \end{vmatrix}$$

ہے۔ اب

$$\begin{vmatrix} \text{ا}^1 & \text{ا}^2 & \text{ا}^3 & 1 \\ \text{ب}^1 & \text{ب}^2 & \text{ب}^3 & 1 \\ \text{ج}^1 & \text{ج}^2 & \text{ج}^3 & 1 \\ \text{د}^1 & \text{د}^2 & \text{د}^3 & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \text{ا}^1 + \text{ر}^1 & \text{ا}^2 & \text{ا}^3 & 1 \\ \text{ا}^1 + \text{ر}^1 & \text{ب}^2 & \text{ب}^3 & 1 \\ \text{ا}^1 + \text{ر}^1 & \text{ج}^2 & \text{ج}^3 & 1 \\ \text{ا}^1 + \text{ر}^1 & \text{د}^2 & \text{د}^3 & 1 \end{vmatrix} = \text{ا}^1 \text{و}^1 - \text{ر}^1$$

(۱۰۱) پس  $\Sigma (1^2 - 2^2 - 3^2 - \dots - n^2) = -\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$  بشرطیکہ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

یعنی اگر

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

## چوتھے باب پر مثالیں

۱۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے فاصلہ کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے ایک ثابت خطِ مستقیم سے اس کا عمودی فاصلہ ثابت کرو کہ یہ نقطہ ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔

۲۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک مربع کے چار ضلعوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۳۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ن ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔



ذواربعتہ الاضلاع کے تین وتروں کے سرے (۱-۱)، (۲-۲) اور (۳-۳) اور (۱-۳)، (۲-۲) اور (۳-۳) کے تین دائرے جن کے قطریہ وتر ہیں ہم محور ہیں۔

[بنیادی محور ۲ لا + ۱ با - ۱۱ = ۰ ہے۔]

۱۲۔ ایک ذواربعتہ الاضلاع کے ضلعوں کی مساواتیں علی الترتیب  
 ما-ا=، لا-ما+، ا=، لا+۵-ما=۱۱، اور ۳+لا-ما=۱۳ ہیں۔ ان  
 دائروں کی مساواتیں معلوم کرو جو اس ذواربعتہ الاضلاع کے تینوں کون کو قطر مانکر  
 کھینچے گئے ہوں اور ثابت کر دو کہ یہ دائرے ہم محور ہیں۔

[بنیادی محور ۲ لا + ما - ۸ = ۰ ہے]

۱۳۔ ثابت کرو کہ دودھے ہوئے دائروں کی مساتیں ہمیشہ شکل

$$= \beta + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \beta + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$$

۱۱ اور ب دونوں مثبت ہوں۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مرکز سے دو نقطوں کے فاصلے ان فاصلوں کے متناسب ہوتے ہیں جو ان نقطوں میں سے ہر ایک کے دوسرے کے قطبی سے ہیں۔

۱۵۔ اگر دو دیے ہوئے دائروں کے مشابہت کے مرکزوں کو ملائیں گے  
خط پر اس کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس دائرہ پر کے  
کسی نقطہ سے دیے ہوئے دائروں کے مماس متناظر نصف قطروں کی نسبت  
میں ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو کہ اس سے دو ہم مرکز دائروں کے تماس ان کے نصف قطروں کے بالعکس متناسب ہوں۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ دائروں  $LA + MA + LA = LA + MA + LA = 0$  کے مشترک محاسن ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔

۱۸۔ خط  $\text{لا} = \text{ج دائرہ لا} + \text{ا} + \text{گ} + \text{لا} = \text{ب} = ۲$ ۔ کو نقطوں ف' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر (ا، ب)، (ب، ج) سے ف' یا ف' کے ماس پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کا حاصل ضرب، گ' کی تمام قیمتوں کے لیے 'ج' کے مساوی ہے۔

۱۹۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک منظم کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۲۰۔ ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گزرتا ہے اور و میں گزرنے والے دو خطوط مستقیم کو جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں نقاط ف' ق' پر قطع کرتا ہے اور خط ف' ق' ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔ دائرہ کے مرکز کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۱۔ نقاط (ا، ع) اور (ب، ہ) کو ملانے والے خط کو قطر مانکر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کی قطبی مساوات

$$ز = \{ (ا، جم) + (ب، جم) + (ج، جم) + (د، جم) + (ه، جم) + (و، جم) \} = ۰$$

۲۲۔ اس دائرہ اور خط مستقیم کے نقاط تقاطع پر ر کی قیمتیں معلوم کر لیں۔ مساوات معلوم کرو جن کی مساواتیں علی الترتیب

$$ر = ۲ (ا، جم) + (ب، جم) + (ج، جم) + (د، جم) + (ه، جم) + (و، جم) = ۰$$

ہیں۔ ع کی قیمت متعین کرو جبکہ خط مستقیم ایک ماس ہو جائے۔

۲۳۔ ایک مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں

$$۰ = ۳۶ - ۱۲ - ۱۵ - ۱۲ = ۰، ۰ = ۲۴ - ۱۷ - ۱۲ = ۰، ۰ = ۳۶ - ۱۲ - ۱۵ - ۱۲ = ۰$$

ہیں۔ اس کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدود معلوم کرو۔

۲۴۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کے قطبی لمحاظ دو دیے ہوئے دائروں کے ایک دوسرے کے ساتھ معلومہ زاویہ بنائیں۔

(10-2)

۲۵۔ دو دائروں کے بنیادی محور پر کے کسی نقطہ سے ان دائروں کے تماس کھینچے گئے ہیں اور وہ خطوط جو نقاط تماس کو دائروں کے مرکوزوں سے ملاتے ہیں خارج کئے گئے ہیں تاکہ وہ ایک دوسرے سے ملیں۔ ان کے نقطہ تقاطع کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۶۔ اگر وہ چار نقطے جن میں دودا کرے  
 $\text{لا} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = \text{لا} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} =$

خطوط مستقیم

سے منقطع ہوتے ہیں ایک دوسرے دائرہ پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ

ا-آ	ب-ب	ج-ج
ا	ب	ج
ا	ب	ج

۲۷۔ دو ثابت نقطوں میں سے دائروں کا ایک نظام کھینچا گیا ہے اور ایک دیے ہوئے مستقیم کے متوازی ان دائروں کے تماس کھینچے گئے ہیں۔ نقاط تماس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۸۔ اگر تین ہم مرکز دائروں کے مرکز 'ا'، 'ب'، 'ج' ہوں اور کسی نقطہ

$$= \text{بج م} + \text{ج ا م} + \text{ا ب م}$$

کو ثابت کرو۔

۲۹۔ اگر کسی نقطہ سے تین دیے ہوئے دائروں کے مماس طول میں م  
م ہوں جہاں دائروں کے مرکز ایک ہی خط مستقیم میں نہیں ہیں تو ثابت  
کر دو کہ کوئی دائرہ یا کوئی خط مستقیم شکل

$$d = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$$



کی ایک مساوات سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

خطوط مستقیم کے لیے 'ا' 'ب' 'ج' کے درمیان کون سا رشتہ درست رہتا ہے۔  
۳۰۔ ایک دائرہ تین دیے ہوئے دائروں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۳۱۔ خط  $\frac{لا}{س} + \frac{ما}{س} - ۱ = ۰$  کے قطبوں کا طریق جبکہ قطب ان دائروں کے لمحاظ سے لیے گئے ہوں جو قائم محوروں کو مس کرتے ہیں مساواتوں  
(ھ - لا - ک) (ما - ک لا) + ھک (ھ ± ک) (لا ± ما) = ۰  
سے حاصل ہوتا ہے۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ وہ تمام دائرے جو دو ثابت دائروں کو مس کرتے ہیں دو دوسرے ثابت دائروں میں سے ایک کے علی القوائم ہوتے ہیں۔  
۳۳۔ اگر دو دائرے علی القوائم متقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے مشترک قطر پر نقطوں کے جوڑوں کی لامتناہی تعداد معلوم کیجا سکتی ہے ایسے کہ ان میں سے کسی ایک نقطہ کا قطبی بلحاظ ایک دائرہ کے وہی ہو جو دوسرے نقطہ کا قطبی بلحاظ دوسرے دائرہ کے ہے۔ نیز ثابت کرو کہ نقطوں کے کسی ایسے زوج کا درمیانی فاصلہ دو دائروں کے نقاط تقاطع میں سے ایک پر قائمہ زاویہ بناتا ہے۔

۳۴۔ اگر دو دائروں کی مساواتیں جن کے نصف قطر 'ا' و 'ب' ہیں س = ۰ ہوں تو دائرے

$$\frac{س}{ا} \mp \frac{س}{ب} = ۰$$

علی القوائم متقاطع ہوں گے۔  
۳۵۔ دو باہم علی القوائم خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو جن میں سے ہر ایک دو دائروں

$$(لا - ا) + ما = ۰, (لا + ا) + ما = ۰$$

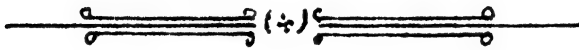
ہیں سے ایک کو مس کرے۔ نیز ثابت کرو کہ ان خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کے  
 نامصف ہمیشہ دو دوسرے ثابت دائروں میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتے ہیں۔  
 ۳۶۔ ایک مثلث کے راس علی الترتیب (۰، ۰)، (۰، ۸۰)، (۰، ۸۰) اور (۰، ۸۰)  
 ہیں۔ ثابت کرو کہ فوقی دائرہ کی مساوات

$$۰ = ۳۰۰۲۴ + ۶۵۶ - ۱۱۵۹ - ۲۰۲ + ۲۰۲$$

ہے اور اندرونی دائرہ کی مساوات

$$۰ = ۲۰۲۵ + ۶۱۸ - ۹۰ - ۲۰۲ + ۲۰۲$$

ثابت کرو کہ یہ دو دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔



## متفرق مثلہ (۱)

(۱۰۶)

۱۔ ثابت کرو کہ مبدا، اُس مثلث کے اندر ہے جس کے راس (۱، ۲) اور (۲، ۳) ہیں۔

۲۔ ایک مُربع کا ایک راس نقطہ (۴، ۳) پر ہے اور ایک وتر خط ۳ لا + ۴ = ۲۰ پر ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز  $(\frac{12}{5}, \frac{16}{5})$  ہے اور وہ دو راس جو دیے ہوئے وتر پر ہیں  $(\frac{13}{5}, \frac{16}{5})$  اور  $(\frac{19}{5}, \frac{8}{5})$  ہیں۔

۳۔ ایک دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو نقطہ (۰، ۰) میں سے گذرتا ہے اور خط لا = ج سے طول ۲ قطع کرتا ہے۔

جواب: ما + ۲ ج لا = ج + لا

۴۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا نصف قطر ۳ ہے اور جو دائرہ لا + ما - ۴ - لا - ۶ - ما - ۱۲ = ۰ کو داخل نقطہ (۱، ۱) پر مس کرتا ہے۔

جواب: لا + ۵ - ما - لا - ۱۳ - ما - ۳۲ = ۰

۵۔ اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے ضلع اُن تین خطوں پر ہیں جنکی

مساواتیں

$$لا - ما + ۱ = ۰، لا + ما - ۶ = ۰، اور لا - ۳ - ما + ۴ = ۰$$

جواب:  $\frac{25}{8}$

۶۔ اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو ۱۳ + لا + ۲ ما + ۱ = ۰ اور لا + ما - ۳ = ۰

کے نقطہ تقاطع کو ۱۳ + لا + ۲ ما - ۱ = ۰ اور لا + ما - ۵ = ۰ کے نقطہ

تقاطع سے ملتا ہے۔ جواب:  $۲ + لا + ما + م = ۰$ ۔  
 ۷۔ ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا نصف قطر ۵ ہے اور جو دائرہ  
 $لا + ما - ۲ - لا - ۲ - م = ۲۰$ ۔ کو خارجاً نقطہ (۵، ۵) پر مس کرتا ہے۔  
 جواب:  $لا + ما - ۲ - لا - ۱۸ - م = ۱۲۰$ ۔  
 ۸۔ اس مثلث کے حاکم دائرہ اور اندرونی دائرہ کی مساواتیں معلوم  
 کرو جو تین غلوں (لا + لا + م - ۱۲) = ۰ سے بننا ہے اور ثابت کرو کہ دائروں کا  
 بنیادی محور  $۲ + لا + ما + ۱ = ۰$  ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو نقطہ (۳، ۴) میں سے گذرتے ہیں اور خط  
 $لا + ما - ۱۰ = ۰$  کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتے ہیں  $۳ - لا - ۵ + ما + ۱۱ = ۰$  اور  
 $۵ + لا + م - ۲۴ = ۰$  ہیں۔

۱۰۔ ان دو خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خطوط

(۱۰۰۰)

$$۶ - لا - لا - ما + لا + ۱۲ - م = ۳۵ = ۰$$

کے ساتھ ایک ایسا متوازی الاضلاع بنائیں جس کے وتر مبدایہ متقاطع ہوں۔

جواب:  $۶ - لا - لا - ما - لا - ۱۲ - م = ۳۵ = ۰$ ۔

۱۱۔ اگر نقطہ (۰، ۰) سے دائرہ  $لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$  کے  
 مماس و ف، و ف ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ و ف ق کی مساوات  
 $لا + ما + گ + لا + ف + م = ۰$  ہے۔

۱۲۔ ان دو مماسوں کی مساوات معلوم کرو جو مبداء سے دائرہ

$$لا + ما + ۱۰ + (لا + م) + م = ۴۰ = ۰$$

کے کھینچے جاسکتے ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرو

جواب: مس  $\frac{۴}{۳}$

۱۳۔ اس مستطیل کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جو خطوط

$$۱ (لا - ۳) + ب + ما = ۰، ۱ (لا - ۴) + ب + ما = ۰،$$

$$ب-لا-۱ (۳-۶) = ۰ \text{ اور } ب-لا-۱ (۲-۶) = ۰$$

سے بنتا ہے۔ جواب:  $(ب-۱) + لا + (ب+۱) = ۶$

$$(ب+۱) - لا - (ب-۱) = ۶$$

۱۴ - ۱۳ - لا - ۲۰ = ۰ اور لا - ۲ - ۵ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں گزرنے والے وہ خطوط معلوم کرو جو مبداء سے فاصلہ ۵ پر ہیں۔

$$جواب: ۱۳ + لا + ۲۵ = ۰ \text{ اور } لا - ۳ - ۲۵ = ۰$$

۱۵ - ثابت کرو کہ دو دائرے

$$لا^۲ + ۲ + لا + ج = ۰$$

$$لا^۲ + ۲ + ب + ج = ۰$$

ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اگر  $\frac{1}{ج} = \frac{1}{ب} + \frac{1}{لا}$

۱۶ - ثابت کرو کہ اس مثلث کا مرکز عمودی جس کے راس (۱) جم عہ

(۱) جب عہ (۱) جم بہ (۱) جب بہ اور (۱) جم جہ (۱) جب جہ ہیں نقطہ

(۱) جم عہ (۱) ج ج جب عہ ہے۔

پس ثابت کرو کہ کسی مثلث کا مرکز ہندی، ماٹ مرکز اور مرکز عمودی کو

ملانے والے خط کو نسبت ۲:۱ میں تقسیم کرتا ہے۔

(۱۰۸) ۱۷ - ایک مثلث کے ضلع ۴، ۳، ۵ = لا، ۱۲، ۱۵ = لا اور ۰ = لا

۱۵ = لا ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے اندرونی دائرہ اور تین باہری دائروں کے

مرکز علی الترتیب (۱، ۸)، (۳، ۲۴)، (۴۰، ۵) اور (۱۵، ۱۲۰) ہیں۔

۱۸ - ثابت کرو کہ مساواتوں

$$لا^۲ + لا - ۱۲ = ۰ \text{ اور } لا^۲ + لا - ۱۲ = ۰$$

سے تعمیر شدہ خطوط مستقیم ایک مربع کے ضلعوں پر ہیں۔

۱۹ - ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر نقطوں (۱، ۲) اور (۲، ۱) کے

کو ملانے والا خط مستقیم ہے م کی تمام قیمتوں کے لیے لا = ۱ کو مس کرتا ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ چار نقطے  $(\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$ ،  $(\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$ ،  $(\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$  اور  $(\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$  ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اگر  $m^2 + m^2 + m^2 = 1$

۲۱۔ ثابت کرو کہ مساوات

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$  دو خطوں پر مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبداء سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔

۲۲۔ اس مسئلہ کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے اضلاع مساواتوں

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ اور } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

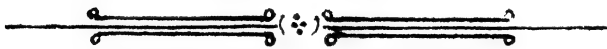
سے حاصل ہوتے ہیں۔

۲۳۔ ثابت کرو کہ دو دائروں  $x^2 + y^2 = 1$  اور  $x^2 + y^2 = 1$

۲۔  $x^2 + y^2 = 1$  کے نقاط تقاطع، ان کے مرکز اور محدودوں کا مبداء ایک دائرہ پر ہیں۔

۲۴۔  $x^2 + y^2 = 1$  اور  $x^2 + y^2 = 1$  کے مشترک مماس معلوم کرو۔

جواب:  $x = 1$ ،  $y = 2$ ،  $z = 5$  اور  $x = 3$ ،  $y = 10$ ۔



# پانچواں باب

## قطع مکانی

(۱۰۹)

۸۹۔ تعریفیں۔ مخروطی تراش یا مخروطی ایسے نقطہ کا قطعی

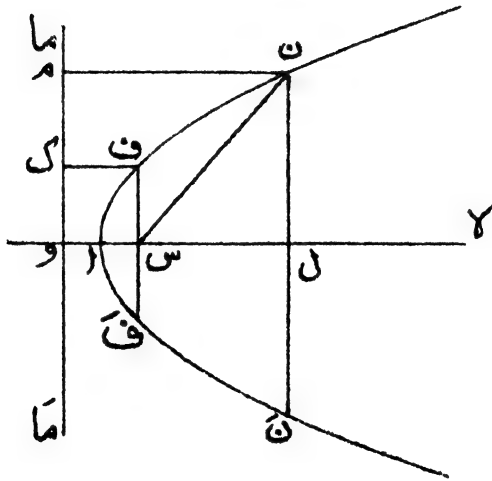
ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ ایک ثابت خط مستقیم سے اس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے۔ ثابت نقطہ کو ماسکہ، ثابت خط مستقیم کو مرتب اور مستقل نسبت کو خروج المرکز کہتے ہیں۔

آئندہ یہ ثابت کیا جائے گا کہ اگر ایک قائم مستدیر مخروط کو کسی مستوی سے قطع کیا جائے تو تمام صورتوں میں ایک مخروطی تراش اوپر کی تصویر کی بموجب حاصل ہوگی۔ چنانچہ اولاً ان منحنیوں کے خواص کو مخروطی تراش سمجھ کر ہی معلوم کیا گیا تھا۔

اب ہم ان میں سے سادہ ترین منحنی کی مساوات معلوم کریں گے اور اس کے چند خواص پر بحث کریں گے۔ یہ منحنی وہ ہے جس میں خروج المرکز اکائی کے مساوی ہوتا ہے۔ اس کو قطع مکانی یا صرف مکانی کہتے ہیں۔

۹۰۔ مکانی کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ س ماسک اور مام ماتب ہے۔ س و مام پر  
عمود کھینچو اور فرض کرو کہ و س = ۱۲ فرض کرو کہ و س محور لا ہے  
اور و مام محور مام۔  
فرض کرو کہ منحنی پر کوئی نقطہ ن ہے اور اس کے محدود (لا، مام) ہیں۔  
محوروں پر ن ل' ن م عمود کھینچو (حسب شکل) اور س ن کو ملاؤ۔  
تب بموجب تعریف س ن = ن م  
اس لیے ن م = س ن = ن ل' + س ل'  
یعنی لا' = مام' + (لا - ۱۲)  
یا مام' = ۱۲ + (لا - ۱) ..... (۱)  
یہ منحنی کی مطلوبہ مساوات ہے۔



منحنی محور لا کو ایک نقطہ ۱ پر قطع کرتا ہے جہاں ما = ۰ اور (۱) کی رو سے  
جبکہ ما = ۰ تو لا = ۱ یعنی و = ۱۔  
نقطہ ۱ کو مکانی یا راس کہتے ہیں۔  
اگر ہم مبدا کو ۱ پر منتقل کریں اور محوروں کی سمتوں کو نہ بدلیں



تو مساوات (۱) ہو جائے گی (دفعہ ۴۹)

$$\begin{aligned} \text{ما}^2 &= \text{ما}^2 \text{ لا}^2 \dots\dots\dots (۲) \\ \text{ماسکہ نقطہ (۱، ۰)} &\text{ ہے اور مرتب خط} \\ &= ۱ + ۰ \end{aligned}$$

ہے۔ نیز

س ن = م ن = و (۱ + ۱) = ۱ + ۱  
**۹۱۔** چونکہ مکانی کی مساوات  $\text{ما}^2 = \text{ما}^2 \text{ لا}^2$  ہے اور  $\text{ما}^2$  ایک مثبت مقدار ہے اس لیے لا کو ہمیشہ مثبت ہونا چاہیے اور اس لیے منحنی کٹا محور لا کی مثبت جانب واقع ہوگا۔  
 لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے صریحاً ماکہ دو قیمتیں ہیں جو مقدار مساوی ہیں لیکن ایک مثبت ہے اور دوسری منفی۔ اس لیے منحنی کے تمام وتر جو محور لا پر عمود ہوں اس سے تصیّف ہوتے ہیں اور منحنی کے وہ حصے جو محور ماکہ مثبت اور منفی جانبوں پر ہیں ہر لحاظ سے مساوی ہیں۔  
 جب لا بڑھتا ہے تو ماکہ بھی بڑھتا ہے اور لا اور ماکہ کے بڑھنے پر کوئی حد نہیں ہے اس لیے محور لا کی مثبت جانب منحنی کی کوئی حد نہیں ہے۔ وہ خط جو ماسکہ میں سے گزرتا ہے اور مرتب پر عمود ہے مکانی کا محور کہلاتا ہے۔

وہ وتر جو ماسکہ میں سے گزرتا ہے اور محور پر عمود ہے وتر خاص کہلاتا ہے۔  
 دفعہ ۹۰ کی شکل میں  $\text{س ف} = \text{ک ف} = \text{و س} = ۱۲$   
 اس لیے وتر خاص کا کل طول  $۱۲$  ہے۔

**۹۲۔** ہم معلوم کر چکے ہیں کہ مکانی پر تمام نقطوں کے لیے  $\text{ما}^2 = \text{ما}^2 \text{ لا}^2 = ۰$ ۔ منحنی کے اندر تمام نقطوں کے لیے  $\text{ما}^2 = \text{ما}^2 \text{ لا}^2$  منفی ہے۔ کیونکہ اگر ق کوئی ایسا نقطہ ہو اور ق میں سے محور کے عمود وار ایک خط کھینچا جائے جو منحنی سے نقطہ ف پر ملے اور محور سے نقطہ ل پر توجہ ن کی نسبت محور سے قریب ہو گا اور اس لیے  $\text{ل ق} > \text{ل ن}$ ۔ لیکن ن منحنی پر

اس لیے  $ل$  ن۔  $۴$   $۱ \times ۱$  ل۔ اور اس لیے  $ل$  ق۔  $۴$   $۱ \times ۱$  ل  
منفی ہے۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ منحنی کے باہر تمام نقطوں کے لیے  
ما۔  $۴$   $۱$  لا مثبت ہے۔

پس اگر ایک مکانی کی مساوات ما۔  $۴$   $۱$  لا۔ ہو اور اگر ہم اس  
مساوات کی دائیں جانبی رکن میں کسی نقطہ کے محدود درج کریں تو نتیجہ مثبت  
ہوگا اگر نقطہ منحنی کے باہر ہے، منفی ہوگا اگر نقطہ منحنی کے اندر ہے، اور صفر  
ہوگا اگر نقطہ منحنی پر ہے۔

۹۳۔ ان نقطوں کے محدود جو خط مستقیم ما =  $م$  لا + ج اور قطع مکانی  
ما۔  $۴$   $۱$  لا میں مشترک ہیں ان دونوں مساواتوں کو پورا کرنے چاہئیں۔  
پس مشترک نقطہ پر رشتہ

(۱۲)

(م لا + ج) =  $۴$   $۱$  لا ..... (۱)  
ماصل ہوتا ہے۔ اس لیے مشترک نقطوں کے فضے مساوات (۱) سے ماصل  
ہوتے ہیں جس کو شکل

م لا + (م ج -  $۴$   $۱$  لا) ج = ..... (۲)  
میں لکھا جاسکتا ہے۔

اب چونکہ مساوات (۲) ایک دو درجی مساوات ہے اس لیے ہم دیکھتے  
ہیں کہ ہر خط مستقیم ایک مکانی سے دو نقطوں پر ملتا ہے جو حقیقی، منطبق، یا  
خیالی ہو سکتے ہیں۔

جب 'م' بہت چھوٹا ہو تو مساوات (۲) کی ایک اصل بہت بڑی ہوگی  
اور جب 'م' صفر کے مساوی ہو تو ایک اصل لا انتہا بڑی ہوگی۔ اس لیے  
ہر وہ خط مستقیم جو مکانی کے محور کے متوازی ہو مکانی سے ایسے دو نقطوں  
میں گاہن میں سے ایک محدود فاصلہ پر ہوگا اور دوسرا اس سے لامتناہی فاصلہ پر

۹۴۔ وہ شرط معلوم کرو کہ خط ما =  $م$  لا + ج، مکانی ما۔  $۴$   $۱$  لا =

## کو مس کرے۔

حسب دفعہ سابق اُن نقطوں کے فاصلے جو خط مستقیم اور مکانی میں مشترک ہیں مساوات

$$(م + لا ج) = ۲ = لا ۱۴$$

$$یعنی م' لا + (۲ م ج - لا ۱۴) = ۲ ج$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر خط مماس ہے یعنی اگر وہ مکانی کو دو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے تو مساوات کی اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہونی چاہئیں۔ اسکے لیے شرط ہے

$$۲ م ج = (۲ م ج - لا ۱۴)$$

$$جو م ج = لا یا ج = \frac{1}{م} \text{ میں تحویل ہوتی ہے۔}$$

پس خواہ م کچھ بھی ہو خط

$$ما = م + لا + \frac{1}{م}$$

مکانی ما = لا کو مس کرے گا۔

مثال ۱۔ خط ما = لا + ۲ مکانی ما = لا ۸ = کو مس کرتا ہے۔

مثال ۲۔ خط ما = لا ۳ + \frac{1}{4} مکانی ما = لا ۲ = کو مس کرتا ہے۔

۹۵۔ اُس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو ایک

مکانی پر کے دو دے ہوئے نقطوں میں سے گزرے  
نیز اس کے کسی نقطہ پر مماس کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ مکانی کی مساوات

$$ما = لا ۱۴$$

ہے اور فرض کرو کہ اس پر دو نقطوں کے محدود (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔

مساوات (ما - ما) (ما - ما) = ما - لا ..... (۱)

کو مختصر کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ وہ پہلے درجہ کی مساوات ہے اور اس لیے وہ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔ اگر اس میں لا = لا اور ما = ما دج کیا جائے تو دائیں جانبی رکن متماثل معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن اس وجہ سے معدوم ہوتا ہے کہ (لا، ما) مکانی پر ہے۔

اس لیے نقطہ (لا، ما) خط مستقیم (۱) پر ہے اور اسی طرح نقطہ (لا، ما) بھی اس خط پر ہے۔

پس مطلوبہ خط کی مساوات (۱) ہے اور یہ مساوات

(ما + ما) - (ما - لا) - ما = لا ..... (۲)

میں تحویل ہوتی ہے۔

(لا، ما) پر ما کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۲) میں صرف ما = ما درج کرنا ہوگا چنانچہ مطلوبہ مساوات

$$۲ ما - ما - لا - ما = لا$$

ہے یا چونکہ

$$۲ ما - لا - لا = لا ..... (۳)$$

**دوسرا ثبوت :-** (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے گزرنے والے

خط کی مساوات [حسب دفعہ ۲۴]

$$۰ = \begin{vmatrix} ۱ & ما & لا \\ ۱ & ما & لا \\ ۱ & ما & لا \end{vmatrix}$$

ہے اور اس لیے

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

اس آخری مقطع کو پھیلاؤ اور مام۔ مام سے تقسیم کرو، تب حسب سابق وتر کی

مساوات

$$۱ (۱ + ۱) - (۱ + ۱) = ۱$$

حاصل ہوگی۔

نتیجہ صریح :- نقطہ (۰، ۰) پر ماس لا = ۰ ہے یعنی اس پر کا

ماس محور کے عمود وار ہوتا ہے۔

(۱۱۴)

۹۶ — ہم نے دو مختلف طریقوں (دفعات ۹۴ اور ۹۵) سے مکانی کے ماس کی مساوات کی دو شکلیں حاصل کی ہیں۔ ان میں سے کسی ایک شکل کو دوسرے سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ فرض کرو کہ ہم جانتے ہیں کہ (لا، مام) پر کے ماس کی مساوات

$$۱۲ (لا + مام)$$

$$= ۱۲ + لا = ۱۲$$

ہے۔ تب

اگر یہ وہی خط ہو جو مساوات

$$۱۲ = لا + ج$$

سے حاصل ہوتا ہے تو

$$۱۲ = ج اور ج = ۱۲$$

اس لیے ج = ۱، بیساکہ دفعہ ۹۴ میں حاصل ہوا تھا۔ سوالات کے حل کرنے میں ماس کی مساوات کی وہ شکل لینی چاہیے جو سہولت بخش معلوم ہو۔

مثال ۱۔ ایک مکانی کے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع کا معین ان مساویوں کے نقطہ تماس کے معینوں کا اوسط حسابی ہوتا ہے۔

نقاط (لا، ما) اور (لا، ما) پر ماسوں کی مساواتیں

$$ما = لا + \frac{1}{2} (لا + لا)$$

$$ما = لا + \frac{1}{2} (لا + لا)$$

تفریق سے ان کے مشترک نقطہ کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$ما - لا = (ما - لا) = لا - لا = 0$$

$$\frac{1}{2} (ما - لا) = 0$$

$$\frac{1}{2} (ما + لا) = 0$$

تب معلوم ہو گا کہ

$$لا = ما$$

مثال ۲۔ ایک مکانی کے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو جبکہ ماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں۔ فرض کرو کہ دو ماسوں کی مساواتیں

$$ما = لا + \frac{1}{2} (لا + لا) \dots \dots \dots (۱)$$

$$ما = لا + \frac{1}{2} (لا + لا) \dots \dots \dots (۲)$$

ہیں۔ یہ ماس چونکہ علی القوائم ہیں اس لیے  $ما = لا$ ۔ پس دوسری مساوات لکھی جاسکتی ہے

$$ما = لا - \frac{1}{2} (لا + لا) \dots \dots \dots (۳)$$

ان کا مشترک نقطہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں صرف (۳) کو (۱) میں سے تفریق کرنا ہو گا چنانچہ

(۱۱۵)

$$0 = لا (ما + لا) + (ما + لا) \frac{1}{2}$$

اور اس لیے

$$= 1 + 0$$

مرتب کی مساوات ہے۔  
پس مطلوبہ طریق کی مساوات  $1 + a = 0$  ہے اور یہ (موجب دفعہ ۴۰)

۹۷۔ ایک مکانی کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا۔

مکافی ما<sup>۲</sup> - م<sup>۱</sup> لا = . کے نقطہ (لا، ما) پر حماس کی مساوات  
(دفعہ ۹۵)

(1) . . . . . '(U+U) 12 = 66

-4

عماد وہ خط ہے جو (لا، لاء، لے) میں سے گزرتا ہے اور ماس پر عمود ہے۔  
اس لیے اس کی مساوات (دفعہ ۳۰)

$$(2) \dots \dots \dots \therefore = (11 - 11) 16 + 12 (16 - 16)$$

-4-

چونکہ  $14 = 2 \times 7$  اس لیے اوپر کی مساوات کو شکل

$$(3) \dots\dots\dots = (b - 1) \alpha + (b - 1) \beta$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس کو لکھ سکے ہیں

(v)  $\dots\dots\dots \frac{16}{14} + 1 + 11 \frac{16}{12} = 1$

اگر ہم  $m = \frac{1}{12}$  رکھیں تو  $12 = m$  اور  $\frac{1}{12} = \frac{1}{m}$

اس لیے مساوات (۴) ہو جاتی ہے

(5) . . . . . '  $\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = 6$

عماد کی مساولات کی یشکل بعض اوقات مفید ہوتی ہے۔

۹۸ - اب ہم مکافی گئے چند ہندسی خواص ثابت کریں گے۔





مساوی ہیں۔

اس لیے زاویہ ماس ن = زاویہ ماس م ن = ایک زاویہ قائمہ... (ضہ)  
پھر چونکہ م نقطہ (ل، ما) ہے اور م نقطہ (ل، م) ہے اس لیے  
خط م م کی مساوات

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{ل + ما}{ل م} = \frac{ل - م}{ل م}$$

ہے۔ یہ صرفاً نقطہ ن پر کے ماس پر جو مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے  
عمود ہے

م م، ن ت پر عمود ہے، ..... (صہ)

(۱۱۷) چونکہ م م، ن ت پر عمود ہے اور ن ت زاویہ م م ن م  
کی تنصیف کرتا ہے اس لیے وہ م کی تنصیف کرے گا۔ پس اگر م م  
اور ن ت کا نقطہ تقاطع م ہو تو م م = م م۔ لیکن  
م ل = ل م۔ اس لیے (ل، م) و م کے متوازی ہے اور اس لیے  
وہ مکانی کے ماس پر ماس ہے۔ پس وہ خط جو مکانی کے ماسکے میں  
سے گزرے اور کسی ماس ن ت پر عمود ہو اس ماس سے

اس پر کے ماس پر ملتا ہے۔  
ہم اس آخری مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر ثابت کر سکتے ہیں:-  
فرض کرو کہ مکانی کے کسی ماس کی مساوات

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{ل}{م} + ل = م$$

ہے۔ اس خط کی مساوات جو ماسکے (ل، م) میں سے گزرے اور (۳) پر عمود ہو

$$ل - م = \frac{ل}{م} (ل - ل)$$

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{ل}{م} + \frac{ل}{م} = م$$

یا

ہے۔

خطوط (۳) اور (۴) سر یکا وہاں ملتے ہیں جہاں  $\text{لا} = ۰$ ۔  
 نقطہ ن (لا، ما) پر کے عماد کی مساوات  
 $۱۲ (ما - لا) + ما (لا - لا) = ۰$

ہے [دفعہ ۹۷]۔

نقطہ گ پر  $\text{ما} = ۰$  اور اس لیے

$$۱۲ - ما + ما (لا - لا) = ۰$$

$$۱۲ = لا - لا = (گ - ل) = ل - ل = گ$$

$$۱۲ = ل - ل = گ \dots \dots \dots (ن)$$

## مثالیں

۱۔ مکانی ما - ۱۴ لا = ۰ کے وتر خاص کے سروں پر کے ماسوں کی  
 اور عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو۔ جواب:  $لا \mp ما + ۱ = ۰$ ،  
 $ما \pm لا + ۱۳ = ۰$

۲۔ وہ نقطے معلوم کرو جہاں خط ما = ۳ لا - ۱، مکانی ما - ۱۴ لا = ۰  
 کو قطع کرتا ہے۔ جواب:  $(۱۲، ۱)$ ،  $(\frac{۱}{۹}، -\frac{۲}{۳})$

۳۔ ثابت کرو کہ مکانی ما - ۱۴ لا = ۰ کے نقطہ (لا، ما) پر کا ماس  
 مکانی کے نقطہ  $(\frac{۱}{لا}، -\frac{۱۴}{ما})$  پر کے ماس پر عمود ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ خط ما = ۲ لا +  $\frac{۱}{۴}$ ، مکانی ما - ۱۴ لا = ۰ کو

منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے۔  
 ثابت کرو کہ وہ  $۲۰ لا + ۲۰ ما = ۱$  کو بھی منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

۵۔ ایک خط مستقیم،  $لا + ما = ۲$  اور  $ما = ۸$  لا دونوں کو مس کرتا ہے۔  
ثابت کرو کہ اس کی مساوات  $ما = \pm (لا + ۱۲)$  ہے۔  
۶۔ ثابت کرو کہ خط  $لا + ما = ۱۳$  منحنی  
 $ما^۲ - لا - ۸ = ۱۴ + ما = ۰$

کو مس کرتا ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ مساوات  $لا + ما + ۴ لا + ۲ ما = ۰$ ، ایک مکانی کو  
تعبیر کرتی ہے جس کا اس نقطہ  $(۲، ۱۲)$  پر ہے اور جس کا وتر خاص  $۲$  ہے  
اور جس کا محور محور ما کے متوازی ہے۔  
۸۔ ثابت کرو کہ وہ تمام مکانی جن کے محور محور ما کے متوازی ہیں شکل  
 $لا + ۲ لا + ۲ ب + ما + ج = ۰$

کی مساواتوں سے تعبیر ہوتے ہیں۔

۹۔ حسب ذیل مکافیوں میں سے ہر ایک کے راس کے محدود وتر خاص  
طول معلوم کرو۔

$$(۱) \quad ما^۲ = لا + ۱۰، \quad (۲) \quad لا - ۲ لا + ما = ۰،$$

$$(۳) \quad (۲ - ما)^۲ = ۵ (لا + ما)، \quad (۴) \quad ۳ لا + ۱۲ لا - ما = ۰،$$

جواب: (۱)  $(۰، ۲)$ ، (۲)  $(۲، ۲)$ ، (۳)  $(۲، ۲)$ ، (۴)  $(۲، ۲)$

$$(۳) \quad (۲ - ما)^۲ = ۵ (لا + ما)، \quad (۴) \quad ۳ لا + ۱۲ لا - ما = ۰،$$

۱۰۔ مثال ۹ کے مکافیوں میں سے ہر ایک کے ماسک کے محدود وتر خاص کی  
مساوات معلوم کرو۔

$$\text{جواب (۱) } (۰، \frac{۳}{۲})، (۲) \quad ما^۲ = لا + ۱۳،$$

$$(۲) \quad (۲ - ما)^۲ = ۵ (لا + ما)،$$

$$(۳) \quad (۲ - ما)^۲ = ۵ (لا + ما)،$$

$$(۴) \quad (۲ - ما)^۲ = ۵ (لا + ما)،$$

۱۱۔ اُس مکانی کی مساوات لکھو جس کا ماسک مبدا پر ہے اور جس کا مرتب  
خط  $۲ لا - ما - ۱ = ۰$  ہے ثابت کرو کہ خط  $ما = ۲ لا - ۱$ ، اس مکانی کو مس کرتا ہے۔

۱۲۔ اگر ایک مکانی کے محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے کوئی وتر  $ON$  کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ  $N$  اور  $O$  پر کے معینوں کا مستطیل، رقبہ میں متقل ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ فاصلوں کا حاصل ضرب متقل ہوگا۔

۱۳۔ ماسوں  $M = m + \frac{1}{m}$  اور  $M = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}$  کے نقطہ تقاطع کے عدد معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے جبکہ  $M$  متقل ہو۔ نیز ثابت کرو کہ اگر  $M = 1$  تو یہ خط مرتب ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ  $M$  کی تمام قیمتوں کے لیے خط  $M = m(1 + \frac{1}{m}) + \frac{1}{m}$ ، مکانی  $M = \frac{1}{m}(1 + \frac{1}{m})$  کو مس کرے گا۔

(۱۱۹)

۱۵۔ دو خطوط مستقیم باہم علی القوائم ہیں اور ان میں سے ایک، مکانی  $\frac{1}{m}(1 + \frac{1}{m})$  کو مس کرتا ہے اور دوسرا،  $M = \frac{1}{m}(1 + \frac{1}{m})$  کو۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع خط  $1 + \frac{1}{m} = 0$  پر ہوگا۔

۱۶۔ اگر ایک مکانی کے کسی ماس پر محور پر کے دو نقطوں سے جو ماس کے سے مساوی فاصلوں پر ہوں عمود کھینچے جائیں تو ان کے مربعوں کا فرق متقل ہوگا۔

۱۷۔ دو خطوط مستقیم  $AF$  اور  $AC$  کو ایک مکانی کے راس میں سے ایک دوسرے کے علی القوائم کھینچا گیا ہے اور یہ خطوط منحنی سے نقطوں  $F$  اور  $C$  پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط  $FC$  محور کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

۱۸۔ اگر دائرہ  $LA + MA + (LA + B + MA + C) = 0$ ، مکانی  $M = \frac{1}{m}(1 + \frac{1}{m})$  کو چار نقطوں پر قطع کرے تو ان نقطوں کے معینوں کا جبری مجموعہ صفر ہوگا۔

[۱۶ اور ۱۷ سے ضرب دو اور  $M = \frac{1}{m}(1 + \frac{1}{m})$  لاکر بجائے  $M$  درج کرو۔ تب معین

مساوات

$$M + \frac{1}{m} + M + \frac{1}{m} + (M + \frac{1}{m} + B + MA + C) = 0$$

سے حاصل ہوں گے۔ ان چار معینوں کا مجموعہ صفر ہے کیونکہ مساوات میں  $M$  کی رقم نہیں ہے]

۱۹۔ اگر مکانی  $M = \frac{1}{m}(1 + \frac{1}{m})$  کا ماس محور سے  $t$  پر اور  $\frac{1}{m}$  پر کے

ماس سے ما پر ملے اور استیسلات ا ماق کی تکمیل کجائے تو ثابت کرو کہ ق کا  
طریق مکانی مآ + لا = ہے۔

۲۰۔ اگر ایک مکانی پر تین نقطے ف، ق، اس ہوں جن کے محدود  
سلسلہ ہندسیہ میں ہیں تو ثابت کرو کہ ف، ما پر کے ماس، ق کے معین پر  
۲۱۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو مکانی مآ - لا = میں بنایا

گیا ہو

$$\frac{1}{2} (ما - لا) (ما - لا) (ما - لا)$$

ہے جہاں ما، ما، ما، راسوں کے معین ہیں۔

۹۹۔ کسی نقطہ سے ایک مکانی پر دو ماس کھینچے جاسکتے ہیں جو  
حقیقی، منطبق، یا خیالی ہونگے بموجب اس کے کہ نقطہ مکانی  
کے باہر، اس کے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

وہ خط جس کی مساوات

$$ما = م لا + \frac{1}{م} \dots \dots \dots (۱)$$

ہے مکانی مآ = لا کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ بھی ہو (دفعہ ۴۴)۔

(۱۲۰) خط (۱) مخصوص نقطہ (لا، ما) میں سے گزرے گا اگر

$$ما = م لا + \frac{1}{م}$$

یعنی اگر  $ما - م لا = لا = ۰$ ،  $\dots \dots \dots (۲)$

مساوات (۲) ایک دو درجی مساوات ہے اور اس سے مکانی  
کے ان ماسوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے  
ہیں۔ لیکن چونکہ کسی دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں اس لیے

کسی نقطہ (لا، ما) میں سے دو ماس گزریں گے۔

(۲) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہوں گی بموجب اس کے کہ  
 ما<sup>۲</sup> ۱۲ لا مثبت، صفر، یا منفی ہو۔ یعنی [دفعہ ۹۲] بموجب اسکے کہ  
 (لا، ما) مکانی کے باہر، مکانی کے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

۱۰۰۔ اس خط کی مساوات معلوم کرنا جو ان دو ماسوں کے  
 نقاط تماس میں سے گزرے جو کسی نقطہ سے ایک مکانی پر  
 کھینچے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ (لا، ما) اس نقطہ کے محدود ہیں جس سے ماس کھینچے گئے ہیں۔  
 فرض کرو کہ ماسوں کے نقاط تماس کے محدود (ما، ک) اور (لا، ک) ہیں۔

(ما، ک) اور (لا، ک) پر کے ماسوں کی مساواتیں

$$\text{ماک} = ۱۲ (لا + ما)$$

$$\text{ماک} = ۱۲ (لا + لا)$$

ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ (لا، ما) ان دو خطوں پر ہے۔

$$\text{ماک} = ۱۲ (لا + ما) \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{ماک} = ۱۲ (لا + لا) \dots \dots \dots (۲)$$

لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) وہ شرطیں ہیں کہ نقاط (ما، ک)  
 اور (لا، ک) اس خط مستقیم پر واقع ہوں جس کی مساوات

$$\text{ما} = ۱۲ (لا + لا) \dots \dots \dots (۳)$$

ہے۔

پس (۳) اس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو نقطہ (لا، ما) سے  
 کھینچے ہوئے ماسوں کے نقاط تماس میں سے گزرتا ہے۔

اگر کسی نقطہ ن سے ایک مکانی کے ماس کیسے جائیں تو ان کے قاطع ماس کو ملانے والے خط کو ہم مکانی کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی کہیں گے۔

[دفعہ ۶، دیکھو]۔

۱۰۱۔ اگر ایک مکانی کے لحاظ سے نقطہ ف کا قطبی، نقطہ ق میں سے (۱۲۱) مزرے تو نقطہ ق کا قطبی، ف میں سے گذرے گا۔

فرض کرو کہ ف کے محدد (لا، ما) ہیں اور ق کے (لا، ما)۔  
مکانی ما۔ ۱۲ = لا۔ کے لحاظ سے نقطہ ف کے قطبی کی مساوی

$$ما = ۱۲ (لا + لا)$$

ہے۔ اگر یہ خط نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتا ہے تو حاصل ہونا چاہیے

$$ما = ۱۲ (لا + لا)$$

اس نتیجہ کے تشاکل سے ظاہر ہے کہ یہ وہ شرط بھی ہے کہ ق کا قطبی ف میں سے گذرے۔

ٹھیک اسی طریقہ پر جو دفعہ ۸، میں اختیار کیا گیا ہے یہ ثابت یا جاسکتا ہے کہ اگر دو نقطوں ف اور ق کے قطبی نقطہ مرا پر ملیں تو مرا خط ف ق کا قطب ہوگا۔

ماسکہ (و) کا قطبی لا + ۱ = ہے اور اس لیے ماسکہ کا قطبی مرتب

اگر مرتب پر کوئی نقطہ ق ہو تو ق، ماسکہ میں سے قطبی پر ہوگا اور اس لیے ق کا قطبی، س میں سے گذرے گا۔ پس مرتب پر کے کسی نقطہ سے ایک مکانی کے ماس کیسے جائیں تو نقاط ماس کو ملانے والا خط ماسکہ میں سے گذرے گا۔

۱۰۲۔ مکانی کے متوازی و تروں کے کسی نظام کے وسطی عطفوں کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے جو مکانی کے محور کے متوازی ہوتا ہے۔

مکانی  $\lambda^2 - \lambda^2 = 0$  پر کے دو نقطوں (لا، ما) اور (لام، ما) کو ملائیو آ  
خط کی مساوات [دفعہ ۹۵ (۳)]

$$\lambda^2 - \lambda^2 = 0 \quad (1)$$

ہے۔ اب اگر خط (۱) مکانی کے محور کے ساتھ نزادویہ طہ بنائے تو

$$(2) \quad \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda^2} = \text{مس طہ}$$

لیکن اگر اس وتر کے وسطی نقطہ کے محدود (لا، ما) ہوں تو

$$\lambda^2 = \lambda^2 + \lambda^2, \quad \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda^2$$

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2} = \text{مس طہ} \quad (2) \text{ سے} \quad (123)$$

$$(3) \quad \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda^2 \quad \text{یا اس لیے ماستقل ہے تا آنکہ طہ مستقل ہو۔}$$

پس مکانی کے متوازی و تروں کے کسی نظام کے وسطی  
نقطوں کا طریق، مکانی کے محور کے متوازی ایک خط مستقیم ہے۔

دوسرا ثبوت: خط  $\lambda = \lambda + \lambda$ ، مکانی  $\lambda^2 = \lambda^2$  کو وہاں قطع

کرتا ہے جہاں  $\lambda^2 = \lambda + \lambda$  اس لیے اگر وتر کے نقطہ وسطی کا معین  
ما ہو تو ج کی تمام قیمتوں کے لیے  $\lambda^2 = \lambda$

تعریف۔ کسی مخروطی کے متوازی و تروں کے ایک نظام کے

وسطی نقطوں کے طریق کو مخروطی کا قطر کہتے ہیں اور قطر جن و تروں کی تنیف  
کرتا ہے ان کو قطر کے معین کہتے ہیں۔

ہم دفعہ ۹۳ میں دیکھ چکے ہیں کہ مکانی کا کوئی قطر اس سے صرف ایک



نقطہ پر ملتا ہے جن کا فاصلہ اس سے محدود ہوتا ہے۔ وہ نقطہ جہاں قطر منحنی کو قطع کرتا ہے قطر کا سیرا کہلاتا ہے۔

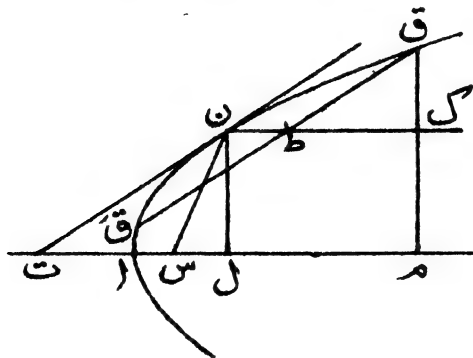
۱۰۳۔ ایک قطر کے سرے پر کا ماس اُن وتروں کے متوازی ہوتا ہے جنکی وہ تنصیف کرتا ہے۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ مکانی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطے سب کے سب ایک قطر پر واقع ہوتے ہیں۔ پس متوازی ماس یعنی اُس متوازی وتر پر غور کرنے سے جو منحنی کو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ متوازی وتروں کے نظام کا قطر اُس ماس کے نقطہ تماس میں سے گزرتا ہے جو وتروں کے متوازی ہے۔

۱۰۴۔ مکانی کی مساوات معلوم کرنا جبکہ کسی قطر اور اس کے سرے پر کے ماس کو محور قرار دیا جائے۔

فرض کرو کہ قطر کا سیرا ن ہے اور فرض کرو کہ ن پر کا ماس محور کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ تب

$$ل ن = ۱۲ مم طہ [دفعہ ۱۰۲ (۳)]$$



$$\therefore \text{ال} = \frac{\text{ن}^2}{\text{م}} = \text{م}^2$$

فرض کرو کہ نئے محوروں کے حوالے سے ق کے محدود (لا، ما) ہیں۔  
ق م کو مکانی کے محور پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ وہ 'قطن ط کو ک پر  
قطع کرتا ہے۔

تب  $\text{م}^2 = \text{ق} = \text{ن} + \text{ک} = \text{ق} = ۲ \text{م}^2 + \text{ماجم ط} \dots (۱)$   
 $\text{م}^2 = \text{ال} + \text{ال} = \text{م} = \text{ال} + \text{ن} + \text{ط} + \text{ط}^2$

لیکن  $\text{ق} = \text{م}^2 = ۲ \text{م}^2 + \text{لا} + \text{ماجم ط} \dots (۲)$   
 اس لیے (۱) اور (۲) سے

$$(۲ \text{م}^2 + \text{ماجم ط}) = ۲ \text{م}^2 + (\text{م}^2 + \text{لا} + \text{ماجم ط})$$

یا  $\text{ماجم ط} = \text{م}^2 + \text{لا} \dots (۳)$

لیکن  $\text{ال} = \text{م}^2$ ، اس لیے  $\text{ن} = \text{ال} + \text{ال} = \frac{1}{\text{جب ط}}$

اس لیے  $\text{ن}$  کی بجائے  $\frac{1}{\text{جب ط}}$  رکھنے سے منحنی کی مساوات

$$\text{م}^2 = ۲ \text{م}^2 + \text{لا} \dots (۴)$$

ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ محوروں کو خواہ کسی طرح تبدیل کیا جائے مساوات  
 $\text{م}^2 - ۲ \text{م}^2 = \text{لا}$  کی شکل

(ال + م + ن) + ل + م + م + ن = ۰  
 ہوگی (دیکھو تیسرا باب) اور اس لیے کسی مکانی کی مساوات میں جو خواہ کسی

محوروں کے حوالے سے ہو دوسرے درجہ کی رقیں ایک کامل مربع

بناتی ہیں۔

اس کے بالعکس شکل

$$(ل + لا + م + ما + ن) + (ل + لا + م + ما + ن) = .$$

کی کوئی مساوات جس میں دو سرے درجہ کی رقیں ایک کامل مربع بناتی ہیں ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ منہی کے کسی نقطہ سے خط  $ل + لا + م + ما + ن = .$  پر کا عمود ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو اسی نقطہ سے  $ل + لا + م + ما + ن = .$  پر ٹھینچا گیا ہو اور اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ان خطوں کو لا اور ما کے نئے محور قرار دیا جائے تو منہی کی مساوات کی شکل  $ما = لا$  ہو جاتی ہے۔

اس طرح مساوات  $(ل + لا + م + ما + ن) + (ل + لا + م + ما + ن) = .$

ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ایک قطر  $ل + لا + م + ما + ن = .$

ہے اور اس کے سرے پر کا ماس  $ل + لا + م + ما + ن = .$  ہے۔

۱۰۵۔ اگر ایک مکانی کی مساوات کسی قطر اور اس ماس کے حوالے سے جو قطر کے سرے پر ٹھینچا گیا ہو  $ما = لا$  ہو تو خط  $ما = م + لا + لا + م$

م کی تمام قیمتوں کے لیے اس کا ایک ماس ہو گا، کسی نقطہ  $(لا، ما)$  پر کے

ماس کی مساوات  $ما - لا = (لا + لا) = .$  ہوگی، مکانی کے لحاظ سے

نقطہ  $(لا، ما)$  کے قطبی کی مساوات  $ما - لا = (لا + لا) = .$  ہوگی، اور خط  $ما = م + لا$  کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق  $ما = لا + م$  ہو گا۔

ان مسئلوں کے لیے نئی تحقیق کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ دفعات

۹۴، ۹۵، ۱۰۰ اور ۱۰۲ برابر درست رہتے ہیں خواہ محاور علی القوائم ہوں یا نہ ہوں۔

(۱) مکانی کے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنا جبکہ ماس ایک دوسرے کے ساتھ ایک دیا ہوا زاویہ بنائیں۔

خط  $MA = m$ ،  $LA = \frac{1}{m}$ ، مکانی  $MA = m$ ،  $LA = \frac{1}{m}$  کا ماس ہے خواہ  $m$  کی قیمت کچھ ہی ہو [دفعہ ۹۴]۔

اگر  $(LA)$  کو معلوم فرض کیا جائے تو اس مساوات سے ان ماسوں کی سمتیں معلوم ہونگی جو اس نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔ چنانچہ سمتوں کو معلوم کر نیکی لیے مساوات ہوگی

(۱۲۵) اور اگر اس دو درجی مساوات کی اصلیں  $m$  اور  $m$  ہوں تو

$$\frac{1}{m} = m + 1 \text{ اور } \frac{1}{m} = m + 1$$

$$\frac{1}{m} - m = 1 \Rightarrow (m - 1) = \frac{1}{m}$$

لیکن اگر دو ماس ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ  $e$  بنائیں تو

$$\frac{1}{m} - m = e$$

$$\frac{1}{m} - m = e \Rightarrow \frac{1}{m} - m = e$$

اس لیے مطلوبہ طریق کی مساوات

$$MA = m - (LA + 1) = e$$

ہے۔ (۲) اس عموذ کے پائین کا طریق معلوم کرنا جو ایک ثابت نقطہ سے مکانی کے کسی ماس پر کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ مکانی کی مساوات  $MA = m$ ،  $LA = \frac{1}{m}$  ہے اور ثابت نقطہ کے

محد (م، ک) ہیں۔

مکانی کے کسی ماس کی مساوات

$$م = لا + \frac{1}{م} \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔ اُس خط کی مساوات جو (م، ک) میں سے گزرتا ہے اور خط (۱) پر عمود

$$م - ک = - \frac{۱}{م} (لا - م) \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔

طریق کو معلوم کرنے کے لیے م کو مساواتوں (۱) اور (۲) سے ساقط کرنا ہوگا۔ چنانچہ (۲) کی رو سے

$$م = - \frac{لا - م}{م - ک}$$

اور اس لیے (۱) میں درج کرنے سے

$$م + \frac{لا - م}{م - ک} = لا + \frac{م - ک}{لا - م} =$$

$$یا \quad م (م - ک) (لا - م) + (لا - م) (م - ک) = (م - ک) (لا - م) \dots \dots (۳)$$

اس لیے طریق تیسرے درجہ کا ایک بنتی ہے۔

(۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ و خود ہمیشہ طریق پر رہتا ہے۔ اگر نقطہ و مکانی کے باہر ہو تو اس سے کوئی شکل پیدا نہیں ہوتی کیونکہ ایسی صورت میں و میں سے دو حقیقی ماس کھینچے جاسکتے ہیں اور و سے ان ماسوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان کا پائین خود نقطہ و ہوگا۔ جب نقطہ و مکانی کے اندر ہوتا ہے تو و سے کھینچے ہوئے ماس خیالی ہوتے ہیں اور اس لیے و سے ان پر کھینچے ہوئے عمود بھی خیالی ہوتے ہیں لیکن وہ سب نقطہ و میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے و طریق پر ایک نقطہ ہے۔

اگر  $م = لا$  تو  $ک =$  یعنی جب و مکانی کے ماسک پر ہوتا ہے تو

(۱۲۶) مساوات (۳) تحویل ہو کر لا  $\{ \lambda^2 + (-\lambda - 1) \} = 0$  ہو جاتی ہے اور اس لیے کہی،

نقطہ دائرہ  $MA + (LA - A) = 0$  اور خط مستقیم  $LA = 0$  میں گویں ہوتا ہے۔

(۳) اُس مثلث کا مرکز عمودی جو مسکانی کے تین تماسوں

سے بنے مرتبہ ہوتا ہے۔

فرض کر دو کہ مثلث کے اضلاع کی مساواتیں

$$\frac{1}{\bar{m}} + \bar{m} = 1, \quad \frac{1}{\bar{m}} + \bar{m} = 1, \quad \frac{1}{\bar{m}} + \bar{m} = 1.$$

ہے مکانی  $۲-۱=۱$  کا ایک عماد ہے خواہ  $۱$  کی قیمت کچھ ہی ہو۔  
 اگر نقطہ (لا، ما) کو معلومہ فرض کیا جائے تو مساوات (۱) سے ان  
 عمادوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو اس نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔  
 اگر (۱) کی اصلیں  $۱$ ،  $۲$ ،  $۳$  ہوں تو

$$۱، ۲، ۳ = -\frac{۱}{۱}، \dots \dots \dots (۲)$$

لیکن اگر عمادوں میں سے دو (فرض کرو وہ جو  $۱$ ،  $۲$  سے حاصل ہوتے ہیں) علی القوام ہوں تو

$$۱، ۲ = ۱- اور اس لیے (۲) سے  $۳ = \frac{۱}{۱}$$$

لیکن  $۳$ ، (۱) کی ایک اصل ہے

$$۱ = \frac{۱}{۱} - ۱ - ۲ = \frac{۳}{۱}$$

اس طرح  $۱ = ۱ - (۱۳ - ۱)$  مطلوبہ طریق کی مساوات ہے۔

۱۰۶۔ ”عماد نقطے۔ مکانی  $۲-۱=۱$  کے کسی نقطہ  
 (لا، ما) پر کے عماد کی مساوات

$$۱، ۲ (ما - ۱) + (لا - ۱) = ۰ \dots \dots (۱)$$

ہے۔ اگر خط (۱) نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرے تو

$$۱، ۲ (ک - ۱) + (ھ - ۱) = ۰ \dots \dots (۲)$$

مساوات (۲) سے ان نقطوں کے معین حاصل ہوتے ہیں جن پر کے  
 عماد مخصوص نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتے ہیں۔ یہ مساوات  
 ایک کعبی مساوات ہے اور اس لیے کسی نقطہ میں سے مکانی کے تین  
 عماد (جن میں سے کم از کم ایک حقیقی ہونا چاہیے) کھینچے جاسکتے ہیں۔  
 چونکہ مساوات (۲) میں  $۱$  کی کوئی رقم شامل نہیں ہے اس لیے

اگر اس کی اصلیں ما، ما، ما، ما ہوں تو

اب ہم جانتے ہیں کہ مکانی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے لیے ان میں سے کسی وتر کے سروں پر کے دو معینوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ [دفعہ ۱۰۲]۔ اس لیے ان نقطوں پر کے عماد ایک ثابت نقطہ کے عماد پر ملتے ہیں جس کے معین کو عمادوں کے معینوں کے مجموعہ میں جمع کرنے پر صفر حاصل ہوتا ہے۔

پس ان عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق جو ایک مکانی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے سروں پر گھنچے گئے ہوں ایک خط مستقیم ہے جو نخنی کا ایک عماد ہے۔

اگر ف، ق، س، پ کے عماد (ہ، ک) پر ہیں تو ف، ق، س کے معین مساوات

$$ما + ۱۴ (۱۲ - ۱۰) - ۸ = ۰ \quad (۴) \dots$$

کی اصلیں ہیں۔ اب فرض کرو کہ دائرہ ف، ق، س

لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف + ۲ ج = ۰  
ہے۔ ۱۶ سے ضرب دو اور ۴ لاکے بجائے ما رکھو تو دائرہ اور مکانی کے تقاطع کے معین مساوات

$$ما + ۱۶ (۸ - ۲) گ + ۳۲ ف + ۱۶ ج = ۰ \quad (۵) \dots$$

کی اصلیں ہیں۔

پس ما + ما + ما + ما = ۰۔ لیکن (۴) سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطوں ف، ق، س کے لیے ما + ما + ما = ۰۔ اس لیے ما = ۰۔ اور اس لیے دائرہ ف، ق، س (ہ، ک) کی تمام



قیمتوں کے لیے مکانی کے راس میں سے گذرتا ہے۔  
پس ج = ۰ اور پھر (۴) سے 'ف' 'ق' 'س' کے معین مساوات  
(۶)  $۱۸ + ۱۸ (۱۲ + ۱۲) + ۳۲ = ۰$  ..... (۶)  
کی اصلیں ہیں۔

(۴) اور (۶) کا مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ  
 $۲$  گ =  $۰$  -  $(۱۲ + ۱۲)$  اور  $۴$  ف =  $۰$  - ک  
اس طرح وہ دائرہ جو ان تین نقطوں میں سے گذرتا ہے جن پر کے  
عماد نقطہ (۱۲، ۱۲) میں سے گذرتے ہیں  
 $۱۸ + ۱۸ - (۱۲ + ۱۲) = ۰$  ل -  $\frac{۱}{۲}$  ک م = ۰

ہے۔  
یہ ا مکانی م -  $۱۸ = ۰$  ل -  $۱۸$  پر کے کسی نقطہ کے دونوں محدودوں کو ایک  
تفسیر کی رقوم میں بیان کرنا اکثر مفید ہوتا ہے۔  
سادہ ترین طریقہ لاکو ماک کی رقوم میں بیان کرنے کا ہے۔

نقطہ  $(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$  مریکا م -  $۱۸ = ۰$  ل -  $۱۸$  پر ہے اور اگر اس کو  
نقطہ م کہا جائے تو ہم نے حسب ذیل مساواتیں علی الترتیب (۱) و تر  
م - م کے لیے (۲) م پر کے ماس کے لیے (۳) م اور م پر کے  
ماسوں کے نقطہ تقاطع کے لیے معلوم کی ہیں:

$$(۱) م (م + م) - (۱۸ + ۱۸) = ۰$$

$$(۲) ۲ م م - (۱۸ + ۱۸) = ۰$$

$$(۳) ۴ م = م م اور ۲ م = م + م$$

دو شرائط جو اکثر استعمال کیا جاتا ہے ل =  $۱۸$  اور م =  $۱۸$  رکھنے کا ہے۔

نقطہ  $(۱۸, ۱۸)$  مریکا م -  $۱۸ = ۰$  ل -  $۱۸$  پر ہے اور اگر اس کو  
نقطہ ع کہا جائے تو ہم و تر ع، م وغیرہ کی مساواتیں دفعہ ۹۵ وغیرہ کے

طریقہ پر معلوم کر سکتے ہیں (یا اوپر کی مساواتوں میں  $ما$  کی بجائے  $۲$   $ع$ ، درج کر کے)۔ چنانچہ یہ مساواتیں

$$(۱) \quad ۱(ع + ع) - ۲(۲ - ۲ع + ع) = ۰$$

$$(۲) \quad ۱(ع + ع) - ۲(۲ - ۲ع + ع) = ۰$$

$$(۳) \quad ۱(ع + ع) - ۲(۲ - ۲ع + ع) = ۰$$

ہیں۔

مثال ۱۔ اگر ایک دائرہ کا قطر ایک مکانی کا ایسا وتر ہو جس کے سروں کے معینوں کا فرق وتر خاص کے طول کا دگنا ہے تو ثابت کرو کہ دائرہ مکانی کو مس کرے گا۔

فرض کرو کہ وتر کے سرے  $ما$ ،  $۱$  ہیں تو  $ما = ۸ - ۱$

دائرہ کی مساوات [دفعہ ۶۶ مثال ۲]

$$(۱) \quad (۱ - ۱) + (۱ - ۱) = ۰$$

ہے۔ یہ دائرہ مکانی کو ان نقطوں پر قطع کرتا ہے جن کے معین

$$۱۶ \quad (۱ - ۱) + (۱ - ۱) = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح دوسرے دو نقاط تقاطع کے معین مساوات

$$۱۶ \quad (۱ + ۱) + (۱ + ۱) = ۰$$

$$۱۶ \quad (۱ + ۱) + (۱ + ۱) = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس آخری مساوات کی اصلیں مساوی ہو چکی اگر

$$(۱ + ۱) = ۴ + ۱۶ + ۱۶$$

$$(۱ - ۱) = ۸ - ۱$$

یعنی اگر

مثال ۲۔ مکافیوں  $ما = ۴ - ۱$  اور  $لا = ۴ - ۱$  میں سے

کسی ایک میں مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع دوسرے مکافی کو مس کریں۔

فرض کرو کہ ما<sup>۱</sup> - ما<sup>۲</sup> = ۴ و لا = ۰ پر کوئی تین نقطے ما<sup>۱</sup>، ما<sup>۲</sup>، ما<sup>۳</sup> ہیں ایسے کہ خطوط ما<sup>۱</sup>، ما<sup>۲</sup> اور ما<sup>۳</sup>، ما<sup>۱</sup> میں سے ہر ایک، مکافی لا<sup>۱</sup> - ما<sup>۱</sup> = ۴ کو مس کر سکیں۔ تب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ خط ما<sup>۱</sup>، ما<sup>۲</sup> بھی (اس مکافی کو مس کرتا ہے۔

ما<sup>۱</sup>، ما<sup>۲</sup> کو ملانے والا خط

$$\text{ما}^1 + \text{ما}^2 - \text{لا}^1 - \text{ما}^1 = ۰$$

ہے۔ یہ خط دوسرے مکافی کو مس کرتا ہے اور اس لیے مساوات

$$(\text{ما}^1 + \text{ما}^2) - \text{لا}^1 - ۱۶ = ۴ - \text{ما}^1 = ۰$$

کی اصلیں مساوی ہیں اور اس لیے

$$\text{ما}^1 + \text{ما}^2 + ۱۶ = \text{لا}^1 = ۰ \quad (۱)$$

$$\text{ما}^1 + \text{ما}^2 + ۱۶ = \text{لا}^1 = ۰ \quad (۲)$$

تفریق کرنے اور ما<sup>۱</sup> - ما<sup>۲</sup> سے تقسیم کرنے پر جہاں ما<sup>۱</sup> - ما<sup>۲</sup> = ۴ صفر نہیں ہے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما}^1 + \text{ما}^2 + \text{ما}^3 = ۰ \quad (۳)$$

ما<sup>۱</sup> کو (۱) اور (۳) سے ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما}^1 + \text{ما}^2 + ۱۶ = \text{لا}^1 = ۰$$

جس سے ثابت ہے کہ ما<sup>۱</sup>، ما<sup>۲</sup> کو ملانے والا خط بھی لا<sup>۱</sup> = ۴ ب ما کو مس کرتا ہے۔

**مثال ۳** - مکافی ما<sup>۱</sup> - ما<sup>۲</sup> = ۴ و لا<sup>۱</sup> = ۰ میں کھینچے ہوئے مساوی الاضلاع

مثلثوں کے مرکوزوں کا طریق مکافی ما<sup>۱</sup> - ما<sup>۲</sup> = ۴ و لا<sup>۱</sup> = ۰ ہے۔

مساوی الاضلاع مثلث میں مرکز ہندسی مرکز عمودی پر منطبق ہوتا ہے۔

اب اس مثلث کا مرکز ہندسی جس کے راس نقطے ع<sup>۱</sup>، ع<sup>۲</sup>، ع<sup>۳</sup> ہیں

$$۳ = ۱ + ۲ = ۱ + (۱ + ۲) = ۱ + ۳ = ۴$$

اور  
سے معلوم ہوتا ہے۔

ثالث کے عمودوں میں سے دو، مساواتوں

$$۰ = (۱ + ۲) + (۱ + ۲) + (۱ + ۲) = ۶$$

$$۰ = (۱ + ۲) + (۱ + ۲) + (۱ + ۲) = ۶$$

سے معلوم ہوتے ہیں۔

تفریق کرنے پر

(۱۳۰)

پس چونکہ مرکز ہندسی اور مرکز عمودی منطبق ہوتے ہیں اس لیے

$$۳ = ۱ + ۲ + (۱ + ۲) = ۶$$

مثال ۴۔ ایک ثالث کے اضلاع، ۱، ۲، ۳ = ۶، کو مس کرتے

ہیں اور اس کے دو راس ۱، ۲ ب (۱ + ۲) = ۶ پر ہیں۔ تیسرے راس کا

طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ تین راس

$$(۱) \dots \dots \dots ۰ = ۱ + ۲ = ۳$$

$$(۲) \dots \dots \dots ۰ = ۱ + ۲ = ۳$$

$$(۳) \dots \dots \dots ۰ = ۱ + ۲ = ۳$$

اور  
ہیں۔ تب ثالث کے تین راس

$$\{ (ع + ع) (ع + ع) \} \{ (ع + ع) (ع + ع) \} \{ (ع + ع) (ع + ع) \}$$

ہیں۔

فرض کرو کہ آخری دور اس دوسرے مکافی پر ہیں، تب

$$1 (ع + ع) - 2 (ع + ع) - 3 (ع + ع) - 4 (ع + ع) = 0$$

$$1 (ع + ع) - 2 (ع + ع) - 3 (ع + ع) - 4 (ع + ع) = 0 \quad \text{اور}$$

$$1 (ع + ع) = (2 - 3) (ع + ع) \quad \text{اس لیے}$$

$$1 (ع + ع) = 2 (ع + ع) - 3 (ع + ع) \quad \text{اور}$$

$$1 (ع + ع) = 2 (ع + ع) - 3 (ع + ع)$$

لیکن تیسرے راس کے لیے لا = 1 (ع + ع) اور ما = 1 (ع + ع) - 2 (ع + ع) اس لیے مطلوبہ طریق مکافی

$$1 (ع + ع) = 2 (ع + ع) - 3 (ع + ع)$$

$$1 (ع + ع) = 2 (ع + ع) - 3 (ع + ع) \quad \text{یا}$$

ہے جو خود دوسرا مکافی ہے اگر لا = 2 - 3

## نفاذ

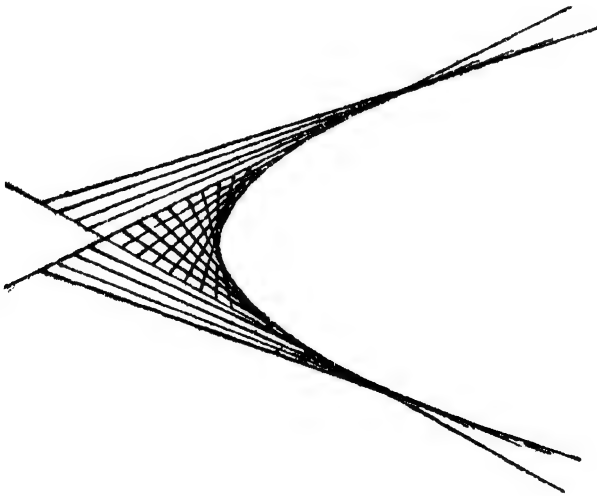
۱۰۸۔ اگر ایک نقطہ کے محدودوں میں کوئی جبری رشتہ ہو تو وہ ہر طرح حرکت کرنے میں آزاد نہیں ہوگا لیکن وہ ایک خاص منحنی پر کوئی محل اختیار

کر سکتا ہے۔ اس منحنی کو متحرک نقطہ کا طریق کہتے ہیں۔  
 اسی طرح اگر ایک خط مستقیم کی مساوات کے دو مستقلوں میں کوئی  
 رشتہ ہو تو خط ہر طرح حرکت کرنے میں آزاد نہیں ہوگا لیکن وہ ایسے لاتعداد  
 محل اختیار کر سکتا ہے جو سب کے سب ایک خاص منحنی کے محاس ہوں گے۔  
 اس منحنی کو متحرک خط کا لفاف کہتے ہیں۔

(۱۳۱)

مثلاً اگر مساوات  $l + m - a = 0$  کے مستقلوں  $l$  اور  $m$  میں  
 رشتہ  $l^2 + m^2 = 1$  ہو تو خط مستقیم  $l + m - a = 0$  اس طرح حرکت  
 کرے گا کہ نقطہ  $(0,0)$  سے اس کا عمودی فاصلہ ہمیشہ  $a$  کے مساوی ہوگا  
 اور اس لیے یہ خط اپنے تمام ممکن محلوں میں دائرہ  $l^2 + m^2 = a^2$  کو مس کرنا  
 چاہیے۔

حسب ذیل شکل میں ایک خط مستقیم کے مختلف محل دکھائے گئے  
 ہیں جو محوروں پر ایسے مقطوعے قطع کرتا ہے جن کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔



اب اگر  $t$  اور  $q$ ، کسی منحنی کے دو متصلہ محاس ہوں

اور اگر ماس ت ق بتدریج ت ف کی طرف حرکت کر کے بالآخر  
ت ف پر منطبق ہو جائے تو ماسوں کا نقطہ تقاطع 'نقطہ ف' کے  
قریب اور قریب تر حرکت کرے گا اور بالآخر اس پر اگر منطبق ہو جائیگا۔  
اس طرح دو منطبق ماسوں کا نقطہ تقاطع اس منحنی پر ہوتا ہے جس کو سب  
ماس مس کرتے ہیں۔ نیز وہ دو ماس جو کسی نقطہ سے ایک منحنی کے کھینچے  
جائیں منطبق ہوں گے اگر نقطہ منحنی پر ہو۔



اب خطوط مستقیم کے اس نظام پر غور کرو جو مساوات

$$\frac{ل}{ھ} + \frac{ما}{ل-ھ} = ۱ \text{ یا } ھ^۲ + ھ(ما-لا-ل) + ل(لا-ھ) = ۰ \quad (۱)$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ل مستقل ہے۔

چونکہ (۱) دو درجی مساوات ہے اس لیے ھ کی دو قیمتیں 'لا' اور 'ما'  
کی کسی معلومہ قیمتوں کے جواب میں حاصل ہوں گی۔ اس طرح کسی دے ہو  
نقطہ میں سے نظام کے دو خطوط مستقیم کھینچے جاسکتے ہیں۔ جب یہ دو خطوط  
منطبق ہوتے ہیں تو نقطہ (لا، ما) کو اس منحنی پر ہونا چاہیے جس کو تمام  
خطوط مس کرتے ہیں۔

پس اس منحنی کی مساوات جس کو نظام کے تمام خطوط مس کرتے  
ہیں یہ شرط لکھ لینے سے حاصل ہوگی کہ دو درجی (۱) کی دو اصلیں مساوی  
ہوں۔ اب (۱) کی دو اصلیں مساوی ہونگی اگر

$$۲ل = لا - ما - ل \quad (۲)$$

جو [صفحہ ۱۰۴] ایک مکانی کی مساوات ہے۔  
یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے کہ مکانی (۲) محوروں کو نقطوں  
(ل، ۰) اور (۰، ل) پر مس کرتا ہے۔  
اس طرح وہ تمام خطوط جو صفحہ (۱۸۶) کی شکل میں کیچے گئے ہیں ایک  
مکانی کو مس کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ خط مستقیم  $MA = m + \frac{1}{m} \text{ کافاف معلوم کرو۔}$   
مساوات کو لکھا جاسکتا ہے

(۱۳۳)

$m - LA = m + \frac{1}{m} = 0$  ..... (۱)  
چونکہ (۱) دو درجی مساوات ہے اس لیے لا اور ما کی کسی معلومہ قیمتوں کے  
جواب میں م کی دو قیمتیں ہیں۔ پس نظام کے دو خطوط کسی نقطہ (لا، ما) میں سے  
گزرتے ہیں۔ جب م کی دو قیمتیں مساوی ہوتی ہیں تو خطوط منطبق ہوتے ہیں اور  
(لا، ما) مطلوبہ لفافہ پر ہوتا ہے۔  
اب وہ شرط کہ (۱) کی دو اصلیں مساوی ہوں یہ ہے کہ  
 $m - LA = 0$

اور یہ مطلوبہ لفافہ ہے۔

مثال ۲۔ خطہ  $LA$  لاجم طہ + ب مابجب طہ + ج = ۰ کافاف معلوم کرو۔  
اس مساوات کو لکھا جاسکتا ہے

$$LA = (ج - \frac{1}{2} ط) + 2 + مابجب \frac{1}{2} ط + ج + (ج - \frac{1}{2} ط) = 0$$

$$یا LA + ج + 2 + ماب + (ج - LA) ت = 0$$

جہاں  $t = \frac{1}{2} ط$

اس طرح نظام کے دو خطوط کسی نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔ یہ  
خطوط منطبق ہوں گے اگر  
(لا + ج) (ج - لا) - ب<sup>۲</sup> ما<sup>۲</sup> = ۰



اس لیے لفاف ہے  $ل + لا + ب + ما = ج$   
 مثال (۳) -  $خط ل + لا + م + ا = ۱$ ۔ کالفاف شرط  $ل + ب + م + ج = ۰$  کے ساتھ معلوم کرو۔

$$ل + لا + م + ا = ۱ \text{ اور } ل + ب + م + ج = ۰$$

$$ل + ب + م + ج = ۰ \text{ (ل + لا + م + ا) = ۱}$$

لی کی دو قیمتوں سے نظام کے ان دو خطوں کی سمتیں حاصل ہوتی ہیں جو کسی نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں۔

یہ دو خطوط منطبق ہوں گے اگر لی کا مندرجہ صدر و درجی دو مساوی اعلیں رکھے جس کے لیے یہ شرط ہے کہ

$$(ل + ج لا) = (ب + ج ما)$$

$$\text{اس لیے مطلوبہ طریق } \frac{لا}{ل} + \frac{ما}{ب} + \frac{۱}{ج} = ۰ \text{ ہے۔}$$

مثال (۴) - مکانی ما، م، لا = ۰ پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن لی ہے، مکانی کا ماس ۱ ہے اور مستطیل ل ن م کی پیمائی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ م ل کالفاف ما + لا = ۰ ہے۔

مثال (۵) - ثابت کرو کہ اگر ان مقطوعوں کا مجموعہ جو ایک متحرک خط محوروں پر قطع کرتا ہے مستقل رہے تو خط ایک مکانی کو لف کرے گا۔

مثال (۶) - ایک خط مستقیم کالفاف معلوم کرو جو محوروں کو علی الترتیب ف، ق، پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ مثلث وق ق کا رقبہ مستقل رہتا ہے۔

مثال ۷ - ایک مکانی کے ایسے وتر کالفاف جس کے سروں پر کے معینوں کا فرق مستقل رہے مساوی مکانی ہوتا ہے۔

مثال ۸ - ایک مکانی کے وترن ق، ن مساوی منقطوع مستقیم کے

متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ قیاس مساوی مکانی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۹۔ ایک کثیر الاضلاع کو ایک مکافہ میں بنایا گیا ہے اور اس کثیر الاضلاع کے تمام اضلاعِ الا ایک کے معلومہ خطوط مستقیم کے متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر اضلاع کی تعداد جفت ہے تو باقی ضلع بھی ایک ثابت خط مستقیم کے متوازی ہوگا لیکن اگر اضلاع کی تعداد طاق ہے تو باقی ضلع ایک مکافہ کو لف کرے گا۔

مثال ۱۰۔ اگر دو ثابت نقطوں سے ایک متحرک خط پر عمود کھینچے جائے اور ان عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط ایک کمانی کوئی کرے گا۔

مثال ۱۱۔ مکانی ما<sup>۲</sup>۔ م<sup>۲</sup> لا =۔ کے کسی نقطہ ن پر کا عا د محور کو گ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو گ میں سے گزرتا ہے اور ن پر کے تماس کے متوازی ہے ہم ماسکی مکانی ما<sup>۲</sup> + م<sup>۲</sup> (لا - ۱۲) =۔ کو لف کرتا ہے۔

مثال ۱۲۔ ثابت کرو کہ ایک خط ف ق کا لفاف جو ایک مکانی

مثال ۱۲۔ ثابت کرو کہ ایک خط ف ق کا لف جو ایک مکانی کے کسی نقطہ ف میں سے اس طرح کھینچا گیا ہو کہ ف میں سے گزرنے والا قطر ف ق اور ف پر کے تماس کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے دو مرکز مکانی

مثال ۱۳۔ ایک دائرہ کے ایک وتر کا نقطہ وسطی ایک ثابت خط مستقیم پر ہے۔ ثابت کرو کہ یہ وتر ایک مکانی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۱۴۔ ایک مکانی کا ایک متغیر ماس ایک ثابت ماس کو نقطہ  
ن پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو ن میں سے گزرتا ہے اور متغیر ماس پر  
عمود ہے ایک مکانی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۱۵۔ ایک دئے ہوئے خط پر کے کسی نقطہ ن میں سے خط ن ق اس طرح کھینچا گیا ہے کہ وہ ایک دئے ہوئے مکافہ کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق کا لایف ایک دوسرا مکافہ ہے۔

مثال ۱۶۔ ایک دے ہوئے خط پر کے کسی نقطہ ن میں سے خطان ق اس طرح کھینچا گیا ہے کہ وہ ایک دے ہوئے مکانی کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی پر

عمود ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق کا لفاف ایک دوسرا مکافی ہے۔

مثال ۱۷۔ ایک خط کا لفاف معلوم کر دو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر دو نقطوں (۱، ۰) (۰، ۱) سے اس خط پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ ۲ ج کے مساوی ہوتا ہے۔

جواب:  $\frac{لا^2}{ج-۲} + \frac{ما^2}{ج-۱} = ۱$

مثال ۱۸۔ ثابت کرو کہ وہ خط مستقیم جو دو دے ہوئے دائروں کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ دائروں کے دوسراوی ہیں ایک مکافی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۱۹۔ و ما دو ثابت خط ہیں اور ۱ ایک ثابت نقطہ ہے۔ کوئی دائرہ جو و اور ۱ میں سے گزرتا ہے و ما کو علی الترتیب (۱۳۵)

ف ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق ایک ثابت مکافی کا مماس ہے۔

مثال ۲۰۔ ایک خط جو نقطہ ن میں سے گزرتا ہے اور (مکافی

ما-۱ لا-۰ کے لحاظ سے) نقطہ ن کے قطبی پر عمود ہے ثابت نقطہ (ع، ب) میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا قطبی مکافی

(لا-۱ ۲+ع) ۲ ب ما-۰ =

کو لف کرتا ہے۔

مثال ۲۱۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے ایک دے ہوئے

نقطہ کا قطبی جبکہ دائرہ دو دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے دو مکافیوں میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتا ہے۔

مثال ۲۲۔ ایک خط مستقیم دو دے ہوئے خطوط و ما

کو نقطوں ف ق پر قطع کرتا ہے اور ف ق کا نقطہ وسطی ایک دے ہوئے خط پر ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق ایک مکافی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۲۳۔ ف ق اور ف س مکافی ما-۲ ب-۱ لا-۰

کے وتر ہیں جو ما-۰ کو علی الترتیب نقطوں (ج، ۰) (ج، ۰) پر قطع کرتے ہیں

ثابت کرو کہ ق س، مکافی (ج+ج) ۲ ما-۱ ۲ = ۱۶ ج، ج، ج لا کو لف کرتا ہے

مثال ۲۴ -  $n = 2$  لاکا ایک وتر متوازی ماسکی وتر کے  
 طویل کاک گنا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر، مکانی  $n = 2$  و  $(n+1)$  کو مس  
 کرتا ہے جہاں  $n = 1$  و  $(n-1)$ ۔

مثال ۲۵۔ مکانی  $\lambda = ۱۴$  = کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد، خط  $\lambda = ۱۴$  کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث 'ف' 'ق' 'س' کے اضلاع مکانی  $\lambda = ۱۴$  کو مس کرتے ہیں۔

## پانچویں باب مثالیں

۱۔ ایک مکانی کے لحاظ سے ایک نقطہ وکے قطبی نقطہ و سے عمود کشینچا گیا ہے جو قطبی سے نقطہ م پر ملتا ہے اور محور کو گ پر قطع کرتا ہے۔ قطبی، محور کو ت پر قطع کرتا ہے اور و میں سے گزرنے والا معین متعنی کون ن پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقاط 'ت'، 'ف'، 'م'، 'گ' ان سب کے سب ایک دائرہ پر ہیں جس کا مرکز س ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ دو مکانی  $\mathbf{a} = \mathbf{i} \mathbf{a}_1 + \mathbf{j} \mathbf{a}_2 + \mathbf{k} \mathbf{a}_3$  و  $\mathbf{b} = \mathbf{i} \mathbf{b}_1 + \mathbf{j} \mathbf{b}_2 + \mathbf{k} \mathbf{b}_3$  کو

زادیہ

$$\frac{3 \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{(1 + \frac{1}{2})^2}$$

پر قطع کر دیے۔

۳۔ اگر ایک مکانی کا ایک ماسکی وترن سق ہو اور ن مرتب سے میرے طے تو ثابت کرو کہ مرق مکانی کے محور کے متوازی ہوگا۔

۴۔ ثابت کرو کہ اگر مکانی پر کے دو نقطوں کے مابین ایک مستقل نسبت میں ہوں تو ان نقطوں پر کے تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک

مکانی ہے۔

۵۔ نقطہ ن سے مکانی م<sup>۱</sup> - م<sup>۲</sup> لا = کے دو مماس کھینچے گئے ہیں اور یہ مماس محور لا کے ساتھ زاویے ط<sup>۱</sup> ط<sup>۲</sup> بناتے ہیں۔ ن کا طریق معلوم کرو (۱) جبکہ مس ط<sup>۱</sup> + مس ط<sup>۲</sup> مستقل ہو اور (۲) جبکہ مس ط<sup>۱</sup> + مس ط<sup>۲</sup> مستقل ہو۔

۶۔ ایک مکانی کے ان دو مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو جو ایک دوسرے کے ساتھ ۵۴° کا زاویہ بناتے ہیں۔

۷۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مکانی کے دو مماس کسی ثابت مماس پر ایک مستقل طول قطع کریں تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دوسرا مساوی مکانی ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ ایک مکانی کے دو مماس جو علی الترتیب محور اور مرتب کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں لیکن علی القوائم نہیں ہیں وتر تقاطع متقاطع ہوتے ہیں۔

۹۔ ایک مکانی کے وتر مماس پر کے کسی نقطہ سے اس کے سروں کے مماسوں پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو ان عمودوں کے پائین کو ملتا ہے مکانی مماس کرتا ہے۔

۱۰۔ اگر خط لا + م<sup>۱</sup> - م<sup>۲</sup> پر کے ایک نقطہ سے مکانی م<sup>۱</sup> - م<sup>۲</sup> لا = پر مماس کھینچے جائیں تو ان کے وتر مماس کے ممادی راس پر ایک قائمہ لویہ بنے گا۔

۱۱۔ ایک مکانی کے لحاظ سے ت کے قطعی پر ت سے عمود ت ل کھینچا گیا ہے جو محور سے ص پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ت ل ت م مستقل ہو تو ت کا طریق ایک مکانی ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ اگر ت ل : ت م مستقل ہو تو ت کا طریق ایک مکانی ہوگا۔

۱۲۔ دو مساوی مکافیوں کے محور متوازی ہیں اور ان کے راسوں پر کا مماس مشترک ہے۔ خطوط مستقیم کسی ایک محور کے متوازی

کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ منحنیوں کے درمیان ان خطوط کے جو حصے منقطع ہوتے ہیں ان کے نقاط وسطی کا طریق ایک مساوی مکانی ہے۔

۱۳۔ دو مکانی ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اور ان کے محور متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ان مکافیوں کے دو نقطوں پر کے ماس ان کے مشترک ماس پر متقاطع ہوں تو ان کے نقاط ماس کو ملانے والا خط محور کے متوازی ہوگا۔

۱۴۔ دو مکافیوں کا محور وہی ہے۔ ایک مکانی کے نقطوں سے دوسرے مکانی کے ماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے مکانی کے وتر ماس کے وسطی نقطے ایک ثابت مکانی پر واقع ہوتے ہیں۔

(۱۳۷)

۱۵۔ ایک مکانی کا ایک وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر کے نقطہ وسطی کا طریق ایک مکانی ہے۔

۱۶۔ ایک وتر ن کا نقطہ وسطی ایک ثابت خط مستقیم پر ہے جو ایک مکانی کے محور پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ وتر کے قطب کا طریق دوسرا مکانی ہے۔

۱۷۔ اگر ایک مکانی کے جس کا راس  $A$  ہے دو ماس  $T$  و  $F$  اور  $T$  و  $F$  ہوں اور اگر خطوط  $AT$  و  $AF$  (ممدودہ بہ ضرورت) مرتب کو علی الترتیب  $F$  و  $T$  اور  $T$  پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ  $F$  و  $T$  =

۱۸۔ اگر کسی نقطہ  $O$  میں سے ایک مکانی کا قطر کسی وتر سے  $T$  پر ملے اور اس وتر کے سروں پر کے ماس قطر سے  $T$  و  $F$  پر ملیں تو ثابت کرو کہ  $F$  و  $T$  =  $OQ \times OQ'$ ۔

۱۹۔ ایک مثلث کا راس ثابت ہے، قاعدہ کا طول مستقل ہے، اور قاعدہ ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث کے محیط دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ دائرہ

$$LA^2 + MB^2 + NC^2 = 3 \cdot LA^2$$

کے لحاظ سے دائرہ

$$ل^۱ + م^۱ - ۲ ل^۱ ل^۲ = ۲ ل^۱ ل^۳ =$$

پر کے کسی نقطہ کا قطبی مکانی

$$ل^۱ + م^۱ ل^۲ ل^۳ =$$

کو مس کرے گا۔

۲۱۔  $ن$  میں  $ن$  ایک مکانی کا ایک ماسکی وتر ہے،  $ن$  کا نقطہ وسطی ط ہے اور  $و$ ،  $ن$  پر عمود ہے اور محور کو  $و$  پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ  $س$   $ن$  اور  $س$   $ن$  کے درمیان  $س$  و اور  $ط$  و حسابی اور ہندسی اوسط ہیں۔

۲۲۔ ایک مکانی کے تین ماسکی وتر  $س$ ،  $ف$ ،  $ق$   $س$   $ق$   $س$   $ر$  ہیں،  $ق$   $س$   $ا$   $س$  قطر سے جو  $ق$  میں سے گذرتا ہے  $ب$  پر ملتا ہے،  $س$   $ف$   $ا$   $س$  قطر سے جو  $ق$  میں سے گذرتا ہے  $ب$  پر ملتا ہے، اور  $ف$   $ق$   $ا$   $س$  قطر سے جو  $ر$  میں سے گذرتا ہے  $ج$  پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ تین نقطے  $ا$ ،  $ب$ ،  $ج$  ایک خط مستقیم پر ہیں جو  $س$  میں سے گذرتا ہے۔

۲۳۔ ایک مکانی کے متوازی وتروں کے نظام میں سے ایک وتر  $ن$  ہے اور  $ن$   $ا$  پر  $و$  ایک ایسا نقطہ ہے کہ مستطیل  $ن$  و  $و$   $ن$  مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ  $و$  کا قطری ایک مکانی ہے۔

۲۴۔ ایک مکانی کے نقطہ  $و$  میں سے گذرنے والے قطر پر دو نقطے  $ن$ ،  $ن$  لے گئے ہیں ایسے کہ  $و$   $ن$   $و$   $ن$  مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اگر نقاط  $ن$ ،  $ن$  سے مکانی کے ماس کھینچ جائیں تو ماسوں کے چار نقاط تقاطع دو ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہوں گے جو  $و$  پر کے ماس کے متوازی اور اس سے مساوی فاصلہ پر واقع ہوں گے۔

۲۵۔ اگر ایک ذواربعتہ الاضلاع ایک مکانی کے گرد کھینچا جائے تو اس کے وتروں کے وسطی نقطوں میں سے گذرنے والا خط مکانی کے محور کے متوازی ہوگا۔

۲۶۔ اگر ایک مکانی کے ایک ماسکی وتر پر کے کسی نقطہ سے دو ماس  
کھینچ جائیں تو یہ ماس ان ماسوں کے ساتھ مساوی میلان رکھیں گے جو ماسکی  
وتر کے سروں پر کھینچے گئے ہوں۔

۲۷۔ اگر ایک مکانی کے دو ماس ایک ثابت خط مستقیم کے ساتھ  
مساوی زاویے بنائیں تو ثابت کرو کہ وتر ماس ایک ثابت نقطہ میں سے گزرنا  
چاہئے۔

۲۸۔ دو مکانی ایک مشترک ماس رکھتے ہیں اور ان کے محور حما  
سمتوں میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ان میں سے ایک مکانی کے وتر دوسرے کو  
مس کرتے ہوئے کھینچے جائیں تو ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک  
دوسرا مکانی ہوگا۔

۲۹۔ ایک مکانی کے ایسے وتر کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو جسکے  
محاذی راس پر قائمہ زاویہ بنے۔

۳۰۔ مکانی ۱، ۲، ۳، ۴ کے عماد وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{16} = \frac{3}{12} - 12 = 12 - 12 = 0$$

۳۱۔ ایک مکانی کا ایک وتر ق ق ہے جو ف پر عماد ہے  
ق ق کو راس ۱ سے کھینچا گیا ہے اور ق میں سے ایک خط 'اق' کے  
متوازی کھینچا گیا ہے جو محور سے کا پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'اسا' ف کے  
ماسکی فاصلہ کا دگنا ہے۔

۳۲۔ ایک مکانی کے متوازی وتر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان  
وتروں کے سروں پر کھینچے ہوئے ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم  
ہے، نیز عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق بھی ایک خط مستقیم ہے اور وتروں کی  
مختلف سمتوں کے لیے ان دو خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک مکانی ہے۔

۳۳۔ اگر ایک مکانی کے دو نقطوں پر کے عماد متوازی ہوں  
تو ان نقطوں کو ملانے والا خط محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے گا۔



۳۴۔ اگر ایک مکانی کے دو نقطوں پر کے عماد محور کے ساتھ زاویوں طہ، فہ پر مائل ہوں اور سس طہ مس فہ = ۲ تو ثابت کرو کہ وہ مکانی پر تقاطع ہوں گے۔

۳۵۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق جس سے دو ایسے عماد کھینچے جاسکیں محور کے ساتھ ان کے زاویے متکملہ ہوں ایک مکانی ہوگا۔

۳۶۔ ایک نقطہ ن سے مکانی کے عماد کھینچے گئے ہیں اور ان میں سے دو عماد ایک دے ہوئے خط کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک مکانی ہے۔

۳۷۔ ایک مکانی کے نقطہ ن پر کا عماد محور سے گ پر ملتا ہے، ن گ کو ۵ تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ گ ۵ =  $\frac{1}{4}$  ن گ۔ ثابت کرو کہ نقطہ ھ میں سے گزرنے والے مکانی کے دوسرے دو عماد ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

۳۸۔ ایک مکانی کے تین نقطوں ف، ق، س پر کے عماد نقطہ و پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ  $س + ن + ق + س + س + س = ۱$

۳۹۔ ایک مکانی کے کوئی تین ماس مستقل رقبہ کا ایک مثلث بنائیں گے اگر محور کے ساتھ ان میلانوں کے ماس کسی دے ہوئے سلسلہ موسیقیہ میں ہوں۔

۴۰۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو ایک مکانی کے تین عمادوں سے بنتا ہے

$$\frac{1}{2} (م - ۱) (م - ۲) (م - ۳) (م - ۴) (م - ۵) (م - ۶) (م - ۷) (م - ۸) (م - ۹) (م - ۱۰)$$

۴۱۔ اگر ایک مکانی کا ایک ماس دو دے ہوئے متوازی خطوط مستقیم کو ف، ق پر قطع کرے تو ف، ق سے منحنی کے دوسرے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع

کا طریق ایک مکانی ہوگا۔

۴۲۔ اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث ایک مکانی کے گرد کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ خطوط جو مثلث کے کسی راس سے ماسکے تک کھینچے جائیں متقابل کے ضلع کے نقطہ تماس میں سے گزریں گے۔

۴۳۔ ما<sup>۲</sup> = (لا + ج) پر کے کسی نقطہ سے ما<sup>۲</sup> = ۴ والا کے تماس کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ نقاط تماس پر اس مکانی کے عماد ایک ثابت خط مستقیم پر تقاطع ہوتے ہیں۔

۴۴۔ مکانی ما<sup>۲</sup> = ۴ والا = کے ثابت نقطہ (لا، ما) میں سے وتر کھینچے گئے ہیں جو علی القیاس ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے دوسرے سروں کو ملا کر لا خط ثابت نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتا ہے۔

۴۵۔ اگر ایک ثابت نقطہ میں سے ایک مکانی کا کوئی وتر کھینچا جائے اور وتر کے سروں پر عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق دوسرا مکانی ہے۔

۴۶۔ اگر ایک نقطہ سے مکانی ما<sup>۲</sup> = ۴ والا کے تین عماد مجبور کو ایسے نقطوں پر قطع کریں جن کے فاصلے راس سے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ نقطہ منحنی ما<sup>۲</sup> = ۲ (لا - ۱۲) پر واقع ہے۔

۴۷۔ ما<sup>۲</sup> = ۴ والا = کے عماد وتروں کے قلوب کا طریق (لا + ۱۲) ما<sup>۲</sup> = ۴ والا ہے۔

۴۸۔ ایک مکانی کے کسی دو ماسکی وتروں کو قطر مان کر دو دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا مشترک وتر مکانی کے راس میں سے گزرتا ہے۔

۴۹۔ ایک دیے ہوئے مکانی کے دو تماس جھر کے ساتھ ایسے زاویے بناتے ہیں کہ ان کے نصفوں کے تماسوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ہم ماسکی مکانی ہے۔

۵۰۔ اگر وہ دائرہ جو ایک مکانی کے وتر ف ق پر اس کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو مکانی کو مکر نقطوں س'س پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ف ق



۵۷۔ ت سے ایک مکافی کے ماس ت ف اور ت ق ہیں  
 اور کسی دوسرے ماس پر ف، ت، ق سے عمود طول میں علی الترتیب  
 ع، ع، ع، ع ہیں۔ ثابت کرو کہ ع، ع، ع = ع، ع۔

۵۸۔ وے ایک مکانی کے پاس ودا اور وب ہیں اور متناظر  
عاماد ف، ب ف ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ف ایک ثابت خط پر واقع ہو  
جو محور پر عمود ہے تو ودا ایک مکانی کو مرسم کرے گا۔ ودا طریقی معلوم کرو  
اگر ف ایک ثابت قطر پر واقع ہو۔

۵۹۔ مکانی ۲۔ ۱۱۱۔ کے تقطع پر کا عمارت گ  
 ہے جہاں گ محور پر ہے۔ گ ف کو باہر وار نقطہ ق تک اتنا خارج کیا گیا  
 ہے کہ ق ف = گ ف۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک مکانی ہے۔ نیز  
 ثابت کرو کہ ف اور ق جن مکانیوں پر واقع ہیں ان کے نقطوں ف اور  
 ق پر کے محاسنوں کے نقطہ تقاطع کا طریق  
 ۲ (۱۱۱ + ۱۱۱) = ۱۱۱۔

۶۰۔ مکانی ۱-۱۲ = ۱۱ کا ایک ورتنا بت نقطہ (عمامہ) میں گذرتا ہے اور اس کے ہر سرے میں سے ایک خط مستقیم دوسرے سرے پر کے ماس کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان دو خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق مکانی

۶۱۔ اگر  $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$  کے نقطوں 'ف' 'ق' 'س' پر کے عادی نقطہ (عہ) پر ملیں تو مثلث 'ف' 'ق' 'س' کا مرکز عمودی (عہ)  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$  ہو گا۔  
 نیز ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' 'س' کا مرکز ہندسی  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$  ہے۔

۶۲۔ کسی نقطہ (عہدہ) سے مکانی ماہ ۱۴۱۰ھ کے تین عماد کھینچے

گئے ہیں اور ان کے پائینوں پر حماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کے راسوں کے محدود جواں حماسوں سے بنے مساواتوں

$$لا^۲ + لا^۲ (ع - ۱۲) - ۱۲ = ۰$$

$$لا^۲ + لا^۲ (ع - ۱۲) + ۱۲ = ۰$$

اور سے حاصل ہوتے ہیں۔

۶۳۔ ایک مکانی پر کوئی تین نقطے 'ف'، 'ق'، 'س' ہیں۔ 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے گزرنے والے قطروں 'ف'، 'ق'، 'س' سرف سرف علی الترتیب 'س'، 'ق'، 'ف' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ق'، 'س'، 'ف'، 'ق'، 'س' علی الترتیب 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے حماسوں کے متوازی ہیں۔

۶۴۔ ایک مکانی کے نقطہ 'ف' پر کا عماد محور کو گ پر قطع کرتا ہے اور 'ق'، 'س' پر کے عماد، 'ف' گ کے نقطہ وسطی میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ق'، 'س' مرتب کے پائیں میں سے گزرتا ہے۔

۶۵۔ ایک مکانی کے نقطہ 'ف' سے مکانی کے دو عماد کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمادوں اور 'ف' میں سے گزرنے والے قطرے درمیانی زاویوں کے ناصف اور 'ف' پر کا عماد ایک مستقی پسل بناتے ہیں۔

۶۶۔ نقطہ (۱۳، ۰) میں سے گزرنے والا کوئی خط مکانی لا^۲ + لا^۲ = ۰ کو نقطوں 'ف'، 'ق' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جو 'ف'، 'ق' اور ماسک میں سے گزرتا ہے مکانی کو مس کرتا ہے۔

۶۷۔ 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد ہم نقطہ ہیں اور 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے گزرنے والے قطرے مرتب پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ف'، 'ق'، 'س' مکانی لا^۲ + لا^۲ = ۰ کو مس کرتا ہے۔

۶۸۔ مکانی لا^۲ + لا^۲ = ۰ کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد، خط لا^۲ = ۰ پر کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث 'ف'، 'ق'، 'س' کے اضلاع مکانی لا^۲ + لا^۲ = ۰ کو مس کرتے ہیں۔

۶۹۔ لا^۲ + لا^۲ = ۰ میں ایک مثلث بنایا گیا ہے اور اس کے

دو اضلاع،  $ما^۲ - م^۲ = ب(لا + ج) =$  کو مس کرتے ہیں۔ تیسرے ضلع کا تقاطع معلوم کرو۔

(۱۴۳)

۴۰۔  $ما^۲ - م^۲ = لا$ ۔ کے نقطوں ق، مرا پر کے عماد مکانی سے نقطہ ف پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ (۱) مثلث ف، ق، مرا کے مرکز عمودی کا طریق مکانی  $ما^۲ = لا(لا + ج)$  ہے اور (۲) حالت دائرہ کے مرکز کا طریق مکانی  $ما^۲ - م^۲ = لا + لا^۲ = ۰$  ہے۔

۴۱۔ اگر  $ما^۲ - م^۲ = لا$ ۔ پر کے کسی نقطہ سے مکانی  $ما^۲ - م^۲ = لا$ ۔ کے تماس کھینچ جائیں تو نقاط تماس پر کے عماد مغنی  $ما^۲ = لا(لا + ج) + م^۲$  (۱۲ - لا) پر ملیں گے۔

۴۲۔ مکانی  $ما^۲ - م^۲ = لا$ ۔ کا کوئی وتر ثابت نقطہ (ع، ب) میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا مرکز ہندسی جو وتر اور اس کے بیروں پر کے تماسوں سے بنتا ہے مکانی  $ما^۲ - م^۲ = لا + لا^۲ + ع = ۰$  کو مرسم کرتا ہے۔

۴۳۔ مکانی  $ما^۲ - م^۲ = لا$ ۔ میں مثلث ف، ق، مرا بنایا گیا ہے اور ف، ق، مرا علی الترتیب نقاط (۰، م)، (۰، م)، (۰، م) میں سے گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف، ق، مرا دائرہ  $لا + ما^۲ - م^۲ = لا$ ۔ کو مس کرتا ہے۔

۴۴۔  $ما^۲ - م^۲ = لا$ ۔ کا کوئی تماس خطوط ما-م (لا-ج) = ۰ اور ما-م (لا-ج) کو علی الترتیب ف، ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف، ق سے مکانی کے دوسرے تماس اس مغنی پر متقاطع ہوتے ہیں جس کی مساوات  $لا(م-م) (لا+ج) = (ج م-لا) (ما-م) (لا)$  ہے۔

۴۵۔

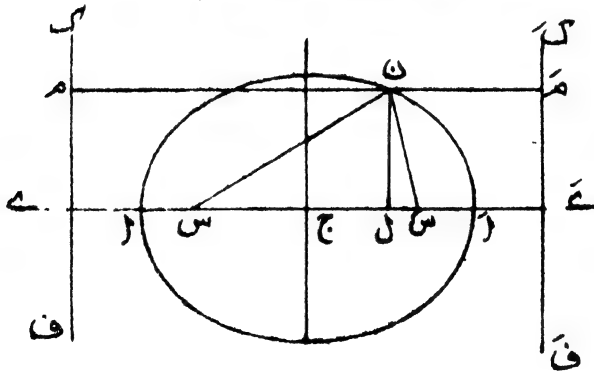
۴۵۔ ثابت کرو کہ  $ما^۲ - م^۲ = لا$ ۔ میں ایسے بیسٹار مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جو لا-م ب ما = کے لحاظ سے خود قطعی ہوں۔ نیز ثابت کرو کہ مثلثوں کے ہندسی مرکزوں کا طریق  $ما^۲ = لا + لا^۲$  ہے۔

# پہچاننا قطع ناقص

(۱۴۴)

**تعریف۔** قطع ناقص ایک نقطہ کا طریقہ ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ ایک ثابت خط سے اس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے جو اکائی سے کم ہوتی ہے۔ ثابت نقطہ کو ماسکہ اور ثابت خط کو مرتب کہتے ہیں۔

۱۰۹۔ ناقص کی مساوات معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ س ماسکہ اور ک ف مرتب ہے۔

سے ' مرتب پر عمود کھینچو۔  
سے س کو ' پر اس طرح تقسیم کرو کہ س : ا : اے = دی ہوئی  
نسبت = ز : ا : (فرض کرو)۔

سے س محدودہ میں ایک ایسا نقطہ ' ہو گا کہ

$$س : ا : اے = ز : ا$$

فرض کرو کہ ' کا نقطہ وسطی ج ہے اور ا : اے = ۲ : ۱

(۱۴)

تب ا : س = ز : اے اور س : ا = ز : اے

$$\therefore (س + ا) : ز = (اے + ا) : ا$$

$$\therefore (س + ا) : ز = اے : ا$$

$$\therefore اے : ا = ز : ا \quad \therefore اے = \frac{ز}{2} \quad (۱)$$

$$س : ا = ز : ا \quad \therefore س = \frac{ز}{2} \quad (۱)$$

$$یا (س + ا) : ز = اے : ا$$

$$\therefore (س + ا) : ز = اے : ا \quad (۲)$$

اب فرض کرو کہ ج کو مبداء ' ج ' کو محور ' لا ' اور ج ' کے

عمود وار ایک خط کو محور ماقبال دیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ متغی پر کوئی نقطہ ن ہے اور اس کے محدود (لا، ما) ہیں۔

تب شکل میں

$$س : ن = ز : ن$$

$$\therefore س : ن = ز : ن \quad \therefore س = \frac{ز}{2}$$

$$س : ن = ز : ن \quad \therefore س = \frac{ز}{2} \quad (۱)$$

$$س : ن = ز : ن \quad \therefore س = \frac{ز}{2} \quad (۱)$$

$$\therefore (س + ا) : ز = اے : ا$$

$$یا (س + ا) : ز = اے : ا$$

$$(۳) \quad \therefore (س + ا) : ز = اے : ا$$



لا = رکھنے سے ما =  $\pm \frac{1}{2} (1 - z^2)$  حاصل ہوتا ہے جس سے محور ما پر کے وہ مقطوعے حاصل ہوتے ہیں جو منحنی قطع کرتا ہے۔ اگر ان طولوں کو  $\pm$  ب لکھا جائے تو

$$b^2 = \frac{1}{4} (1 - z^2) \quad (۴) \dots \dots \dots$$

اور مساوات (۳) شکل

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \quad (۵) \dots \dots \dots$$

اختیار کرتی ہے۔  
وتر خاص وہ وتر ہے جو ماسکے میں سے گزرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہوتا ہے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے مساوات (۵) میں لا = - ز لکھنا چاہئے۔

تب  $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} (1 - z^2) = \frac{1}{r^2}$  (۴) سے

اس لیے نیم وتر خاص کا طول  $\frac{1}{r}$  ہے۔

۱۱۰۔ مساوات (۵) [دفعہ ۱۰۹] میں ما کی قیمت ب سے بڑی نہیں ہو سکتی کیونکہ اگر ایسا ہو تو لا منفی ہوگا، اسی طرح لا سے بڑا نہیں ہو سکتا۔ پس قطع ناقص ایک ایسا منحنی ہے جو تمام سمتوں میں محدود ہوتا ہے۔

اگر لا عدداً ۱ سے کم ہو تو ما مثبت ہوگا اور لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے ما کی دو مساوی اور مختلف علامت قیمتیں حاصل ہونگی۔ اس لیے محور لا منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

اسی طرح اگر ما عدداً ب سے کم ہو تو لا مثبت ہوگا اور ما کی کسی مخصوص قیمت کے لیے لا کی دو قیمتیں حاصل ہونگی جو مساوی اور

مختلف ایلامت ہوں گی۔ اس لیے محور مانحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر محور لا پر نقطے  $س$ ،  $ج$ ،  $س$  ایسے لیے جائیں کہ  $ج س = س ج$  اور  $ج س = س ج$  ہے تو نقطہ  $س$  بھی منحنی کا ماسکہ ہوگا اور  $س$  سے گزرنیوالا وہ خط جو  $ج$  سے پر عمود ہو متناظر مرتب ہوگا۔

اگر منحنی پر کوئی نقطہ  $(لا، ما)$  ہو تو محدود  $(لا، ما)$  مساوی  $\frac{لا}{2} + \frac{ما}{2} = کو$  یوراکرینگے اور یہ ظاہر ہے کہ ایسی صورت میں محدود  $(لا، ما)$  بھی مساوی کو یوراکرینگے اور اس لیے نقطہ  $(لا، ما)$  بھی منحنی پر ہوگا۔ لیکن نقطے  $(لا، ما)$  اور  $(لا، ما)$  مرکز میں سے گزرنے والے ایک خط مستقیم ہیں اور مبادا سے مساوی فاصلوں پر ہیں۔ پس مبادا پر اس وتر کی تنصیف کرتا ہے جو اس میں سے گزرتا ہے اور اس لیے اس کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں۔

وہ وتر جو ماسکوں میں سے گزرتا ہے محور اعظم کہلاتا ہے اور وہ وتر جو مرکز میں سے گزرتا ہے محور اعظم پر عمود ہوتا ہے محور اصغر کہلاتا ہے۔

۱۱۔ ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلے معلوم کرنا۔ (۱۴۷)

دفعہ ۱۰۹ کی شکل میں چونکہ  $س ن = ز \times ن م$  اس لیے

$$س ن = ز \times ل = ز (ج + ج ل) = ز (ل + ل) = ل + ل + ز لا$$

$$نیز س ن = ز \times ل = ز (ج - ج ل) = ل - ل - ز لا$$

۱۲۔  $س ن + س ن = ۲ ل$   
بعض اوقات ناقص کی یہ تعریف کی جاتی ہے کہ وہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

اس تعریف سے منحنی کی مساوات معلوم کرنا۔  
فرض کرو کہ مستقل مجموعہ ۱۲ ہے۔ فرض کرو کہ دو ثابت نقطوں کے درمیان  
فاصلہ ۱۲ ہے۔

ان ثابت نقطوں کو ملانے والے خط کے وسطی نقطہ کو مبداء قرار دو۔  
فرض کرو کہ یہ خط اور اس کے عمود وار دو سر خط محاور لا اور ما ہیں۔ تب  
دی ہوئی شرط سے

$$\sqrt{(لا - ۱۲)^2 + ۲^2} + \sqrt{(لا + ۱۲)^2 + ۲^2} = ۱۲$$

اس کو منطبق بنانے سے  $ما + لا (۱ - ز) = (۱ - ز)^2$  اور یہ وہی مساوات ہے جو سابق میں حاصل ہو چکی ہے۔  
۱۱۲ - ناقص کی قطبی مساوات جبکہ مرکز کو قطب کے طور پر

لیا جائے مساوات  $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$  میں لا کی بجائے رجم طہ اور  
ما کی بجائے رجب طہ لکھنے سے حاصل ہوگی۔ اس لیے یہ مساوات

$$۱ = \frac{رجم طہ}{۱} + \frac{رجب طہ}{۲}$$

$$یا \quad \frac{۱}{رجم طہ} + \frac{رجب طہ}{۲} = ۱ \quad (۱)$$

ہے۔ اس مساوات کو شکل

$$\frac{۱}{رجم طہ} + \left( \frac{۱}{رجم طہ} - \frac{۱}{رجب طہ} \right) = ۱ \quad (۲)$$

میں لکھا جاسکتا ہے اب چونکہ  $\frac{۱}{رجم طہ} - \frac{۱}{رجب طہ}$  مثبت ہے ہم مساوات (۲)

سے دیکھتے ہیں کہ  $\frac{۱}{رجم طہ}$  کی کم سے کم قیمت  $\frac{۱}{۲}$  ہے اور  $\frac{۱}{رجم طہ}$  بڑھتا ہے جیسے (۱۲۸)

طہ صفر سے  $\frac{1}{2}$  تک بڑھتا ہے۔ نیز  $\frac{1}{4}$  کی بڑی سے بڑی قیمت

$\frac{1}{4}$  ہے۔ اس لیے سمتی نصف قطر ۱ سے ب تک گھٹتا ہے جیسے طہ

صفر سے  $\frac{1}{2}$  تک بڑھتا ہے۔ ہم معلوم کر چکے ہیں کہ ناقص پر کے تمام نقطوں کے لیے

$$0 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

اس طریقہ پر جو دفعہ ۹۲ میں اختیار کیا گیا تھا یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر منحنی کے اندر کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو  $\frac{1}{16}$

$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$  منفی ہوگا اور اگر منحنی کے باہر کسی نقطہ کے محدد (لا، ما)

ہوں تو  $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$  مثبت ہوگا۔

۱۱۴۔ ایک ناقص اور ایک معلومہ خط مستقیم کے نقاط

تقاطع معلوم کرنا اور وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک دیا ہوا خط

ایک ناقص کو مس کرے۔

[نوٹ: ہم آئندہ ناقص کی مساوات کو ہمیشہ  $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$

لینگے۔ لہٰذا آئندہ اس کے خلاف بیان کیا گیا ہو۔]

فرض کر دو کہ خط مستقیم کی مساوات

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \quad (1)$$

ان نقطوں پر جو خط مستقیم اور ناقص میں مشترک ہیں دونوں رشتے پورے ہوتے ہیں۔ پس مشترک نقطوں پر

$$1 = \frac{لا^2}{ب^2} + \frac{(م + ج)^2}{ب^2}$$

$$یا \quad لا^2 (ب^2 + م^2) + ۲م ج لا + لا^4 = (ج^2 - ب^2) \dots (۲)$$

یہ ایک دوجہ مساوات ہے اور ہر دوجہ مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں حقیقی، منطبق، یا خیالی۔  
پس لا کی دو قیمتیں ہیں اور ان کے جواب میں ما کی دو قیمتیں مساوات سے حاصل ہوتی ہیں۔

(۱) مساوات (۲) کی اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں گی اگر

$$لا (ج - ب) (ب^2 + م^2) = م^2 ج لا$$

یعنی اگر  $ج = لا^2 + م^2$   
لا کی دو قیمتیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو (۱) کی رو سے  
ما کی دو قیمتیں بھی ایک دوسرے کے مساوی ہونی چاہئیں۔  
پس وہ دو نقطے جنہیں ناقص خط مستقیم سے منقطع ہوتا ہے منطبق  
ہوں گے اگر

$$ج = \sqrt{ب^2 + م^2}$$

اس لیے وہ خط جس کی مساوات

$$ما = م + لا + \sqrt{ب^2 + م^2} \dots (۳)$$

ہے م کی تمام قیمتوں کے لیے ناقص کو مس کرے گا۔  
چونکہ (۳) میں علامت جذر کے قبل مثبت یا منہی کوئی علامت

رکھی جاسکتی ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کم کی ہر قیمت کے لیے ناقص کے دو ماس ہیں یعنی کسی دئے ہوئے خط مستقیم کے متوازی دو ماس ہوتے ہیں۔ یہ دو ماس ناقص کے مرکز سے مساوی فاصلوں پر ہوتے ہیں۔

۱۱۵۔ ناقص پر کے دو نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات معلوم کرنا اور کسی نقطہ پر کے ماس کی مساوات معلوم کرنا۔  
فرض کرو کہ ناقص پر کے دو نقطوں کے محدد (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔

$$\text{مساوات} \quad \frac{(لا-لا)(لا-لا)}{۲} + \frac{(ما-ما)(ما-ما)}{۲}$$

$$= \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱ \dots\dots\dots (۱)$$

مختصر کرنے پر پہلے درجہ کی مساوات ہے اور اس لیے وہ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

اس مساوات میں اگر لا کی بجائے لا اور ما کی بجائے ما رکھا جائے تو دائیں جانبی رکن متماثلًا معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن بھی معدوم ہوتا ہے کیونکہ نقطہ (لا، ما) ناقص پر ہے۔

پس نقطہ (لا، ما) خط (۱) پر ہے اور اسی طرح (لا، ما) بھی اس خط پر ہے۔

اس لیے مساوات (۱) اس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے گزرتا ہے۔

یہ مساوات شکل

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{لا-لا}{۲} + \frac{ما-ما}{۲} + ۱ = \frac{لا+لا}{۲} + \frac{ما+ما}{۲}$$

(۱۵۰)

میں لکھی جاسکتی ہے۔

(۱) (لا، ما) پر کے ماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات  
(۲) میں لا = لا اور ما = ما رکھنا چاہئے چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$(۳) \dots\dots\dots '۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ا}$$

نتیجہ صریح ۱ - محور اعظم کے سروں کے مجدد علی الترتیب (۱، ۲) اور (۳) ہیں اور (۳) سے ان نقطوں پر کے ماس لا = لا اور لا = لا ہیں -

پس محور اعظم کے سروں پر کے ماس محور اصغر کے متوازی ہیں -  
اسی طرح محور اصغر کے سروں پر کے ماس محور اعظم کے متوازی ہیں -  
نتیجہ صریح ۲ - نقطہ (لا، ما) پر کا ماس نقطہ (لا، لا) پر کے ماس کے متوازی ہوتا ہے اور یہ دو نقطے ایک خط مستقیم پر ہوتے ہیں جو مرکز میں سے گزرتا ہے -

پس ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے ماس ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں -

۱۱۶ - وہ شرط معلوم کرنا کہ خط لا + م + ن = ۰ ناقص کو مس کرے -

$$(۱) \dots\dots\dots '۰ = لا + م + ن$$

$$(۲) \dots\dots\dots '۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ا}$$

کو جہاں قطع کرتا ہے ان نقطوں کو مبداء سے ملانے والے خطوں کی مساوات [دفعہ ۳۸]

$$(۳) \dots\dots\dots '۰ = \left( \frac{لا + م + ن}{ا} \right) - \frac{ما}{ب} + \frac{لا}{ا}$$

ہے۔ اگر خط مستقیم (۲) ناقص کو منطبق نقطوں پر قطع کرے تو مساوات  
(۳) منطبق خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔ اس لیے (۳) کا دائیں جانبی  
رکن ایک کامل مربع اہونا چاہیے، اس کے لیے شرط

$$\frac{2}{n} = \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{b} \right) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{a} \right)$$

ہے۔ اس لیے مطلوبہ شرط ہے

نتیجہ صریح - خط لاجم عہ + مابج عہ - ع = ناقص کو  
مس کرے گا اگر

لاجم عہ + مابج عہ = ع ..... (۵)  
۱۱۔ ناقص کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا۔  
ناقص کے کسی نقطہ (لا، ما) پر کے ماس کی مساوات

$$1 = \frac{لا}{a} + \frac{ما}{b}$$

ہے۔ عماد وہ خط ہے جو نقطہ (لا، ما) میں سے گذر کر ماس پر عمود ہوتا ہے۔  
اس لیے اس کی مساوات [دفعہ ۳۰]

$$\frac{(لا-لا)}{a} = \frac{ما-ما}{b}$$

-۴-

## مثالیں

۱۔ حسب ذیل ناقصوں کے خروج المرکز اور ماسکوں کے محمد معلوم کرو۔



$$(۱) ۲\lambda + ۳\mu - ۱ = ۰, (۲) ۸(۱ - \lambda) + ۶(۱ + \mu) - ۱ = ۰$$

جواب:  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

۲۔ مثال کے ناقصوں کے وتر خاص کے طول معلوم کرو۔

جواب:  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$  اور  $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

۳۔ ثابت کرو کہ خط  $\lambda + \sqrt{\frac{5}{4}}\mu = ۰$  ناقص  $۲\lambda + ۳\mu = ۱$  کو مس

کرتا ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ خط  $\lambda = ۳$ ،  $\mu = ۳$ ،  $\lambda = ۲$ ،  $\mu = ۲$  کو دو

نقطوں پر جو محور  $\lambda$  سے مساوی فاصلوں پر ہیں قطع کرتا ہے۔

۵۔ نقطہ  $(۱, ۲)$  ناقص  $۲\lambda + ۳\mu = ۱۲$  کے باہر ہے یا اندر؟

۶۔  $\frac{\lambda}{۲} + \frac{\mu}{۲} = ۱$  کے ان مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو محور (۱۵۲)

لا کے ساتھ  $۹۰^\circ$  کا زاویہ بناتے ہیں۔

۷۔  $۲\lambda + ۳\mu = ۱$  کے وتر خاص کے سروں پر کے (۱) مماسوں کی

مساواتیں اور (۲) عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

چار نقطے  $(\pm 1, \pm \frac{1}{3}\sqrt{2})$  ہیں۔

۸۔  $\frac{\lambda}{۲} + \frac{\mu}{۲} = ۱$  کے ان مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو

جو محوروں پر مساوی مقطوعے قطع کرتے ہیں۔

جواب:  $\lambda \pm \mu = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}$

۹۔ ثابت کرو کہ مساوات  $\lambda + ۲\mu = ۱$  لایک ناقص کو تعبیر



ہے جو ما = کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں

$$لا - لا^۲ + لا^۲ = (1 - \frac{لا}{لا^۲}) = 0$$

یعنی لا - لا^۲ + لا^۲ = کیونکہ (لا، ما) ناقص پر ہے۔

۱۱۸۔ کسی نقطہ سے ایک قطع ناقص کے دو تماس کیسے کیے جاسکتے (۱۵۳)

ہیں جو حقیقی، منطبق یا خیالی ہوں گے بموجب اس کے کہ نقطہ

منحنی کے باہر اس کے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

وہ خط جس کی مساوات

$$ما = م لا + لا^۲ + م^۲ = 0 \dots \dots (1)$$

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ [دفعہ ۱۱۸]۔  
خط (۱) مخصوص نقطہ (لا، ما) میں سے گزرے گا اگر

$$ما = م لا + لا^۲ + م^۲$$

یعنی اگر (ما - م لا) - لا^۲ - م^۲ = 0

$$م^۲ (لا - لا^۲) - ۲ م لا + ما^۲ - ما = 0 \dots (2)$$

مساوات (۲) م میں ایک دو درجی مساوات ہے اور اس سے ناقص کے ان تماسوں کی سمتیں حاصل ہوتی ہیں جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔ چونکہ دو درجی مساوات کی اصلیں دو ہوتی ہیں اس لیے دو تماس نقطہ (لا، ما) میں سے گزریں گے۔

مساوات (۲) کی اصلیں حقیقی، منطبق یا خیالی ہیں بموجب اسکے کہ

$$(لا - لا^۲) (ما - م^۲) - لا^۲ ما$$

منفی، صفر، یا مثبت ہو، یا بموجب اس کے کہ  $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$ ۔ مثبت، صفر، یا منفی ہو۔ یعنی بموجب اس کے کہ نقطہ (لا، ما) ناقص کے باہر، اسکے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

۱۱۹۔ کسی نقطہ سے ایک ناقص کے دو ماس کھینچے گئے ہیں۔

ان ماسوں کے نقاط ماس کو ملانے والے خط کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ لا، ما اس نقطہ کے محدود ہیں جس سے ماس کھینچے گئے ہیں۔  
فرض کرو کہ ماسوں کے نقاط ماس کے محدود (ھ، ک) اور (ھ، ک) ہیں۔

(۱۵۴)

$$۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

$$۱ = \frac{لاھ}{ب} + \frac{ماک}{ب}$$

اور

ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ (لا، ما) ان دونوں ماسوں پر ہے۔

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لاھ}{ب} + \frac{ماک}{ب}$$

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لاھ}{ب} + \frac{ماک}{ب}$$

اور

لیکن (۱) اور (۲) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ (ھ، ک) اور (ھ، ک) دونوں اس خط مستقیم پر ہیں جس کی مساوات

$$(۳) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

ہے۔ پس (۳) اس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو (لا، ما) سے کھینچے ہوئے  
ماسوں کے نقاط تماس کو ملاتا ہے  
اگر کسی نقطہ ن سے ایک ناقص کے دو ماس کھینچے جائیں تو  
ان ماسوں کے نقاط تماس کو ملانے والے خط کو ناقص کے لحاظ سے نقطہ  
ن کا قطبی کہا جاتا ہے۔

۱۲۰۔ اگر ایک ناقص کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی نقطہ ق  
میں سے گزرے تو نقطہ ق کا قطبی ن میں سے گزرے گا۔  
اس کو ٹھیک اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے جیسا کہ دفعہ ۸ میں  
ثابت کیا گیا تھا۔

۱۲۱۔ ایک ناقص کے ایسے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع کا  
طریق معلوم کرنا جو باہم علی القواطم ہوں۔  
وہ خط جس کی مساوات

$$m = la + \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \dots \dots (1)$$

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔  
اگر ہم لا اور ما کو معلومہ فرض کریں تو اس مساوات سے ان  
ماسوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔  
اس مساوات کو منطبق بنانے پر وہ

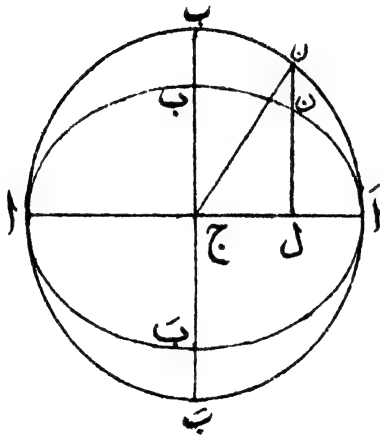
$$m^2 (la - la') - 2m la + ma^2 - b^2 = 0 \dots \dots (2)$$

ہو جاتی ہے۔  
فرض کرو کہ (۲) کی اصلیں م اور م ہیں تب اگر ماس علی القواطم  
ہیں تو  $m_1 m_2 = -1$  اور اس لیے

$$1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

یا  $a^2 + b^2 = a^2$  ..... (۳)

اس لیے مطلوبہ طریق ایک دائرہ ہے۔  
 اس دائرہ کو ناقص کا مرتبہ دائرہ کہتے ہیں۔  
 ۱۲۲۔ وہ دائرہ جو ایک ناقص کے محور اعظم پر اس کو قطر مان کر  
 کھینچا گیا ہو امدادی دائرہ کہلاتا ہے۔



اگر ناقص کی مساوات  $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  ..... (۱)

ہو تو امدادی دائرہ کی مساوات  $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$  ..... (۲)

ہوگی۔  
 اس لیے اگر ناقص کے کسی معین N کو خارج کیا جائے اور  
 وہ امدادی دائرہ سے N پر ملے تو (۱) اور (۲) سے

$$\frac{ل ن}{ب} = ۱ - \frac{ج ل}{ا} = \frac{ل ن}{ا}$$

$$\frac{ل ن}{ب} = \frac{ل ن}{ا}$$

پس ناقص کے اور دائرہ کے معین ایک دوسرے کے ساتھ مستقل نسبت رکھتے ہیں۔

زاویہ  $\angle ج ن$  کو نقطہ  $ن$  کا خارج المرکز زاویہ کہتے ہیں۔ دائرہ کے نقطہ  $ن$  کو ناقص کے نقطہ  $ن$  کا جواب کہتے ہیں۔ اگر زاویہ  $\angle ج ن$ ،  $ن$  ہو تو  $ن$  کے محدود  $\angle ج ن$ ،  $ا$  جب  $ن$  ہوں گے اور  $ن$  کے محدود  $\angle ج ن$ ،  $ب$  جب  $ن$  ہوں گے۔

۱۲۳۔ دو نقطوں کے خارج المرکز زاویے دے گئے ہیں۔ ان کو ملانے والے خط کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ان دو نقطوں کے خارج المرکز زاویے  $ط$ ،  $ط$  ہیں، تب ان کے محدود علی الترتیب  $\angle ج ط$ ،  $ب$  جب  $ط$  اور  $\angle ج ط$ ،  $ب$  جب  $ط$  ہیں۔

پس ان کو ملانے والے خط کی مساوات

$$[ دفعہ ۲۴ ] \quad ۰ = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

ہے۔

$$\frac{۱}{ا} (\angle ج ط - \angle ج ط) + \frac{۱}{ب} (\angle ج ط - \angle ج ط) = ۰$$

اس کو جب  $\frac{۱}{ا} (\angle ج ط - \angle ج ط)$  سے تقسیم کرنے پر مساوات

$$\frac{لا}{ا} جم \frac{ا}{ب} (طه + طه) + \frac{ب}{ا} جب \frac{ا}{ب} (طه + طه) = جم \frac{ا}{ب} (طه - طه) ... (۱)$$

حاصل ہوتی ہے جو مطلوبہ مساوات ہے۔  
طہ پر کے ماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۱)  
میں طہ = طہ رکھنا ہو گا چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لا}{ا} جم طه + \frac{ب}{ا} جب طه = ا' ..... (۲)$$

۱۲۴۔ دفعہ سابق کی مساوات (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ناقص  
دونقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ مستقل ہو اور ۲ عہ کے  
مساوی ہو تو ان نقطوں کو ملانے والا وتر ہمیشہ خط

(۱۵۷)

$$\frac{لا}{ا} جم عہ + \frac{ب}{ا} جب عہ = ا$$

کے متوازی ہوتا ہے۔ یعنی وتر ہمیشہ اس نقطہ پر کے ماس کے متوازی  
ہوتا ہے جس کا خارج المرکز زاویہ عہ ہے۔

اس کے بالعکس ایک ناقص کے متوازی و تروں کے  
نظام کے لیے کسی وتر کے سروں کے خارج المرکز زاویوں کا  
مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

۱۲۵۔ ایک ناقص کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات  
اس نقطہ کے خارج المرکز زاویہ کی رقوم میں معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ناقص کے نقطہ ن کا خارج المرکز زاویہ طہ ہے۔  
ن پر کے ماس کی مساوات (دفعہ ۱۲۳)

$$\frac{لا}{ا} جم طه + \frac{ب}{ا} جب طه = ا$$



ہے۔ اس خط کی مساوات جو نقطہ (۱ جم ط، ب جب ط) میں سے گذرتا ہے اور مماس پر عمود ہے [دفعہ ۳۰ کی بموجب]

$$(لا - ۱ جم ط) \frac{۱}{جم ط} - (ما - ب جب ط) \frac{۱}{ب جب ط} = ۰$$

$$یا \quad ۱ جم ط - \frac{ب}{ب جب ط} = ۱ - \frac{۲}{ب}$$

ہے۔

اگر ط، ط پر کے مماسوں کا نقطہ تقاطع (لا، ما) ہو تو

$$\frac{لا}{۱} - ۱ جم ط + \frac{ما}{ب} - ب جب ط = ۱$$

$$اور \quad \frac{لا}{۱} - ۱ جم ط + \frac{ما}{ب} - ب جب ط = ۱$$

$$پس \quad \frac{لا}{۱} = \frac{ب جب ط - ۱ جم ط}{ب جب ط} = \frac{جم ۱ (ط + ط)}{جم ۱ (ط - ط)}$$

$$اور \quad \frac{ما}{ب} = \frac{جم ط - ۱ جم ط}{ب جب ط} = \frac{جم ۱ (ط + ط)}{جم ۱ (ط - ط)}$$

[یا چونکہ وتر (ط، ط) نقطہ (لا، ما) کا قطبی ہے اس لیے دفعہ ۱۲۳ کی مساوات (۱) وہی ہے جو

$$۰ = ۱ - \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

ہے۔ پس اوپر کا نتیجہ فوراً لکھ لیا جاسکتا ہے]

ط، ط پر کے عمودوں کے نقطہ تقاطع کے محدد

$$= \frac{(ب^۱ - ب^۲) \times \frac{جم}{ط^۱} \times \frac{جم}{ط^۲} \times \frac{جم}{ط^۱ + ط^۲}}{جم \times \frac{۱}{ط^۱ - ط^۲}}$$

$$= \frac{(ب^۱ - ب^۲) \times \frac{جم}{ط^۱} \times \frac{جم}{ط^۲} \times \frac{جم}{ط^۱ + ط^۲}}{جم \times \frac{۱}{ط^۱ - ط^۲}}$$

حاصل ہوں گے۔

مثال۔ متوازی وتروں کے ایک نظام کے سروں پر کے  
عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنا۔  
چونکہ  $ط^۱ + ط^۲ = مستقل = ۲ع$  (فرض کرو)  
اس لیے اوپر کی مساواتوں سے

$$\frac{۱}{جمع} + \frac{ب}{جمع} = (ب^۱ - ب^۲) \times \frac{جم}{جمع} \times \frac{۱}{ط^۱ - ط^۲} \dots (۱)$$

$$اور \frac{۱}{جمع} - \frac{ب}{جمع} = (ب^۱ - ب^۲) \times \frac{جم}{جمع} \times \frac{۱}{ط^۱ - ط^۲}$$

$$= (ب^۱ - ب^۲) \times \left\{ \frac{جم}{ط^۱ - ط^۲} - \frac{جم}{ط^۱ + ط^۲} \right\}$$

پہلی مساوات سے  $جم \times \frac{۱}{ط^۱ - ط^۲}$  کی بجائے اندراج کرو تو کچھ  
اختصار کے بعد مساوات

$$۱ + ۲ = ۲ب + ۲ا = ۲ع + ۲ب = (ب^۱ - ب^۲) \times جمع$$

حاصل ہوگی۔

۱۲۶۔ اب ہم ناقص کے بعض ہندسی خواص ثابت کریں گے۔  
فرض کرو کہ ن پرکاماس محوروں لا اور ماسے علی الترتیب  
نقطوں ت، ت پر ملتا ہے۔

اور فرض کرو کہ عماد محوروں سے نقطوں 'گ' پر ملتا ہے۔ 'ن' پر کے عماد پر سے 'سے' سے 'ج' کے عمود کھینچو۔ نیز ج 'ع' کو 'ن' پر کے تماس کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ عماد سے 'ف' پر ملتا ہے اور ماسکی فاصلہ 'س' 'ن' سے 'ع' پر ملتا ہے۔  
تب اگر نقطہ 'ن' کے محدود 'آ'، آہوں تو 'ن' پر کے تماس کی مساوات

$$\frac{لا}{\frac{لا}{ب}} = \frac{ما}{\frac{ما}{ب}} \dots \dots \dots (۱)$$

ہوگی۔ یہ تماس محور لا کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں ما = . اور اس نقطہ پر (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$۱ = \frac{لا}{\frac{لا}{ب}}$$

$$\therefore \frac{ج ل \times ج ت}{ج} = ۱ \text{ یا } ج ل \times ج ت = ج ت \dots \dots \dots (۴)$$

اسی طرح ل ن × ج ت = ج ت، ..... (۵)

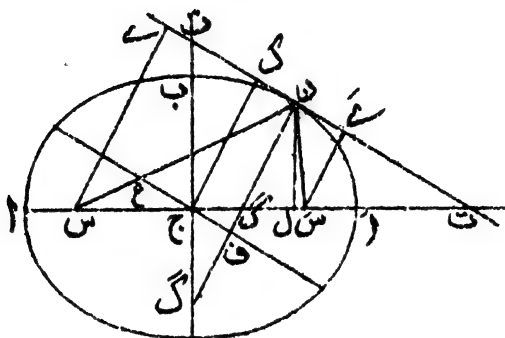
ن پر کے عماد کی مساوات

$$\frac{لا - لا}{\frac{لا}{ب}} = \frac{ما - ما}{\frac{ما}{ب}} \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔ یہ عماد محور لا کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں ما = . اور اس لیے (۲) سے

$$لا - لا = - \frac{ب}{ب} لا \text{ یا } لا = لا (۱ - \frac{ب}{ب}) = ز \times لا$$

$$\therefore ج گ = ز \times ج ل \dots \dots \dots (۶)$$



نیز چونکہ  
 $\text{س گ} = \text{س ج} + \text{ج گ} = \text{از} + \text{ز لا}$ ، اور  $\text{گ س} = \text{از} - \text{ز لا}$   
 $\therefore \frac{\text{س گ}}{\text{گ س}} = \frac{\text{از} + \text{ز لا}}{\text{از} - \text{ز لا}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ن س}}$   
 اس لیے  $\text{ن گ}$ ، زاویہ  $\text{س ن س}$  کی تقییف کرتا ہے... (ضد)

پھر چونکہ  $\text{ن گ} = \text{گ ل} + \text{ل ن} = (\text{ج ل} - \text{ج گ}) + \text{ل ن}$

$$\therefore \text{ن گ}^2 = \text{ما}^2 + \text{لا}^2 - 2\text{لا ز}$$

$$\text{ن گ} = \sqrt{\frac{\text{لا}^2}{\text{ب ہ}} + \frac{\text{ا}^2}{\text{ب ہ}}}$$

$$\text{اسی طرح ن گ} = \sqrt{\frac{\text{ا}^2}{\text{ب ہ}} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ب ہ}}}$$

$$\text{اور } \text{ن ف} = \text{گ ج} = \frac{1}{\left(\frac{\text{ا}^2}{\text{ب ہ}} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ب ہ}}\right)} \quad (دفعہ ۳۱)$$

ن ف x ن گ = ب<sup>۲</sup> اور ن ف x ن گ = ز<sup>۲</sup> .... (صہ)  
وہ خط جس کی مساوات

$$(۳) \quad \sqrt{ز^2 + م^2 + ب^2} = م + ز$$

ہے ناقص کو مس کرے گا مواد م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ پس اگر اس خط پر  
ماسکوں سے عمود سے 'س' کے کھینچے جائیں تو [دفعہ ۱۳]

$$س = م + ز + \sqrt{ز^2 + م^2 + ب^2} \quad \text{اور} \quad س = م + ز + \sqrt{ز^2 + م^2 + ب^2}$$

$$س = م + ز + \sqrt{ز^2 + م^2 + ب^2} = م + ز + \sqrt{ز^2 + م^2 + ب^2} \quad (طہ)$$

پھر اس خط کی مساوات جو س میں سے گذرتا ہے اور (۳) پر عمود ہے

$$م + م + لا + ز = ۰ \quad (۴)$$

ہے۔  
(۳) اور (۴) کے نقطہ تقاطع سے کا طریق معلوم کرنے کے لیے م کو  
ان دو مساواتوں سے ساقط کرنا چاہئے۔ یہ مساواتیں شکل

$$م + م + لا + ز = ۰ \quad \text{اور} \quad م + م + لا + ز = ۰$$

میں لکھی جاسکتی ہیں۔ ان مساواتوں کی طرفین کا مربع لیکر جمع کر دو تو حاصل ہوگا

$$(لا + م)^2 = (م + م + لا + ز)^2 = (م + م + لا + ز)^2$$

اس لیے سے کا طریق اعدادی دائرہ ہے جس کی مساوات

$$لا + م = ز \quad (ظہ)$$

ہے۔  
ہیں یہی نتیجہ حاصل ہوتا اگر ہم یہ فرض کرتے کہ س سے عمود کھینچا گیا ہے۔

۱۲۷۔ فرض کرو کہ  $n$  کوئی نقطہ ہے اور فرض کرو کہ  $n$  کا قطبی  $ق ق$  ہے۔ فرض کرو کہ  $ق ق$  محوروں سے  $t$  پر ملتا ہے۔  $s$  سے 'ج' اور  $n$  کو  $ق ق$  پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ  $n$  و محوروں سے  $گ$  پر ملتا ہے۔ تب اگر  $n$  کے محدد  $لا$ ،  $ما$  ہوں تو  $ق ق$  کی مساوات [دفعہ ۱۱۹]

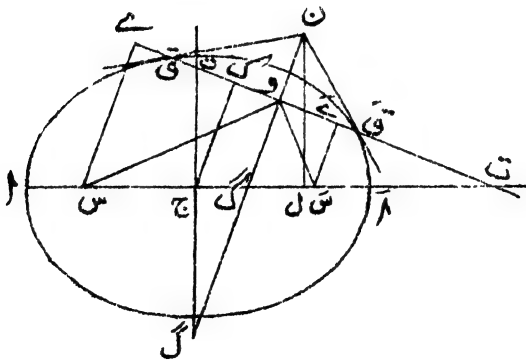
$$(۱) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲ب}$$

(۱۶۱) ہوگی۔ اس لیے  $n$  و  $گ$  کی مساوات [دفعہ ۱۳۰]

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{لا - لا}{۲} = \frac{ما - ما}{۲ب}$$

ہوگی۔

(۱) اور (۲) سے پچھلی دفعہ کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ  
 (۱)  $ج ل \times ج ت = ج (۱) (۲)$   $ل ن \times ج ت = ج ب$   
 (۲)  $ج گ = ز \times ج ل$  اور (ضم)  $گ ج \times ن گ = ب$





[ثابت کرو کہ ت ج × ج گ = س ج × ج س]

۹۔ ثابت کرو کہ خط ل لا + م ما + ن = ، منحنی

$$1 = \frac{ل^2}{ب} + \frac{م^2}{ا}$$

$$\frac{ا^2 (ب - ا^2)}{ن} = \frac{ب^2}{م} + \frac{ا^2}{ل} \quad \text{کا عماد ہے اگر}$$

$$\left[ \frac{ا لا}{ج م ط} - \frac{ب ما}{ج ب ط} = ا - ب کے ساتھ متقابلہ کر دو تو \frac{ل جم ط}{ا} = \frac{م جب ط}{ب} \right]$$

$$= \frac{ن}{ا - ب} ، \text{ پھر طہ کو ساقط کرو۔}$$

۱۰۔ ایک ناقص کے ماسکہ سے (جس کا مرکز ج ہے) کسی نقطہ ن کے قطبی پر عمود ڈالا جائے تو یہ عمود خط ج ن سے مرتب پریلیگا۔

۱۱۔ اگر ایک ناقص کے نقطہ ن کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقطہ ق ہو تو ثابت کرو کہ ماسکوں میں ، ص کے عمودی فاصلے ق پر کے عماد سے علی الترتیب س ن اور ہ ن کے مساوی ہوں گے۔

۱۲۔ اگر ایک ناقص کے نقطہ ن کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقطہ ق ہو تو ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے عماد ایک ثابت دائرہ پر ملتے ہیں۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص میں بنائے ہوئے مثلث کا رقبہ

$$\frac{1}{2} \{ \text{جب (بہ - جہ)} + \text{جب (جہ - عہ)} + \text{جب (عہ - بہ)} \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \text{جب (بہ - جہ)} + \text{جب (جہ - عہ)} + \text{جب (عہ - بہ)} \}$$

ہے جہاں عہ ، بہ ، جہ ، مثلث کے راسوں کے خارج المکرز زاوے ہیں۔

۱۲۸۔ ایک ناقص کے متوازی وتروں کے نظام کے نقاط

وسطی کا طریق معلوم کرنا۔

(۱۶۳)



اُس وتر کی مساوات جو نقطوں طہ، اور طہ کو ملاتا ہے

$$\frac{لا}{۱} جم \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) + \frac{ب}{۱} جب \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) = جم \frac{۱}{۲} (طہ - طہ)$$

ہے۔ اگر یہ وتر 'ما - م لا = ۰ کے متوازی ہے تو

$$م = - \frac{ب}{۱} مم \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) \dots \dots (۱)$$

لیکن اگر وتر کا نقطہ وسطی (لا، ما) ہے تو

$$۲ لا = ۱ (جم طہ + جب طہ) = ۲ جم \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) جم \frac{۱}{۲} (طہ - طہ)$$

$$اور ۲ ما = ب (جب طہ + جب طہ) = ۲ ب جب \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) جم \frac{۱}{۲} (طہ - طہ)$$

$$پس \frac{ب}{۱} مس \frac{۱}{۲} (طہ + طہ)$$

$$= - \frac{ب}{۱} مم \frac{۲}{۱} (۱) سے$$

اس لیے اُن تمام وتروں کے تقاطع وسطی کا طریق جو خط ما = م لا کے متوازی ہیں وہ خط مستقیم ہے جس کی مساوات

$$ما = - \frac{ب}{۱} مم \frac{۲}{۱} \dots \dots (۲)$$

ہے۔ (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ناقص کے تمام قطر (دفعہ ۱۰۲، تعریف) مرکز میں سے گزرتے ہیں۔

مساوات (۲) کو شکل ما = م لا میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$م م = - \frac{ب}{۱} مم \frac{۲}{۱} \dots \dots (۳)$$

رشتہ (۳) کے تشاکل سے یہ ظاہر ہے کہ وہ تمام وتر جو  $MA = m$  کے متوازی ہیں خط  $MA = m$  لائے تنصیف ہوتے ہیں۔  
پس اگر ناقص کا ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی و ترونگی تنصیف کرے تو یہ دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی و ترونگی تنصیف کرے گا۔

تعریف: دو قطر مزدوج کہلاتے ہیں جبکہ ہر ایک دو سرے کے متوازی و ترونگی تنصیف کرے۔

۱۲۹۔ کسی قطر کے ایک سرے پر کا محاس  $MA$  و ترونگی کے

(۱۶۴)

متوازی ہوتا ہے جو اس قطر سے تنصیف ہوتے ہیں۔

متوازی و ترونگی کے نظام کے تمام نقاط وسطی ایک قطر پر ہوتے ہیں۔  
اس لیے متوازی محاسوں پر یعنی  $MA$  متوازی و ترونگی پر جو ناقص کو منطبق نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔ غور کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ متوازی و ترونگی نظام کے نقاط وسطی کا قطر  $MA$  محاسوں کے نقاط  $MA$  میں سے گذرتا ہے جو و ترونگی کے متوازی ہیں۔

مثال ۱۔ ناقص کے ایک قطر کے کسی نقطہ کا قطبی مزدوج

قطر کے متوازی ہوتا ہے۔

کیونکہ (لا، ما) میں سے گذرنے والا قطر  
لا-ما۔ لا = ۰

اور (لا، ما) کا قطبی

$$\frac{لا}{۲ا} + \frac{ما}{۲ب} - ۱ = ۰$$

ہے۔ یہ مساواتیں شرط  $m = \frac{b^2}{a}$  کو پورا کرتی ہیں کیونکہ

$$m = \frac{b^2}{a} \text{ اور } m = -\frac{b^2}{a}$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ناقص کے ایک دوزخہ وسطی نقطہ (لا، ما) ہے تو

یہ وتر نقطہ (لا، ما) کے قطبی کے متوازی ہے۔

اس لیے اس وتر کی مساوات جس کا نقطہ وسطی (لا، ما) ہے

$$0 = \frac{b^2}{a} (لا - ما) + \frac{لا^2}{a}$$

۱۔ مثال ۲۔ اگر ایک ناقص کے وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں تو ان کے نقاط وسطی دوسرے ناقص پر ہوں گے۔

وہ وتر جس کا نقطہ وسطی (لا، ما) ہے

$$[ \text{مثال (۱)} ] \quad 0 = \frac{b^2}{a} (لا - ما) + \frac{لا^2}{a}$$

ہے۔ اگر یہ وتر نقطہ (ک، ک) میں سے گزرے تو

$$0 = \frac{b^2}{a} (لا - ک) + \frac{لا^2}{a}$$

اور اس طرح نقطہ (لا، ما) ناقص

$$0 = \frac{b^2}{a} (ک - لا) + \frac{ک^2}{a}$$

۲۔ مثال ۳۔ ناقص پر کے ان دو نقطوں کو ملانے والا خط جنکے

خارج المرکز زاویوں کا فرق مستقل ہو دوسرے ناقص کو لاف کرتا ہے۔

تقطوع طم، اور طم کو طم نے والے خط کی مساوات جبکہ طم = طم = ۲ عہ  
حسب ذیل ہے

$$\frac{لا}{۲} = \frac{۱}{۲} (طم + طم) + \frac{۱}{۲} (طم + طم) \text{ جب } \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ جم عہ}$$

اس خط کا لاف، (طم + طم) کی مختلف قیمتوں کے لیے

$$\frac{لا}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ جم عہ} \quad [ \text{مثال ۲ صفحہ} ]$$

۴۔ مثال ۳۔ اگر ایک ناقص میں ایک مثلث بنایا جائے  
اور اس کے دو اضلاع معلومہ خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو تیسرے  
ضلع کا لاف ایک دوسرا ناقص ہوگا۔

(۱۶۵) فرض کرو کہ ق، ق، ق کے خارج المرکز زاویے طم، طم، طم ہیں۔  
تب اگر ق اور ق، ق معلومہ خطوں کے متوازی ہوں تو  
طم + طم = مستقل = ۲ عہ اور طم + طم = مستقل = ۲ بہ

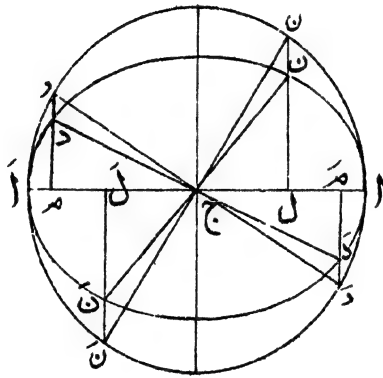
پس طم - طم = ۲ (عہ - بہ)  
اس لیے، بموجب مثال ۲، ق کا لاف  
$$\frac{لا}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ جم عہ} \quad (بہ)$$

۵۔ ۱۳۰۔ فرض کرو کہ مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سرے ن، د  
ہیں۔ فرض کرو کہ ن کے محدد لا، ما اور د کے محدد لا، ما ہیں۔ جن  
اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{لا}{لا} = \frac{ما}{ما} \text{ اور } \frac{لا}{لا} = \frac{ما}{ما}$$

ہیں، اس لیے دفعہ ۱۲۸ (۵) کی رو سے  $\frac{لا}{لا} = \frac{ما}{ما}$ ۔

$$\frac{لا}{لا} = \frac{ما}{ما} + \frac{لا}{لا} \dots (۱)$$



اگر ن اور د کے خارج المکز زاویے فہ، فہ ہوں تو لا = اجم فہ  
ما = ب جب فہ لا = اجم فہ، ما = ب جب فہ - ان قیمتوں کو (۱) میں  
درج کرنے سے

$$\text{جم فہ فہ} + \text{جب فہ جب فہ} =$$

$$\frac{\eta}{\eta} = \text{فہ فہ}$$

(۱۲۶) پس ایک ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سروں پر کے  
نقطوں کے خارج المکز زاویوں کا فرق ایک قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔  
اگر ناقص کے قطروں ن ج ن اور د ج د کے جواب میں  
امدادی دائرہ کے قطر ن ج ن، د ج د ہوں تو ن ج ن اور د ج د

ہاں علی القواہم ہوں گے۔ اس لیے دائرہ کے محدودوں کو فوراً ان یان کے محدودوں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۱۳۱۔ ثابت کرو کہ دو مزدوج نیم قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سرے 'ن' 'د' ہیں۔ فرض کرو کہ 'ن' کا خارج المرکز زاویہ 'فہ' ہے تو 'د' کا خارج المرکز زاویہ

$$فہ \pm \frac{\pi}{4} \text{ ہوگا (دفعہ ۱۳۰)۔}$$

'ن' کے عدد الجہم 'فہ' 'ب' جب 'فہ' اور 'د' کے عدد الجہم 'فہ'  $(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4})$  'ب' جب 'فہ'  $(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4})$  ہوں گے۔

$$\text{ج 'ن' = 'د' الجہم + 'ب' جب 'فہ'}$$

$$\text{ج 'د' = 'د' الجہم + 'ب' جب 'فہ' + 'ب' جب 'فہ'}$$

$$\text{ج 'ن' + ج 'د' = 'د' الجہم + 'ب'}$$

۱۳۲۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ایک ناقص کو مزدوج

قطروں کے سروں پر مس کرے مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مزدوج قطر 'ج' 'ن' 'د' 'ج' 'د' ہیں۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ناقص کو 'ن' 'د' 'د' پر مس کرتا ہے 'ج' 'ن' 'ج' 'د' جب 'ن'

عمود ہے۔ 'ج' 'د' 'ج' 'ف' ہے جہاں 'ج' 'ف' 'ج' سے 'ن' پر کے خاص

اب اگر 'ن' کا خارج المرکز زاویہ 'فہ' ہو تو 'د' کا خارج المرکز زاویہ 'فہ'  $\pm \frac{\pi}{4}$  ہوگا۔

$$ج د = ا^2 جم (ف \pm \frac{1}{4}) + ب^2 جب (ف \pm \frac{1}{4})$$

$$یا ج د = ا^2 جب ا ف + ب^2 جم ا ف \quad (۱)$$

ن پر کے تماس کی مساوات (دفعہ ۱۲۳)

(۱۲۴)

$$\frac{ا}{۱} جم ف + \frac{ب}{ب} جب ف = ا$$

$$ہے۔ اس لیے ج ف = \frac{ا}{جم ف + \frac{ب}{ب} جب ف}$$

$$یا ج ف = \frac{ا^2 ب}{ا^2 جب ا ف + ب^2 جم ا ف} \quad (۲)$$

ہے۔

(۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ متوازی الاضلاع کا رقبہ ۴ ا ب کے مساوی ہے۔

۱۳۳۔ اگر مزدوج نیم قطروں کے ایک زوج کے طول ر، ر اور ان کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو

$$ر ر جب طہ = ا ب \quad [دفعہ ۱۳۲]$$

اس لیے جب طہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ ر ر بڑے سے بڑا ہو۔  
اب دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے، اس لیے  
ان کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ قطر ایک دوسرے کے مساوی  
ہوں۔

پس دو مزدوج قطروں کا درمیانی مادہ زاویہ کم سے کم ہوتا ہے  
جبکہ مزدوج قطر باہم مساوی ہوں۔

۱۳۴۔ فرض کرو کہ دو مزدوج قطروں کے سروں ن د کے خارج المکز  
زاویہ فہ  $\pm \frac{1}{4}$  ہیں۔

تب ج ن<sup>۲</sup> = ا<sup>۲</sup> جم<sup>۲</sup> فہ + ب<sup>۲</sup> جب<sup>۲</sup> فہ  
 اور ج د<sup>۲</sup> = ا<sup>۲</sup> جب<sup>۲</sup> فہ + ب<sup>۲</sup> جم<sup>۲</sup> فہ  
 ∴ ج ن<sup>۲</sup> - ج د<sup>۲</sup> = (ا<sup>۲</sup> - ب<sup>۲</sup>) جم<sup>۲</sup> فہ  
 پس ج ن = ج د جبکہ فہ =  $\frac{۱۱}{۱۴}$  یا  $\frac{۱۳}{۱۴}$   
 اس لیے مساوی مزدوج قطروں کی مساواتیں  

$$\frac{۱۱}{۱} + \frac{۱۳}{۱} = \frac{۱۱}{۱}$$

ہیں۔ پس ایک ناقص کے مساوی مزدوج قطر، اس مستطیل کے  
 (۱۶۸) وتروں پر سمتوں میں منطبق ہوتے ہیں جو ناقص کے محوروں کے  
 سروں پر کے محاسوں سے بنتا ہے۔

۱۳۵۔ تعریف۔ وہ دو خطوط مستقیم جو ایک ناقص پر کسی  
 نقطہ سے کسی قطر کے سروں تک کھینچے جائیں تکمیلی وتر کہلاتے ہیں۔  
 فرض کرو کہ ناقص کے نقطہ ق کو قطر ن ج ن کے سروں  
 ن، ن سے ملا کر تکمیلی وتر مائل کئے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ ق ن کا  
 نقطہ وسطی ط ہے اور ق ن کا ط۔ تب ج ط اور ج ط مزدوج ہیں  
 کیونکہ ہر ایک دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے، اور ج ط  
 اور ج ط علی الترتیب ق ن اور ق ن کے متوازی ہیں۔  
 پس ق ن اور ق ن مزدوج قطروں کے ایک زوج کے  
 متوازی ہیں۔

۱۳۶۔ ہم دائری نقطے۔ مساوات



ایک ایسے منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ناقص

$$1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

اور دائرہ کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

اب (۱) سے دو خطوط مستقیم تعبیر ہوں گے اگر لہ کو ٹھیک طور پر منتخب کیا جائے اور دفعہ ۳۷ میں معلومہ شرط پوری ہو۔ نیز جب (۱) سے دو خطوط مستقیم تعبیر ہوتے ہیں تو وہ خطوط

$$= \frac{a^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = (a^2 + y^2)$$

کے متوازی ہوں گے اور اس لیے وہ شکل  $a = \pm m$  لہ کے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں گے۔

پس ایک ناقص اور کسی دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گذرنا دو خطوط مستقیم محوروں کے ساتھ مساوی زاویہ بناتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ ایک دائرہ ایک ناقص کو ان نقطوں پر قطع کرتا ہے جن کے خارج المرکز زاویہ  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$ ،  $\delta$ ،  $\epsilon$ ،  $\zeta$  ہیں۔ تب یہ دو خطوط

$$\frac{a}{b} \cos \alpha + \frac{a}{b} \cos \beta + \frac{a}{b} \cos \gamma + \frac{a}{b} \cos \delta + \frac{a}{b} \cos \epsilon + \frac{a}{b} \cos \zeta$$

اور  $\frac{a}{b} \cos \alpha + \frac{a}{b} \cos \beta + \frac{a}{b} \cos \gamma + \frac{a}{b} \cos \delta + \frac{a}{b} \cos \epsilon + \frac{a}{b} \cos \zeta$  محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں گے اور اس لیے

$$\text{مس} \frac{1}{4} = (\text{عہ} + \text{بہ}) - \text{مس} \frac{1}{4} = (\text{جہ} + \text{ضہ})$$

$$\text{ن} = \frac{1}{4} (\text{عہ} + \text{بہ}) + \frac{1}{4} (\text{جہ} + \text{ضہ}) = \text{ن} \quad \text{یا}$$

$$\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} = 2 \text{ ن} \quad \text{..... (۱)}$$

اب ایک ایسے نقطہ پر جہاں دائرہ

$$\text{لا}^1 + \text{ما}^1 + \text{گ}^1 + \text{لا}^2 + \text{ف}^2 + \text{ما}^2 + \text{ج}^2 =$$

ناقص کو قطع کرتا ہے خارج المرکز زاویہ شرط

$$\text{و}^1 \text{جم}^1 + \text{ب}^1 \text{جب}^1 + \text{گ}^1 + \text{جم}^2 + \text{ف}^2 + \text{ب}^2 \text{جب}^2 + \text{ج}^2 =$$

کو پورا کرتا ہے۔ پس

$$\{ (1 - \text{ب}^1) \text{جم}^1 + \text{گ}^1 + \text{جم}^2 + \text{ج}^2 + \text{ب}^2 \} = \text{ف}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 + \text{ب}^2$$

$$= \text{ف}^2 + \text{ب}^2 - \text{ف}^2 + \text{ب}^2 + \text{جم}^2$$

$$\text{اس لیے جم}^1 + \text{عہ} + \text{جم}^2 + \text{بہ} + \text{جم}^3 + \text{جہ} + \text{جم}^4 + \text{ضہ} = \frac{\text{گ}^1}{\text{ب}^1 - \text{لا}^1}$$

$$\text{اسی طرح جب}^1 + \text{عہ} + \text{جب}^2 + \text{بہ} + \text{جب}^3 + \text{جہ} + \text{جب}^4 + \text{ضہ} = \frac{\text{ف}^2}{\text{ب}^2 - \text{لا}^2}$$

$$\text{لیکن چونکہ عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} = 2 \text{ ن}$$

$$\text{اس لیے جم}^1 + \text{عہ} = \text{جم}^2 + \text{بہ} + \text{جم}^3 + \text{جہ} = \text{جب}^1 + \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} =$$

نیز دائرہ کا مرکز (گ - ف) ہے۔

اس لیے اُس دائرہ کے مرکز کے محدود نقطوں میں سے گذرتا ہے جن کے خارج المرکز زاویے عہ، بہ، جہ ہیں

$$\text{لا} = \frac{\text{ب}^1 - \text{لا}^1}{\text{جم}^1 + \text{عہ} + \text{جم}^2 + \text{جہ} + \text{جم}^3 + \text{بہ} + \text{جم}^4 + \text{ضہ}}$$

$$\text{اور ما} = \frac{\text{ب}^2 - \text{لا}^2}{\text{جب}^1 + \text{عہ} - \text{جب}^2 + \text{بہ} + \text{جم}^3 + \text{جہ} + \text{جم}^4 + \text{ضہ}} \quad \text{..... (ب)}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مثال۔ ناقص  $\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} = 1$  میں ایک متساوی الاضلاع

مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ متساوی الاضلاع مثلث کے مرکز ہندسی کا قطر

$$\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} = \frac{a^2(b^2 + 3 + a^2)}{b^2} + \frac{b^2(a^2 + 3 + b^2)}{a^2}$$

اگر مثلث کے راس 'ع'، 'ب'، 'جہ' ہیں تو مرکز ہندسی

$$3 = a = b = c \quad (جم + ع + جم + جہ)$$

$$3 = b = c \quad (جب + ع + جب + جہ)$$

سے حاصل ہوگا۔

اس ایک متساوی الاضلاع مثلث میں مرکز ہندسی، حاطہ مرکز پر منطبق

ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} = 3 = \frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} = 3 \quad (جم + ع + جم + جہ)$$

$$\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} = 3 = \frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} = 3 \quad (جب + ع + جب + جہ)$$

مربع لو اور جمع کرو تو

$$\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} = \frac{a^2(b^2 + 3 + a^2)}{b^2} + \frac{b^2(a^2 + 3 + b^2)}{a^2}$$

۱۳۷۔ مزدوج قطروں کو محاور قرار دیکر ان کے حوالے سے ناقص

کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ناقص کے محور اعظم اور محور اصغر کے حوالے سے اسکی مساوات

$$(1) \quad \frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} = 1$$

ہے۔

چونکہ مبدا اپنی جگہ پر قائم ہے اس لیے 'لا' 'ما' کی بجائے شکل 'ل' 'لا' + 'م' 'ما' کے جلوں کو درج کرنا ہوگا تاکہ استعمال شدہ مساوات حاصل ہو [دفعہ ۵۱] -  
اس لیے ناقص کی مساوات شکل

$$(۲) \dots\dots\dots 'ا' = 'ب' + 'لا' + 'ما' \dots\dots\dots$$

کی ہوگی -

بموجب فرض محور 'لا'، محور 'ما' کے متوازی تمام وتروں کی تنصیف کرتا ہے - اس لیے 'لا' کی کسی مخصوص قیمت کے لیے (۲) سے محصلہ 'ما' کی دو قیمتیں سیاوی اور مختلف العلامت ہونی چاہئیں - پس  $۰ = ۵۰$  اور اس لیے ناقص کی مساوات شکل

$$(۳) \dots\dots\dots 'ا' = 'ب' + 'لا' \dots\dots\dots$$

کی ہوگی -

محوروں 'لا'، 'ما' پر مقطوعوں کے طول (۱، 'ب'، 'ا') معلوم کر نیکی لیے (۳) میں علی الترتیب  $ما = ۰$  اور  $لا = ۰$  رکھنا چاہئے چنانچہ

$$'ا' = 'ب' + 'لا'$$

پس مزدوج محوروں کے حوالے سے ایک ناقص کی مساوات

$$۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ا}$$

ہے جہاں 'ا'، 'ب'، نیم قطروں کے طول ہیں -

۱۳۸ - دفعہ سابق سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب ایک ناقص کی مساوات مزدوج قطروں کے کسی زوج کے حوالے سے معلوم کیا جاتا ہے تو اس کی شکل وہی ہوتی ہے جو محور اعظم اور محور اصغر کو محاور مان کر حاصل کی گئی تھی -

یہ بھی مشاہدہ طلب ہے کہ دفعات ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۹ اور ۱۲۸ درست رہتے ہیں جبکہ محدودوں کے محاور مزدوج قطعوں کے کوئی زوج ہوں -

۱۳۹۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک ناقص کے تین نقطوں پر کے  
عماد ایک نقطہ پر مل سکیں۔

نقطوں ع، ب، جہ پر کے عماد (حسب دفعہ ۱۲۵)  
الاجب ع۔ ب ما جم ع = (ا۔ ب) جب ع جم ع، وغیرہ ہیں۔  
اس لیے وہ شرط کہ ع، ب، جہ پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں یہ ہے کہ

$$0 = \begin{vmatrix} \text{جب ع} & \text{جم ع} & \text{جب ۲ ع} \\ \text{جب ب} & \text{جم ب} & \text{جب ۲ ب} \\ \text{جب جہ} & \text{جم جہ} & \text{جب ۲ جہ} \end{vmatrix}$$

یعنی جب ۲ ع جب (ب۔ جہ) + جب ۲ ب جب (جہ۔ ع)۔

+ جب ۲ جہ جب (ع۔ ب) = ۰ ... (۱)

اب جب (ب + جہ) + جب (جہ + ع) + جب (ع + ب)

اور جب (ب۔ جہ) + جب (جہ۔ ع) + جب (ع۔ ب)

کا حاصل ضرب

$$\{ \text{جب (ب + جہ) جب (جہ + ع) جب (ع + ب)} \} + \{ \text{جب (ب۔ جہ) جب (جہ۔ ع) جب (ع۔ ب)} \}$$

$$+ \{ \text{جب (ب + جہ) جب (جہ + ع) جب (ع + ب)} \}$$

ہے۔ لیکن ۲ { جب (ب + جہ) جب (جہ + ع) جب (ع + ب) } (۱۴۲)

$$= \{ \text{جم ۲ جہ۔ جم ۲ ب} \} + \{ \text{جم ۲ ع۔ جم ۲ جہ} \} + \{ \text{جم ۲ ب۔ جم ۲ ع} \} = ۰$$

$$\{ \text{جب (جہ + ع) جب (ع + ب) جب (ب + جہ)} \} + \{ \text{جب (جہ۔ ع) جب (ع۔ ب) جب (ب۔ جہ)} \}$$

$$= \{ \text{جم (ب + جہ)۔ جم (جہ + ع)۔ جم (ع + ب)} \} + \{ \text{جم (ب۔ جہ)۔ جم (جہ۔ ع)۔ جم (ع۔ ب)} \}$$

$$- \{ \text{جم (ب + جہ)} \}$$

$$= \{ \text{جب ۲ ع جب (جہ۔ ب)} \}$$

$$\{ \text{جب (ب۔ جہ)} \} = - \{ \text{جب ۲ ب۔ جب ۲ جہ۔ جب ۲ ع} \} \text{ اور}$$





$$م م = \frac{ب}{۲} \quad [دفعہ ۱۳۸] \dots \dots \dots (۱)$$

لیکن

$$ن ت = م ۱ \quad اور \quad ن ت = م ۱$$

$$\therefore ن ت \times ن ت = م م ۲ \quad \dots \dots \dots (۲)$$

$$\therefore ن ت \times ن ت = ب ۲ \quad (۱) سے$$

مثال ۳۔ ایک ناقص کے کسی دو قطروں کے سروں کو

ملانے والا خط ہمیشہ ایک ثابت دائرہ کو مس کرے گا اگر قطر باہم  
 علی القوائم ہوں۔

فرض کرو کہ ج ف، ج ق دو قطر ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

فرض کرو کہ خط ج ق کی مساوات لاجم ع + ماجب ع = ع ہے۔

خط ج ق اور ج ق کی مساواتیں (دفعہ ۳۸)

$$(۱) \dots \dots \dots \left( \frac{لاجم ع + ماجب ع}{ع} \right) = \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{۲} \quad (۱)$$

ہونگی۔

لیکن چونکہ خطوط ج ف اور ج ق باہم علی القوائم ہیں اس لیے (۱)  
 میں لا اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہے [دفعہ ۳۶]۔

(۱۴۴)

$$\therefore \frac{۱}{ع} = \frac{۱}{ب} + \frac{۱}{۲}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکز سے خط ج ق کا عمودی فاصلہ مستقل ہے۔

اس لیے خط ج ق ہمیشہ ایک دائرہ کو مس کرتا ہے۔

مثال ۴۔ ایک ناقص کے عمادی وتروں کے قطبیوں کا

طریق معلوم کرو۔



کسی نقطہ طہ پر کے عماد کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{ا}{ب} - \frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ا} - \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots (۱)$$

ہے۔ کسی نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱ \dots\dots\dots (۲)$$

ہے۔ مساواتیں (۱) اور (۲) ایک ہی خط کو تعبیر کر نیگی اگر

$$(ا - ب) \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots اور (ا - ب) \frac{ب}{ا} = - \frac{ب}{ا} \dots\dots\dots جب طہ$$

$$یا (ا - ب) \frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ا} \dots\dots\dots اور (ا - ب) \frac{ا}{ب} = - \frac{ا}{ب} \dots\dots\dots جب طہ$$

اس لیے ان دو آخری مساواتوں کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$(ا - ب)^2 = \frac{ا^2}{ب^2} + \frac{ب^2}{ا^2}$$

اور اس لیے طریق کی مساوات

$$لا، ما (ا - ب)^2 = ا^2 + ب^2$$

ہے۔

مثال ۵۔ اگر ایک ناقص کے گرد ایک ذوا ربعة الافلاک

کھینچا جائے تو اس کے وتروں کے نقاط وسطی میں سے گزرنیوالا

خط ناقص کے مرکز میں سے گزرے گا۔

فرض کرو کہ ماسوں کے چار نقاط تماس کے خارج المکرز زاویہ عہ، یہ

جہ، ضہ ہیں۔

نقطہ عہ، یہ پر کے ماسوں کی مساواتیں

$$\frac{لا}{ا} = \frac{جم}{ب} + \frac{جم}{ب} جب ع = ا اور \frac{لا}{ا} = \frac{جم}{ب} + \frac{جم}{ب} جب ب = ا$$

ہیں۔ یہ ماس نقطہ

$$\left( \frac{جم}{ب} + \frac{جم}{ب} جب ع = ا , \frac{جم}{ب} + \frac{جم}{ب} جب ب = ا \right)$$

پر ملتے ہیں۔ اسی طرح جہ اور ضہ پر کے ماس نقطہ

$$\left( \frac{جم}{ب} + \frac{جم}{ب} جب ضہ = جہ , \frac{جم}{ب} + \frac{جم}{ب} جب جہ = ضہ \right)$$

پر ملیں گے۔

اُس خط کے نقطہ وسطی کے محدود ان نقاط تقاطع کو ملاتا ہے

(۱۷۵)

$$\frac{لا}{۲} = \frac{جم}{ب} + \frac{جم}{ب} جب ع = ا + \frac{جم}{ب} جب ب = ا + \frac{جم}{ب} جب جہ = ضہ + \frac{جم}{ب} جب ضہ = جہ$$

$$\frac{ب}{۲} = \frac{جم}{ب} + \frac{جم}{ب} جب ع = ا + \frac{جم}{ب} جب ب = ا + \frac{جم}{ب} جب جہ = ضہ + \frac{جم}{ب} جب ضہ = جہ$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس لیے وہ خط جو اس نقطہ کو ناقص کے مرکز سے ملاتا ہے محور اعظم کے ساتھ

ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا ماس

$$\frac{ب}{ا} = \frac{جم}{ب} + \frac{جم}{ب} جب ع = ا + \frac{جم}{ب} جب ب = ا + \frac{جم}{ب} جب جہ = ضہ + \frac{جم}{ب} جب ضہ = جہ$$

ہے اور یہ

$$\frac{ب}{ا} = \frac{جم}{ب} + \frac{جم}{ب} جب ع = ا + \frac{جم}{ب} جب ب = ا + \frac{جم}{ب} جب جہ = ضہ + \frac{جم}{ب} جب ضہ = جہ$$

کے مساوی ہے جہاں ۲ = ع + ب + جہ + ضہ -

اوپر کے نتیجہ کے متشاکل سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ وہ خط جو ناقص کے مرکز کو

ذو اربعۃ الاضلاع کے دتروں میں سے ایک کے نقطہ وسطی سے ملاتا ہے دوسرے

دو وتروں کے نقاط وسطی میں سے بھی گذرتا ہے۔ اس سے نیوٹن کا یہ مسئلہ ثابت ہوتا ہے: اگر ایک ناقص ایک ذواربعۃ الاضلاع کے ضلعوں کو مس کرے تو اس کا مرکز اس خط پر ہوتا ہے جو وتروں کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے۔ [بیزدیکھو دفعات ۲۱۹ اور ۲۲۴]

مثال ۶۔ ف ق مرا ایک مثلث ہے جو دائرہ

لا۔ ما۔ ا۔ میں بنایا گیا ہے۔ اضلاع ف ق، ف مرا

علی الترتیب نقطوں (ب، ا) اور (ج، ب) میں سے گذرتے ہیں۔

ثابت کرو کہ ق مرا، مخروطی لا۔ ما۔ ا۔ (ا۔ ب ج ا) اور (ا۔ ب ج ا) کو مس کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ف ق، مرا کے معد علی الترتیب (ا ج م ط، ا جب ط،)

وغیرہ ہیں۔

ف ق کی مساوات

لا ج م ط،  $\frac{1}{4}$  (ط، + ط،) + ما جب ا  $\frac{1}{4}$  (ط، + ط،) = ا ج م ط،  $\frac{1}{4}$  (ط، - ط،)

ہے۔ مس  $\frac{1}{4}$  ط، وغیرہ کی بجائے م، وغیرہ رکھنے سے

$$\frac{ب}{ا} = \frac{ج م ط، \frac{1}{4} (ط، - ط،) + ۱}{ج م ط، \frac{1}{4} (ط، + ط،) - ۱} = \frac{۱ + م، ا، م،}{۱ - م، ا، م،}$$

$$\frac{۱ + م، ا، م،}{۱ - م، ا، م،} = \frac{ج}{ا} \quad \text{اسی طرح}$$

پس  $۱ + م، ا، م، = (ا + ب) + (ب - ا) = ۰$  اور  $۱ + م، ا، م، = (ج + ا) + (ا - ج) = ۰$



علی الترتیب ف ر، ق، م پر عمود ہیں اور وہ محور سے گ، گ پر ملتے ہیں۔  
ثابت کرو کہ گ، گ مستقل ہے۔

۵۔ ناقصوں کا ایک سلسلہ معلومہ ماسکہ اور متناظر مرتب کے ساتھ  
کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے محاور اصغر کے سروں کا طریق ایک مکانی ہے۔

۶۔ ایک ناقص کا ایک دوہرا معین ن ل ن ہے اور ق ناقص  
کوئی نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ق ن، ق ن محور اصغر سے علی الترتیب م،  
م پر ملیں تو ج م، ج م = ج م (۲)۔

۷۔ ایک ناقص کے ماسکوں میں سے گذرتے ہوئے خطوط کھینچے گئے  
ہیں جو علی الترتیب فردوج قطروں کے ایک زوج پر عمود ہیں اور ق پر متقاطع  
ہوئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ہم مرکز ناقص ہے۔

۸۔ ایک ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا ماس مساوی فردوج قطروں کو  
ت، ت پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلثوں ت ج ن اور ت ج ن  
میں نسبت ج ت : ج ت : ہے۔

۹۔ اگر ج ق، ن پر کے عماد کا فردوج ہو تو ج ن، ق پر کے  
عماد کا فردوج ہوگا۔

۱۰۔ اگر ایک ناقص کے فردوج قطروں کے سرے ن، د ہوں اور  
ن، د وہ وتر ہوں جو ناقص کے ایک محور کے متوازی ہیں تو ثابت کرو کہ  
ن، د، ن، د، مساوی فردوج قطروں کے متوازی ہیں۔

۱۱۔ اگر فردوج قطروں کے سرے ن، د ہوں اور ن، د پر کا ماس  
محور اعظم کو ت پر اور د پر کا ماس محور اصغر کو ت پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ  
ت، ت، مساوی فردوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہے۔

۱۲۔ ایک ناقص کا کوئی وتر ق ق ہے جو ایک مساوی فردوج قطر کے  
متوازی ہے۔ ق، ق پر کے ماس ت پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ دائرہ  
ق ت ق، مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص میں کسی نقطہ پر کا عماد ان عمودوں کا چوتھا

متناسی ہے جو مرکز سے اور دو ماسکوں سے تماس پر کھینچے گئے ہوں۔

۱۴۔ ایک ناقص کے دو مزدوج قطر کھینچے گئے ہیں اور ان کے چار سروں کو ایک معلوم دائرے کسی نقطہ سے ملا لیا گیا ہے۔ دائرہ کامرکز ناقص کے مرکز پر ہے۔ ثابت کرو کہ ان چار خطوں کے طولوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔

۱۵۔ ایک ناقص کا ایک دوہرا معین  $N L N$  ہے، ناقص کامرکز  $J$  ہے اور  $N$  پر کا عماد  $J N$  سے وپر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ وکاطریق ایک ناقص ہے۔

۱۶۔ اگر کسی نقطہ  $N$  پر کا عماد محور اعظم کو گ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ  $N$  کے مختلف محلوں کے لیے  $N$  گ کے وسطی نقطہ کا طریق ایک قطع ناقص ہے۔

۱۷۔ ایک ناقص کے راس  $A$ ،  $A'$  ہیں اور اس پر کوئی نقطہ  $N$  ہے۔ ثابت کرو کہ اگر  $N$ ،  $A$  پر عمود ہو اور  $N$ ،  $A'$  پر عمود ہو جہاں  $A$  اور  $N$ ، محور  $A A'$  پر ہیں تو  $N$  ناقص کے وتر خاص کے مساوی ہے۔

۱۸۔ ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو جس سے ایک ناقص کے دو تماس جو محور اعظم کے ساتھ زاویہ  $\theta$ ،  $\theta'$  بنائیں کھینچے جاسکیں اور (۱)  $\sin \theta + \sin \theta'$  مستقل ہو، (۲)  $\cos \theta + \cos \theta'$  مستقل ہو، یا (۳)  $\sin \theta \sin \theta'$  مستقل ہو۔

۱۹۔ ایک ناقص کے کسی دو قطروں کے دو سروں کو ملا نیو الا خط اس خط کے متوازی یا مزدوج ہوتا ہے جو ان کے مزدوج قطروں کے دو سروں کو ملاتا ہے۔

۲۰۔ اگر ایک ناقص کے مزدوج قطروں کے سرے  $N$  اور  $N'$  ہوں تو

(۱۷۸)

ثابت کرو کہ  $N$  اور  $N'$  کے تماس ناقص  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a'^2}{b'^2} = 2$  پر ملتے ہیں اور

$N$  کے نقطہ وسطی کا طریق  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{1}{4}$  ہے۔

۲۱۔ ایک خط کھینچا گیا ہے جو ایک ناقص کے محور اصغر کے متوازی ہے

اور ایک ماسکہ اور متناظر مرتب کے وسط میں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس ماسکہ میں سے گذرنے والے کسی دتر کے سرور سے اس خط پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہوگا۔

۲۲۔ دو نقطوں کے خارج المرکز زاویے  $\alpha$ ،  $\beta$  ہیں۔ اگر ان کو ملا کر وتر ایک ناقص کے محور اعظم کو مرکز سے فاصلہ  $f$  پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس } \frac{\alpha}{2} \text{ مس } \frac{\beta}{2} = \frac{f}{1+f} \text{ جہاں } 1 \text{ محور اعظم کا طول ہے۔}$$

۲۳۔ اگر ایک ناقص کے محور اعظم پر کے دو نقطوں میں سے کوئی دو تر کھینچے جائیں جو مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\delta}{2}$$

جہاں  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$ ،  $\delta$  وتروں کے سرور کے خارج المرکز زاویے ہیں۔

۲۴۔ اگر ایک ناقص کے ماسکے  $S$ ،  $H$  ہوں اور متعین پر کوئی نقطہ  $A$  لیا جائے اور وتر  $AS$ ،  $BS$ ،  $CS$ ،  $DS$ ،  $ES$ ،  $FS$ ،  $GS$ ،  $HS$  کھینچے جائیں اور  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ،  $E$ ،  $F$ ،  $G$ ،  $H$  کے خارج المرکز زاویے  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$ ،  $\delta$ ،  $\epsilon$ ،  $\zeta$ ،  $\eta$ ،  $\theta$  ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\epsilon}{2} = \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\zeta}{2} = \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\eta}{2} = \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{\theta}{2}$$

۲۵۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو ان نقطوں پر کے ماسوں سے

بنے جن کے خارج المرکز زاویے  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  ہیں  $1$  ب مس  $\frac{1}{2}$  (ب - ب) (ب - ب)  $\times$  مس  $\frac{1}{2}$  (ب - ب) مس  $\frac{1}{2}$  (ب - ب) ہے۔

۲۶۔ ان نقطوں پر جن کے خارج المرکز زاویے  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$ ،  $\delta$ ،  $\epsilon$ ،  $\zeta$ ،  $\eta$ ،  $\theta$  ہیں ماس کھینچے گئے ہیں اور ان ماسوں سے جو مثلث بننا ہے اس کا محیط دائرہ کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر

$$\frac{f_1 - f_2}{2} \text{ قط } \frac{f_2 - f_3}{2} \text{ قط } \frac{f_3 - f_4}{2} \text{ قط } \frac{f_4 - f_5}{2} \text{ قط } \frac{f_5 - f_6}{2} \text{ قط } \frac{f_6 - f_7}{2} \text{ قط } \frac{f_7 - f_8}{2} \text{ قط}$$

ہے جہاں ف، ق، ر، ناقص کے ان قطروں کے طول ہیں جو مثلث کے ضلعوں کے متوازی ہیں اور ناقص کے نیم محور ا، ب میں۔

۲۷۔ ایک ناقص کے کسی نقطہ ن سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو ماسکوں مں، ہ میں سے گذرتے ہیں اور متناظر مرتب کو ق، م پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق، ہ اور مں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے۔

۲۸۔ اگر ایک ناقص (مرکز ج) اور اس کے امدادی دائرے پر ن، ن متناظر نقطے ہوں اور اگر ج، ن کو خارج کیا جائے اور وہ امدادی دائرہ سے ق، پڑے تو ثابت کرو کہ ق کے متناظر ناقص کے نقطہ ق، پر کا ماس، ج، ن پر عمود ہے اور وہ ج، ن سے، ج، ن کے مساوی طول قطع کرتا ہے۔

۲۹۔ اگر ایک ناقص کے دو عمود وار حماسوں کے نقاط تماس ف، ق ہوں اور امدادی دائرہ پر متناظر نقطے ف، ق ہوں تو ثابت کرو کہ ج، ف، ج، ق، ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔

۳۰۔ دو ہم مرکز دائروں کے مرکز ج سے دو نصف قطر ج، ق، ج، ق کھینچے گئے ہیں جو ایک ثابت خط مستقیم سے مساوی المیلان ہیں، پہلا نصف قطر بیرونی دائرہ کا ہے اور دوسرا اندرونی دائرہ کا۔ ثابت کرو کہ (۱) ق، ق کے نقطہ وسطی ن کا طریق ایک ناقص ہے، (۲) ن، ق اس ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد ہے، اور (۳) ق، ق اس قطر کے مساوی ہے جو ج، ن کا مزدوج ہے۔

۳۱۔ اگر ایک ناقص کے دو نقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا فرق سہ ہو اور ان نقطوں پر کے حماس باہم علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ ا، ب جب سہ = لہ، مہ جہاں ل، مہ وہ نیم قطر ہیں جو ان نقطوں پر کے حماسوں کے متوازی ہیں اور ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں۔

۳۲۔ دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس سے دائروں کے حماس کھینچے جائیں تو ان کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

۳۳۔ ثابت کرو کہ اگر دو مزدوج قطروں میں سے ہر ایک کے دو سروں سے



ناقص کے کسی تماس پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ اس عمود کے مربع کے مساوی ہوگا جو مرکز سے تماس پر کھینچا جائے۔

۳۴۔ ایک ناقص (مرکز ج) کے کسی نقطہ ن کے عماد پر ایک نقطہ ق ایسا ہے کہ خطوط ج ن، ج ق، ناقص کے محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ق، اس قطر کے متناسب ہے جو ج ن کا مزدوج ہے۔

۳۵۔ اگر ایک مخروطی کے تماسوں کا ایک زوج یا ہم علی القوائم ہو (۱۸۰) اور وتر تماس پر مرکز سے اور تماسوں کے نقطہ تقاطع سے عمود کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

۳۶۔ ایک ناقص پر دو علی القوائم تماس کھینچے گئے ہیں۔ وتر تماس کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔

۳۷۔ اگر ایک ناقص پر کوئی نقطہ ن ہو اور کوئی وتر ن ق، ج کے مزدوج قطر کو س پر قطع کرے تو ن ق  $\times$  ن مرا، ن ق کے متوازی قطر کے مربع کا نصف ہوگا۔

۳۸۔ ایک ناقص کے ان تمام وتروں کے نقاط وسطی کا طریق معلوم کرو جو مستقل طول کے ہیں۔

۳۹۔ اگر ایک ناقص میں بنائے ہوئے دو اربعۃ الاضلاع کے تین ضلع علی الترتیب تین دے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ چوتھا ضلع بھی ایک ثابت خط مستقیم کے متوازی ہوگا۔

۴۰۔ اگر ایک کثیر الاضلاع کو ایک ناقص میں بنایا جائے اور اس کے تمام ضلع الا ایک کے دے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو اگر ضلعوں کی تعداد جفت ہے تو بقیہ ضلع ایک معلومہ خط مستقیم کے متوازی ہوگا لیکن اگر ضلعوں کی تعداد طاق ہے تو بقیہ ضلع ایک ناقص کو لنگ کرے گا۔

۴۱۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ایک ناقص کے قطروں کے کسی زوج کے سروں پر کے تماسوں سے بنتا ہے اس متوازی الاضلاع کے رقبہ کے بالعکس متناسب ہوتا ہے جو نقاط تماس کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔

۴۲۔ اگر ایک ناقص کے کسی دو قطروں ج ن، ج ق کے بیروں، ق پر دو مماس ن ن، ق ق کھینچے جائیں اور وہ ایک دوسرے کو تیرا اور مدودہ قطروں کو ن اور ق پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ مثلثوں ت ق ن، ت ن ق کے رقبے مساوی ہیں۔

۴۳۔ ناقص  $\frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب} = ۱$  کے دو مماس ون، وق، نقطہ سے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ج ن ق کا رقبہ

$$= \frac{وا ب^۲ + با^۲ - وک^۲}{۲}$$

اور ذواربعۃ الاضلاع ون ج ق کا رقبہ

$$= \frac{۱}{۲} (وا ب^۲ + وک^۲ - با ب^۲)$$

ہے جہاں ناقص کا مرکز ج ہے اور و کے محدد (ھ، ک) ہیں۔

۴۴۔ ایک ناقص کے مماس ت ن، ت ق ہیں اور اس کا مرکز ج ہے، ثابت کرو کہ ذواربعۃ الاضلاع ج ن ت ق کا رقبہ =  $\frac{۱}{۲}$  بس (ف، ق) جہاں ناقص کے نیم محور وا، ب ہیں اور ن، ق کے خارج المرکز زاویہ ف، ق ہیں۔ (۱۸۱)

۴۵۔ ایک ناقص کا ایک قطر ج ن ہے اور امدادی دائرہ کا متناظر قطر ج ق ہے۔ ثابت کرو کہ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ن، ن، ق، ق پر کے مماسوں سے بنتا ہے  $\frac{۸}{(۱-ب) جب^۲}$  ہے جہاں ف، ن کا خارج المرکز زاویہ ہے۔

۴۶۔ ایک متوازی الاضلاع کو ایک دائرہ کے گرد کھینچا گیا ہے اور اس کے دو اس ثابت خطوط مستقیم پر ہیں جو ایک دوسرے کے متوازی اور مرکز سے مساوی

فاصلہ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے دور اس ایک ناقص پر ہیں جس کا مرکزی  
صغیر دائرہ متوازی الاضلاع کا محاط دائرہ ہے۔

۴۷۔ ایک ناقص کے دو ثابت مزدوج قطروں کو دو خطوط مستقیم و ن  
وق جو ایک ثابت نقطہ و میں سے گزرتے ہیں اور مزدوج قطروں کے کسی دوسرے  
زوج کے متوازی ہیں علی الترتیب نقطوں ن، ق پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت  
کرو کہ ن ق کے وسطی نقطہ کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۴۸۔ اگر ایک ناقص کے مستوی میں و کوئی نقطہ ہو اور اس سے  
ساوی مزدوج قطروں پر عمود و م، و ل کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع  
م و ل ن کے وتر کی سمت و ن، و کے قطبی پر عمود ہوگی۔

۴۹۔ ایک ناقص جس کا مرکز ج ہے تین نقطے ا، ن، ب لیے گئے  
ہیں۔ نقطہ ن میں سے دو خطوط مستقیم نقطوں ا اور ب پر کے محاسوں کے  
متوازی کھینچے گئے ہیں جو ج ب اور ج ا سے علی الترتیب ق اور س پر  
ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق م، ن پر کے محاس کے متوازی ہے۔

۵۰۔ ایک ناقص کے دو نقطوں پر کے عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق  
معلوم کرو جبکہ نقطہ مزدوج قطروں کے سرے ہوں۔

۵۱۔ ایک ناقص کے ایک وتر کے سروں پر جو مساوی مزدوج قطروں  
میں سے ایک کے متوازی ہے عماد کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ عماد ایک قطر پر  
شفاطع ہوتے ہیں جو دوسرے مساوی مزدوج قطر پر عمود ہے۔

۵۲۔ اگر ایک ناقص کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر عماد کھینچے جائیں تو  
وہ خط جو ان کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے اور محور اعظم کے متوازی ہے  
وتر کی تصنیف کرے گا۔

۵۳۔ اگر ایک ناقص (مرکز ج) کے کسی نقطہ ن پر کے عماد میں طول  
ن ق، اس نیم قطر کے مساوی قطع کیا جائے جو ج ن کا مزدوج ہے تو ثابت کرو کہ  
ق، دو دائروں میں سے ایک یا دوسرے پر ہے۔

۵۴۔ نقطہ (لاکما) سے ناقص  $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 1$  کے محاس کھینچے

گئے ہیں۔ اگر ان ماسوں کا درمیانی زاویہ نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$(لا + ما - ا - ب) مس ف = ۲ [ (ب لا + ا ما - ا ب) ]$$

۵۵۔ ت ن ا ت ق وہ ماس ہیں جو ایک بیرونی نقطہ (لا، ما)

سے ناقص  $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$  کے کھینچے گئے ہیں۔ اگر ایک ماسکہ میں ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ما}{ب} + \frac{لا}{ا} = \frac{مس ت ا}{مس ن \times مس ق}$$

۵۶۔ نقطہ ت سے ایک ناقص  $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$  کے دو ماس

کھینچے گئے ہیں اور یہ ماس زاویہ فہ پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ست  
 $\times$  ہ ت جم فہ = ج ت ا - ا - ب جہاں ج مرکز اور س، ہ ماسکے ہیں۔  
 ۵۷۔ اگر ایک ناقص کے مرکز ج سے کسی نقطہ ن پر کے ماس پر  
 عمود کھینچا جائے اور یہ عمود ماسکی فاصلہ مس ن سے (مسودہ بضرورت)  
 سا پر ملے تو اس کا طریق ایک دائرہ ہوگا۔

۵۸۔ اگر دو ہم مرکز ناقص ایسے ہوں کہ ایک کے ماسکے دوسرے پر  
 واقع ہوں اور اگر ان کے خروج المرکز زا، ز، ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے محاور

$$زاویہ جم = \frac{ا [ ز ا + ز ا - ۱ ]}{ز ز}$$

پر مائل ہونگے۔

۵۹۔ ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو ناقص کے ایک قطر کے محاذی  
 محور اعظم کے کسی ایک سرے پر بنتا ہے اس زاویہ کا متیم ہوتا ہے جو خروج  
 قطر کے محاذی محور اصغر کے سرے پر بنتا ہے۔

۶۰۔ اگر ناقص کے مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سروں پر

محورِ اعظم کے محاذی زاویے ط، طہ بنیں تو ثابت کرو کہ مم ط + مم طہ مستقل ہے۔  
 ۶۱۔ اگر ایک ناقص کے ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کے محاذی مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سروں پر زاویے ط، طہ بنیں تو ثابت کرو کہ مس طہ + مس طہ مستقل ہے۔

۶۲۔ اگر لہ، لہ وہ زاویے ہوں جو کسی دو مزدوج قطروں کے محاذی (۱۸۳) ناقص کے کسی ثابت نقطہ پر بنتے ہیں تو ثابت کرو کہ مم لہ + مم لہ مستقل ہے۔  
 ۶۳۔ ثابت کرو کہ ناقص کے مزدوج قطروں کے زوج کسی خطِ مستقیم سے درپیش میں منقطع ہوتے ہیں۔

۶۴۔ ایک دائرہ ناقص  $\frac{لا}{لا} + \frac{با}{با} =$  کو ثابت نقطہ (ع، ہ) پر اور ناقص کے ایک قطر کے سروں پر قطع کرتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ناقص  $لا + لا + با + با = (لا - با) (علا - ہما)$  ہے۔  
 ۶۵۔  $\frac{لا}{لا} + \frac{با}{با} =$  کے چار نقطوں پر کے عماد نقطہ (ع، ہ) پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان چار نقطوں کا اوسط محل

$$\left\{ \frac{1}{پ} و ع \mid لا - با \right\}, \left\{ \frac{1}{پ} با ہ \mid با - لا \right\}$$

ہے۔

۶۶۔ ایک ناقص پر چار ثابت نقطے (ک، ج، د، ہ) ہیں اور اس پر ن کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ن سے (ب اور ج، د، ج اور ج اور د) پر عمود کھینچے جائیں تو (ب اور ج، د پر کے عمودوں کا حاصل ضرب، ج اور د پر کے عمودوں کے حاصل ضرب کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے۔  
 ۶۷۔ ایک ناقص کے دو عماد ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۶۸۔ ایک ناقص کے ایک ماسکی وتر کے ایک سرے پر تماس کھینچا گیا ہے

اور دوسرے سرے پر عماد کھینچا گیا ہے۔ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔  
۶۹۔ ایک ناقص کے محور اعظم کے متوازی دو خطوط مستقیم، محور اعظم

فاصلہ  $\frac{1}{2}b$  پر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوط کے درمیان کسی تماس کا

مقطعہ نقطہ تماس پر دو حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن کے محاذی مرکز پر مصادی زاویے بنتے ہیں۔

۷۰۔ ایک ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد ن گ ہے جہاں گ محور اعظم میں ہے۔ ن گ کو باہر وارقی تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ن ق = گ ن۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ناقص ہے جس کا خروج المکرز  $\frac{1}{2}b$  ہے۔

نیز ن اور ق پر کے تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۷۱۔ ایک ناقص کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی پرن سے عمود کھینچا گیا ہے جو محور اعظم کو گ پر قطع کرتا ہے۔ گ کو مرکز مان کر کوئی دائرہ کھینچا گیا ہے جو ناقص کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ان دو متوازی خطوں سے جو چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں مصادی فاصلہ پر ہے۔

۷۲۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر ناقص  $\frac{1}{2}b$  کا وتر  $\frac{1}{2}b$  کا وتر

$$\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b$$

ہے ناقص کو دوسرے دو نقطوں پر قطع کرتا ہے جنکو ملائو الاخط

$$\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b$$

ہے۔

۷۳۔ ثابت کرو کہ مخروطیوں  $\frac{1}{2}b$  اور  $\frac{1}{2}b$  کا وتر  $\frac{1}{2}b$  کا وتر

میں سے کسی ایک کا حماس ناقص  $\frac{لا^۲}{۲ا} + \frac{ما^۲}{۲ب} - ۱ = ۰$  سے ایسے دو نقطوں پر  
لیگا جن پر کے حماس مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوں گے۔  
۴۔ ایک متوازی الاضلاع کو ناقص

$$۰ = ۱ - \frac{ما^۲}{۲ب} + \frac{لا^۲}{۲ا}$$

کے گرد کھینچا گیا ہے اور اس کے دور اس خطوط  $لا - ھ^۲ = ۰$  پر ہیں۔ ثابت کرو کہ  
اس کے دوسرے دور اس مخروطی

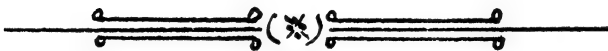
$$۰ = ۱ - \frac{ما^۲(1 - \frac{۲ا}{ھ^۲})}{۲ب} + \frac{لا^۲}{۲ا}$$

پر ہیں۔

۵۔ ایک مثلث کے ضلع دائرہ  $لا + ما - ۲ا = ۰$  کو مس کرتے ہیں  
اور اس کے دور اس خطوط  $ما - ۲ب = ۰$  پر ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرے راس کی  
طریق

$$۰ = \frac{لا^۲ ۲ب^۲ ۲ا^۲}{۲(۲ب - ۲ا)} - ۲ا - ۲ب + ۲ا$$

ہے۔



# ساتواں باب

## قطع زائد

**تعریف** - قطع زائد ایک نقطہ کا طوق ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ (جس کو ماسکہ کہتے ہیں) سے اس کا فاصلہ ایک ثابت خط (جس کو مرتب کہتے ہیں) سے اس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے جو اکائی سے بڑی ہوتی ہے۔

۱۴۰۔ زائد کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ  $s$  ماسکہ اور  $e$  مرتب ہے۔

$s$  سے کو مرتب پر عمود کھینچو۔

$e$  سے  $s$  کو  $a$  پر اس طرح تقسیم کرو کہ  $s : a :: e : d$  دی ہوئی

نسبت =  $z : a$  تب  $a$  منحنی پر کا ایک نقطہ ہے۔

نیز  $s$  سے مدد وہ میں ایک نقطہ  $a$  ہو گا ایسا کہ

$s : a :: e : z$

فرض کرو کہ  $a$  کا نقطہ وسطی ج ہے اور  $a = 2$  تب

$s : 2 = z : e$  اور  $s : a = z : e$

$\therefore s : (s + a) = z : (z + e)$

$\therefore 2 : s = z : 2$

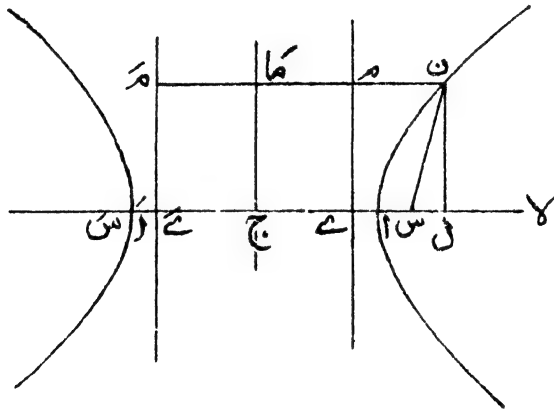


ج س = لز، ..... (۱)

نیز  
یا  
س ا - س ل = ز (س ا - ل) (س ا - ل)  
ا ا = ز (ا ا - ل) (ا ا - ل)  
ج ا = ز × س ج

ج س =  $\frac{ل}{ز}$ ، ..... (۲)

اب فرض کرو کہ ج مبداء ہے، ج ا محور لا اور اس کے عمود وار  
خط محور ما۔  
فرض کرو کہ منحنی کا کوئی نقطہ ن ہے اور اس کے محدود (لا) ہیں۔



تب شکل میں

س ن = ز ن م  
س ل + ل ن = ز س ل  
س ل = ج ل - ج س = لا - لز  
س ل = ج ل - ج س = لا -  $\frac{ل}{ز}$

ب

اور

$$\therefore (لا - ۱ ز) \frac{۱}{۲} + ما = ۲ ز (لا - \frac{۱}{۲})$$

$$یا \quad ما + لا (۱ - ز) = (۲ ز - ۱) \frac{۱}{۲}$$

$$یا \quad \frac{۱}{۲} = \frac{ما}{(۱ - ز)} + \frac{لا}{۲} \quad (۳) \dots \dots \dots$$

چونکہ ز اکائی سے بڑا ہے اس لیے  $\frac{۱}{۲} (۱ - ز)$  منفی ہے۔ اگر ہم  $\frac{۱}{۲} (۱ - ز)$  کی بجائے - ب رکھیں تو مساوات شکل

$$(۴) \dots \dots \dots \frac{۱}{۲} = \frac{ما}{ب} - \frac{لا}{۲}$$

اختیار کرتی ہے۔

وتر خاص وہ وتر ہے جو ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہوتا ہے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے ہمیں مساوات (۴) میں  $لا = ۱$  ز رکھنا چاہئے چنانچہ

$$ما = ب (۱ - ز) = \frac{ب}{۲} \quad \text{کیونکہ } ب = ۲ \text{ (۱ - ز)}$$

پس نیم وتر خاص کا طول  $\frac{ب}{۲}$  ہے۔

۱۴۱۔ مساوات (۴) (دفعہ ۱۴) میں لا، ۱ سے کم نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو ما منفی ہوگا۔ اس لیے منفی کا کوئی حصہ لا = - ۱ اور لا = ۱ کے درمیان واقع نہیں ہے۔

اگر لا < ۱ تو ما مثبت ہوگا اور ما کی کسی مخصوص قیمت کیلئے لا کی دو مساوی مگر مختلف العلامت قیمتیں ہوں گی۔ اس لیے محور ما منفی کو دو متشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر محور لا پر نقطے س، ے ایسے لیے جائیں کہ ج س = س ج اور ج ے = ے ج تو نقطہ س بھی منفی کا ماسکہ ہوگا اور وہ خط جو ے میں سے

(۱۸۷)

گزرتے ہوئے ج سے پر نمود ہو متناظر مرتب ہوگا۔  
اگر منحنی پر کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (لا، ما) بھی منحنی پر ہوگا۔ لیکن نقطے (لا، ما) اور (لا، ما) ایک ایسے خط پر ہیں جو مبدا میں سے گزرتا ہے اور نیز یہ نقطے مبدا سے مساوی فاصلوں پر ہیں۔ اس لیے مبدا ہر اس وتر کی تھیف کرتا ہے جو اس میں گزرتا ہے اور اس لیے اس کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں۔

مسافات (۴) (دفعہ ۱۴۰) سے ظاہر ہے کہ اگر لائے تو ثابت ہوگا اور جیسے لائے ہوگا، ابھی بڑھیکے گا اور لا اور مائے اس اضافہ کی کوئی حد نہیں ہے۔ پس منحنی کچھ ایسا ہے جو دفعہ ۱۴۰ کے نقشہ میں دکھایا گیا ہے اور وہ دو لامتناہی شاخوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

۱۱ گوزائد کا قاطع محور کہتے ہیں۔ وہ خط جو جیس سے

گذرتے ہوئے ۱۱) پر عمود ہے منحنی سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا، لیکن اگر اس خط پر 'ب' ایسے نقطے ہوں کہ  $ب ج = ج ب = ب$  تو خط  $ب ب$  کو فردوج محور کہتے ہیں۔

۱۴۲۔ — زائد پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلے معلوم کرنا۔  
دفعہ ۴۰ کی شکل میں چونکہ  $SN = x$  و  $SN$  کے لیے

مس ن = ز = ل = ز (ج ل - ج ع) = ز (ل -  $\frac{1}{2}$ ) = ز ل -  $\frac{1}{2}$

$$\text{نیرسَن} = \text{زخمَن} = \text{ز(ج ل + مے ج)} = \text{ز(لا + ج)} = \text{ز(لا + ج)} = \text{زلا + لا}$$

۱۴۳ - زاہد کی قطبی مساوات مرکز کو قطب قرار دیکر اس طرح معلوم

کی جاسکتی ہے کہ لا کی بجائے رجم طہ اور ما کی بجائے رجب طہ درج کیا جائے۔ چنانچہ  $\frac{لا^۲}{ب^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$  میں اندراج کرنے سے

$$\frac{رجم طہ^۲}{ب^۲} - \frac{راجب طہ^۲}{ب^۲} = ۱$$

$$یا \quad \frac{۱}{رجم طہ^۲} - \frac{۱}{راجب طہ^۲} = \frac{۱}{ب^۲} \dots\dots\dots (۱)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو شکل

$$(۲) \quad \frac{۱}{رجم طہ^۲} = \frac{۱}{ب^۲} + \frac{۱}{راجب طہ^۲}$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ طہ صفر ہو تو  $\frac{۱}{رجم طہ^۲}$  بڑے سے بڑا ہوتا ہے یعنی رقم سے کم جیسے جیسے طہ بڑھتا ہے  $\frac{۱}{راجب طہ^۲}$  گھٹتا ہے اور صفر

ہوتا ہے جبکہ  $\frac{ب^۲}{راجب طہ^۲} = ۱$ ، اس لیے طہ کی اس قیمت کے لیے

ر لا متناہی ہے۔ اگر جب طہ  $\frac{ب^۲}{راجب طہ^۲} < \frac{۱}{رجم طہ^۲}$  منفی ہوگا اور اس لیے

دہمتی نیم قطر محور کے ساتھ جب  $\frac{ب}{راجب طہ^۲}$  سے بڑا زاویہ بناتا ہے منحنی

سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا۔

(۱۸۹) ۱۴۴۔ پچھلے باب کے بہت سے نتیجے زائد کے لیے بھی درست ہیں اور جو ثبوت وہاں دئے گئے ہیں ان میں صرف ب کی علامت کو بدلتے کی ضرورت ہے۔ اس لیے ہم صرف ان نتیجوں کو بیان کریں گے۔

فرض کرو کہ زائد کی مساوات

$$1 = \frac{r_a}{r_b} - \frac{r_a}{r_b}$$

ہے۔

(۱) خط  $ما = م لا + ل$  اور  $م - ب$ ، م کی تمام قیمتوں کے لیے  
ماس ہے [دفعہ ۱۱۴]

(۲) (لا، ما) پر کے ماس کی مساوات

$$1 = \frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ب} \quad \text{ہے [دفعہ ۱۱۵]}$$

(۳) (لا، ما) کے قطبی کی مساوات

$$1 = \frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ب} \quad \text{ہے [دفعہ ۱۱۹]}$$

(۴) (لا، ما) پر کے عماد کی مساوات

$$\frac{لا - لا}{\frac{لا}{ب} - \frac{لا}{ب}} = \frac{ما - ما}{\frac{ما}{ب} - \frac{لا}{ب}} \quad \text{ہے [دفعہ ۱۱۷]}$$

(۵) خط  $ل لا + م ما - ن =$  منحنی کو مس کرے گا اگر  $ل$

-  $ب^2 م^2 = ن^2$  [دفعہ ۱۱۶]

(۶) خط  $لا$  جم  $ع + ما$  جب  $ع =$  منحنی کو مس کرے گا اگر

$ع^2 = ل^2$  جم  $ع - ب$  جب  $ع$  [دفعہ ۱۱۶]

(۷) زائد کے مرتب دائرہ کی مساوات  $لا + ما = ل$  -  $ب$  ہے [دفعہ ۱۲۱]

مرتب دائرہ صریحاً خیالی ہوگا جبکہ  $ل > ب$  اور ایک نقطہ میں تحول

ہوگا جبکہ  $ل = ب$

(۸) وہ ہندسی مسائل جو دفعہ ۱۲۶ میں ثابت کئے گئے ہیں زائد کیلئے

بھی درست ہیں۔

(۹) زائد کے ان تمام دتروں کے نقاط وسطی کا طریق جو  $ما = م$  لاکے

متوازی ہوں خط مستقیم  $ما = م$  لائے جہاں  $م = م$   $\frac{ب}{ا}$  [دفعہ ۱۲۸]

(۱۰) — خطوط  $ما = م$  لائے  $ما = م$  لا مزدون ہیں اگر

$$م = م \frac{ب}{ا}$$

یہ دو قطر نغنی سے ان نقطوں پر ملتے ہیں جن کے فصلے مساواتوں

$$لا \left( \frac{ا}{ب} - \frac{ا}{ب} \right) = ۱، اور لا \left( \frac{ا}{ب} - \frac{ا}{ب} \right) = ۱$$

سے حاصل ہوتے ہیں پہلی مساوات سے لاکہ حقیقی قیمتیں ملیں گی اگر  $م > \frac{ب}{ا}$  اور

دوسری مساوات سے حقیقی قیمتیں ملیں گی اگر  $م > \frac{ب}{ا}$  لیکن چونکہ  $م = م$

$\frac{ب}{ا} = \frac{ا}{ب}$  اس لیے  $م$  اور  $م$  دونوں  $\frac{ب}{ا}$  سے کم نہیں ہو سکتے اور نہ دونوں

$\frac{ب}{ا}$  سے بڑے ہو سکتے ہیں۔

اس لیے زائد کے دو مزدون قطروں میں سے ایک اس سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے اور دوسرا اس سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔

یہ دو مزدون قطر نطبق ہونگے اگر  $م = \pm \frac{ب}{ا}$

۱۲۶ — فرض کرو کہ مزدون قطروں کے ایک زوج کے سرے  $ن$  د

ہیں۔ فرض کرو کہ  $ن$  کے محد  $لا$ ،  $ما$  اور  $د$  کے محد  $لا$ ،  $ما$  ہیں۔ دفعہ ۱۲۵ کی رو سے اگر ان میں سے ایک نقطہ حقیقی ہے تو دوسرا خیالی ہو گا۔

ج ن اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ل} = \frac{ا}{ا} \text{ اور } \frac{ل}{ل} = \frac{ا}{ا}$$

ہیں۔ پس دفعہ ۱۴۴ (۹) سے

$$(۱) \dots\dots\dots \therefore = \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} - \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا}$$

$$\frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} = \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} \text{ اس لیے}$$

(۱۹۱) یا چونکہ (ل، ا) اور (ل، ا) دونوں معنی پر ہیں اس لیے

$$\frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} (۱ - \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا}) = (\frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} + ۱)$$

$$(۲) \dots\dots\dots \text{یا } \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} - \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} = \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} \pm \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} = \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} \dots\dots\dots (۲)$$

$$(۳) \dots\dots\dots \text{اور نہ } \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} \pm \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} = \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} \dots\dots\dots (۳)$$

سے (۲) اور (۳)

$$\text{ج ن} + \text{ج د} = \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} + \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} = \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} + \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا}$$

$$= \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} - \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} = \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا} - \frac{ل\text{ }ا}{ا\text{ }ا}$$

اس لیے دو فرد وج قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل

ہوتا ہے جیسا کہ ناقص کی صورت میں بھی تھا۔

۱۴۷ — تعریف۔ متقارب وہ خط مستقیم ہے جو منحنی سے

لاستنا ہی ہے کے دو نقطوں پر ملتا ہے لیکن یہ خط پورا کا پورا لاستنا ہی نہیں ہوتا۔

## زائد کے متقارب معلوم کرنا

ان نقطوں کے فاصلے معلوم کرنے کے لیے جہاں خط مستقیم  $ما = م$  لا  
+ ج مخفی کہ قطع کرتا ہے مساوات

$$1 = \frac{\frac{لا}{۲} - \frac{(م + ج)^۲}{۲ب}}{\frac{لا}{۲}}$$

یا  $\frac{لا}{۲} \left( \frac{۱}{۲} - \frac{م}{ب} \right) - \frac{م^۲}{۲ب} - \frac{ج}{۲} = 1 - \frac{ج}{۲}$  ... (۱)  
حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات کی دونوں اصلیں لاستنا ہی ہونگی اگر  
لا اور لا دونوں کے سر صفر ہوں یعنی

$$\text{اگر } \frac{۱}{۲} - \frac{م}{ب} = 0 \text{ اور } م = 0$$

پس ج = 0 اور  $\pm \frac{ب}{۲}$  حاصل ہونا چاہئے (۱۹۲)

$$\text{اس لیے زائد } 1 = \frac{\frac{لا}{۲} - \frac{ما}{ب}}{\frac{لا}{۲}}$$

کے دو حقیقی متقارب ہیں جن کی مساواتیں  $ما = \pm \frac{ب}{۲}$  لائیں، یا ایک  
مساوات میں انہیں بیان کیا جائے تو

$$1 = \frac{\frac{لا}{۲} - \frac{ما}{ب}}{\frac{لا}{۲}} \dots \dots \dots (۲)$$

ب، ب میں سے قاطع محور کے متوازی اور ۱، ۲ میں سے مخروط  
محور کے متوازی خط ط کھینچو، تب (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ متقارب اس  
مستطیل کے وتر ہیں جو اس طرح بنتا ہے۔



ناقص کے کوئی حقیقی نقطہ لاتنا ہی پر نہیں ہوتے اور اس لیے اس کے متقارب خیالی ہوتے ہیں۔

دفعہ ۱۴۵ سے ہم دیکھتے ہیں کہ ہر متقارب منطبق مزدوج قطروں کے ایک مزدوج پروج ہوتا ہے۔

۱۴۸۔ کوئی خط مستقیم جو ایک متقارب کے متوازی ہو منحنی سے لاتنا ہی پر کے ایک نقطہ پر ملیگا۔

کیونکہ مساوات (۱) (دفعہ ۱۴۶) کی ایک اصل لاتنا ہی ہوگی اگر

لا کا سر صفر ہو۔ یہ صورت اس وقت ہوگی جبکہ  $m = \pm \frac{b}{a}$ ۔ اس لئے خط

$m = \pm \frac{b}{a}$  لا + ج منحنی سے لاتنا ہی پر کے ایک نقطہ پر ملیگا خواہ ج کی قیمت کچھ ہی ہو۔

۱۴۹۔ اس زائد کی مساوات جس کا قاطع محور ب ب اور مزدوج محور ا ا ہو

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} -$$

ہے۔ یہ زائد اور ابتدائی زائد جس کی مساوات

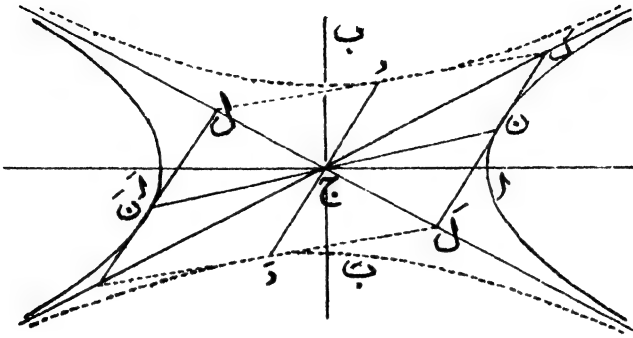
$$(۲) \dots\dots\dots ۱ = \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}$$

ہے ایک دوسرے کے مزدوج کہلاتے ہیں۔

(۱۹۳) ہم مزدوج زائدوں کے ایک زوج کے چند خواص ذیل میں درج کرتے ہیں:-

- (۱) ان دو زائدوں کے متقارب ایک ہی ہوتے ہیں۔
- (۲) اگر دو قطر ایک زائد کے لحاظ سے مزدوج ہوں تو دوسرے کے لحاظ سے بھی مزدوج ہوں گے۔

(۳) زائدوں (۲) اور (۱) کی مساواتیں [دفعہ ۱۴۳] اشکال



$$\frac{\text{ج ب ط}}{\text{ا ب}} - \frac{\text{ج م ط}}{\text{ا م}} = \frac{1}{\text{ا ب}}$$

$$- \frac{\text{ج ب ط}}{\text{ا ب}} - \frac{\text{ج م ط}}{\text{ا م}} = \frac{1}{\text{ا م}}$$

میں بھی لکھی جاسکتی ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ طہ کی کسی قیمت کے لیے ا ایک  
منفی کے لیے مثبت اور دوسرے کے لیے منفی ہے۔

پس ہر قطر ایک منحنی سے حقیقی نقطوں پر اور دوسرے منحنی سے  
خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔ اس کے علاوہ ان دو منحنیوں کے نیم قطروں کے  
طول طہ کی تمام قیمتوں کے لیے ا رشتہ برقرار ہے۔ رہ سے مربوط ہوتے ہیں۔  
(۲) اگر دوسرے دو ج قطر منحنیوں (۲) اور (۱) کو علی الترتیب ن اور د  
پر قطع کریں تو

ج ن۔ ج د = ا۔ ب  
فرض کرو کہ ن کے محدود ا، ا اور د کے محدود ا، ا ہیں۔

تب ج ن اور ج د کی مساواتیں

$$0 = \frac{a}{r} - \frac{l}{r} \quad \text{اور} \quad 0 = \frac{a}{r} - \frac{l}{r}$$

ہیں۔ مزدوج قطروں کی شرط  $m = \frac{b}{r}$  سے حاصل ہوتا ہے

$$(3) \dots\dots\dots 0 = \frac{l}{r} - \frac{a}{r} \quad \text{یا}$$

$$\frac{l}{r} = \frac{a}{r}$$

اور چونکہ (لا، ا) منحنی (۲) پر اور (لا، ا) منحنی (۱) پر ہے اس لیے

$$\left(1 - \frac{l}{r}\right) \frac{a}{r} = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{l}{r}$$

$$\frac{a}{r} = \frac{l}{r}$$

$$(4) \dots\dots\dots \frac{l}{r} \pm \frac{a}{r} = \frac{a}{r}$$

$$(5) \dots\dots\dots \frac{l}{r} \pm \frac{a}{r} = \frac{l}{r} \quad \text{اور اس لیے (۳) سے}$$

$$\text{پس ج ن} - \text{ج ڈ} = \frac{l}{r} + \frac{a}{r} - \frac{l}{r} - \frac{a}{r}$$

$$= \frac{l}{r} + \frac{a}{r} - \frac{l}{r} - \frac{a}{r}$$

$$= \left(\frac{l}{r} - \frac{a}{r}\right) \left(\frac{a}{r} - \frac{l}{r}\right)$$

ج ن<sup>۲</sup> - ج د<sup>۲</sup> = ج<sup>۲</sup> - ب<sup>۲</sup> (۵) وہ متوازی الاضلاع جو ن<sup>۱</sup>، د<sup>۱</sup> پر کے ماسوں سے بنتا ہے مستقل رقبہ کا ہوتا ہے۔

یہ متوازی الاضلاع ۴ ج ن × ج د × جب ن ج د کے مساوی یا ۴ ج د × ج ف کے مساوی ہے جہاں ج ف وہ عمود ہے جو ج سے ن پر کے ماس پر کھینچا گیا ہے۔

اب ن پر کے ماس کی مسادات

$$\frac{لا لا}{۱} - \frac{ما ما}{۲} = ۱$$

ہے۔ اسلئے

$$\frac{۱}{\frac{لا لا}{۲} + \frac{ما ما}{۳}} = ج ف$$

$$اور ج د = \frac{۲}{ب} \times \frac{۲}{۱} + \frac{۲}{لا} \times \frac{۲}{۱} - \frac{۲}{ب} \times \frac{۲}{۱} \left( \frac{لا لا}{۲} + \frac{ما ما}{۳} \right) \quad (۱۹۴)$$

اس لیے ج د × ج ف = اب (۶) متقارب<sup>۱</sup> ن د اور ن د کی تنصیف کرتے ہیں۔

اگر ن د کے وسطی نقطہ کے محدود لا، ما ہوں تو

$$۲ = لا + لا اور ۲ = ما + ما$$

$$\frac{لا}{۱} = \frac{لا + لا}{۲} = \frac{لا \pm ما}{\frac{۲}{۳}} = \pm \frac{لا}{ب}$$

۱۔ ج ن اور ج د کو مزدوج نیم قطر نہیں سمجھنا چاہئے کیونکہ نقطے ن اور د ایک ہی زائد پر نہیں ہیں۔ خط د ج و ابتدائی زائد کو دو خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے اور اگر یہ نقطے د<sup>۱</sup> ہوں تو (۳) سے ج د<sup>۱</sup> = ج د<sup>۲</sup>

اس لیے (ن) د اور (د) کے نقاط وسطی حسب ذیل خطوں میں سے ایک یا دوسرے پر ہیں :

$$\frac{1}{b} \pm \frac{1}{a}$$

نیز چونکہ ج (ن) ک د ایک متوازی الاضلاع ہے اس لیے ج (ک) د (یا) ن د کی تنصیف کرتا ہے اور اس لیے وہ متعارفوں میں سے ایک ہے اس لیے د، د پر کے تماس، د اور د پر کے تماسوں سے متعارفوں پر ملتے ہیں (۷) زائدہ (۱) اور (۲) کے لحاظ سے (لا، ما) کے قطبیوں کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{لا}{ب} - \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ اور } ۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

ہیں۔ اس لیے ان منحنیوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی ایک دوسرے کے متوازی اور مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔ اگر (۲) پر کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو (۱) کے لحاظ سے اس نقطہ کا قطبی

$$\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ یا } \frac{لا - (ما)}{ب} = \frac{(ما - لا)}{ب} = ۱$$

ہے۔ لیکن یہ آخری مساوات نقطہ (لا، ما) پر (۲) کے تماس کی مساوات ہے اور یہ نقطہ، ن میں سے گزرنیوالے قطر کا دوسرا سر ہے۔

پس اگر ایک زائد کے کسی نقطہ سے مزدوج زائد کے دو تماس

ن ق، ن ق کھینچے جائیں تو نقطہ ق ق ابتدائی زائد کون میں سے

گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر مس کرے گا۔

۱۵۰۔ مزدوج قطروں کے کسی زوج کو محاور قرار دیکر زائد

مساوات معلوم کرنا۔

زائد کے قاطع محور اور مزدوج محور کے حوالے سے زائد کی مساوات

$$1 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{c^2}$$

ہے۔ چونکہ استحالہ میں مبدأ کا مقام تبدیل نہیں ہوتا اس لیے استحالہ شدہ مساوات کو حاصل کرنے کے لیے مساوات بالا میں لا، م کی بجائے شکل ل لا + م م، ل لا + م م کے محلے دینا کرنا ہونگے [دفعہ ۵۱]۔  
پس زائد کی مساوات شکل

$$(1) \dots\dots\dots 1 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{c^2}$$

کی ہوگی۔

بموجب فرض محور لا ان وتروں کی تضعیف کرتا ہے جو محور م کے متوازی ہیں۔ اس لیے لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے (۱) سے معلوم کردہ م کی دو قیمتیں مساوی اور مختلف علامت ہونی چاہئیں۔ اس لیے  
ھ = ۰ اور اس لیے مساوات کی شکل

$$(2) \dots\dots\dots 1 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{c^2}$$

ہوگی۔

دو نیم فردوج قطروں میں سے ایک حقیقی ہے اور دوسرا خیالی۔ اگر ان کے طول د اور م = ا ب ہوں تو چونکہ یہ طول محاور لا اور م اپنے کے متعلق ہیں اس لیے (۲) سے حاصل ہوتا ہے  
ا د = ۱ = ب ب = ۱

اس لیے مطلوبہ مساوات

$$(3) \dots\dots\dots 1 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{c^2}$$

ہے۔

۱۵۱۔ چونکہ منحنی کی مساوات کی شکل وہی رہتی ہے جو پہلے تھی اس لیے

وہ تمام تحقیقاتیں جن میں یہ فرض نہیں کیا گیا تھا کہ محاورہ ایک دوسرے کے  
 علی القوائم ہیں اب بھی درست رہتی ہیں۔ مثلاً دفعہ ۴۴ کی مساواتیں  
 (۱) (۲) (۳) (۵) اور (۹) میں کسی تبدیلی کی ضرورت نہیں۔ دفعہ  
 ۴۷ میں بھی کوئی تبدیلی نہیں کرنی پڑے گی چنانچہ زائد کے متقاربوں کی مساوات

$$\frac{لا}{۴} - \frac{ما}{۲} = \frac{لا}{۲} - \frac{ما}{۲} = ۱ \text{ ہو۔}$$

مثال ۱۔  $\frac{لا}{۲} - \frac{ما}{۲} = ۱$  کے لحاظ سے  $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$  پر کے

کسی نقطہ کا قطبی،  $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$  کو مس کریگا۔

مثال ۲۔ اگر  $\frac{لا}{۲} - \frac{ما}{۲} = ۱$  کے لحاظ سے نقطوں (لا، ما) اور (لا، لا)

کے قطبی ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو  $\frac{لا}{۲} + \frac{لا}{۲} = ۱$  ہو۔

مثال ۳۔ اگر  $ما = لا$ ۔ کے لحاظ سے نقطہ (ع، ب) کا قطبی،  
 $لا + ما = ۴$  ہو۔ کو مس کرے تو نقطہ (ع، ب) قائم زائد لا۔ ما۔ ۴ ہو۔  
 پر ہوگا۔

مثال ۴۔ ایک دائرہ دو ثابت عمود وار خطوں کو اس طرح قطع کرتا  
 کہ ہر ایک مقطع معلومہ طول کا ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک  
 قائم زائد ہے۔

مثال ۵۔  $ما = لا$  کے لحاظ سے  $لا + ما = ۴$  کے ماسوں کے  
 قلب زائد  $ما = لا$  پر واقع ہوں گے۔

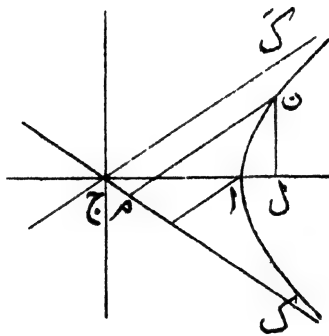
نیز  $ما = لا$  کے لحاظ سے  $ما = لا$  پر واقع ہوں گے۔  
 قلب دائرہ  $لا + ما = ۴$  پر واقع ہوں گے۔

۱۵۲۔ زائد کے متقاربوں کو محدودوں کے محو قرار دیکر

حوالے سے زائد کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ شکل میں متقارب ج ک، ج ک ہیں اور فرض کرو کہ  
زاویہ (ج ک) = ع اس لیے مس ع =  $\frac{پ}{۱}$  -

فرض کرو کہ منحنی کا کوئی نقطہ (لا، ما) کن ہے اور فرض کرو کہ ن کے  
محد ج ک اور ج ک کے حوالے سے لا، ما ہیں۔ ن مکوج ک  
کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ ج ک سے ہر پر ملتا ہے۔ ن ل کو  
قاطع محور پر نمود کھینچو۔



تب ج م = لا، م ن = ما، ج ل = لا، ل ن = ما

اب ج ل = ج م جم ع + م ن جم ع

یا لا = (لا + ما) جم ع ..... (۱)

نیز ل ن = م ن جب ع - ج م جب ع

یا ما = (ما - لا) جب ع ..... (۲)

پس مساوات

$$۱ = \frac{ما}{لا} - \frac{لا}{ما}$$



میں ابدال کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{جم}^2 \text{ع} (\text{لا} + \text{ما})^2 - \text{جبا}^2 \text{ع} (\text{لا} - \text{ما})^2 = \frac{1}{2} \dots \dots (3)$$

لیکن مس ع =  $\frac{1}{2}$ ، ایسے جبا ع =  $\frac{1}{2}$ ، جم ع =  $\frac{1}{2}$ ، اس لیے

زبروں کو اڑا دینے سے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$2 \text{ لا} \text{ ما} = 2 \text{ لا} + 2 \text{ با}$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے -

مستقاربوں کے حوالے سے مزدوج زائد کی مساوات

$$2 \text{ لا} \text{ ما} = - (\text{لا} + \text{با})$$

ہوگی -

۱۵۳ - زائد متقارب، اور مزدوج زائد کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{با}^2}{2} = 1, \frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{با}^2}{2} = 0, \text{ اور } \frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{با}^2}{2} = -1$$

ہیں -

اگر محدود کے محوروں کو کسی طریقہ پر تبدیل کیا جائے تو نئی مساواتیں حاصل کرنے کے لیے ہمیں تینوں صورتوں میں دہی اندراجات عمل میں لانے پائیں -

پس محدود کے محوروں کے تمام محلوں کے لیے زائد کی مساوات اور مزدوج زائد کی مساوات میں جو دو مستقلات شامل ہوتے ہیں وہ مساوی اور مختلف العلامت ہوتے ہیں اور ان مساواتوں اور متقاربوں کی مساوات میں جو فرق ہے وہ صرف مستقلوں کا ہے -

۱۵۴ - جب ایک زائد کے متقاربوں کے درمیان قائمہ زاویہ (۱۹۹) ہوتا ہے تو زائد کو قائم زائد کہتے ہیں -

زائد کے متقاربوں کے درمیان زاویہ ۲ مس ۱ پ کے مساوی ہوتا ہے اور اس لیے جب یہ زاویہ قائمہ ہو تو  $b = 1$ ۔ اسی سبب کی بنا پر بعض اوقات اس معنی کو مساوی الجا اور زائد کہتے ہیں۔

۱۵۵۔ زائد لا ما = ج کے کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنا۔

نقطہ (ج ع، ج ع) مرچا لا ما۔ ج = ۰ پر ہے خواہ ع کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اس نقطہ کو ع، سے موسوم کرو۔  
تب دو نقطوں ع، ع کو ملانے والا خط

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{c}{e} & \frac{c}{e} \\ 1 & \frac{c}{e} & \frac{c}{e} \end{vmatrix}$$

یعنی  $\Delta = \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) + (1 - \frac{c}{e}) + (\frac{c}{e} - \frac{c}{e}) = 0$  ہے۔ اس لیے ع، ع سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$(1) \quad \Delta + \frac{c}{e} = 0 \Rightarrow \frac{c}{e} = -\Delta$$

اب رکھو  $\frac{c}{e} = -\Delta$  تو ع، پر کے مماس کی مساوات

$$(2) \quad \Delta + \frac{c}{e} = 0 \Rightarrow \frac{c}{e} = -\Delta$$

حاصل ہوگی۔

(۲) سے

$$\frac{\text{لا ج}}{\text{ع}} + \text{ما ج} = \text{ع} = ۲ \text{ ج}^۲$$

یا  
 مساوات (۳) کو استعمال کرتے دفعہ ۱۱۹ کی طرح ہم معلوم کرتے ہیں کہ لا ما - ج = ۲ ج = ۰ کے لحاظ سے نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات

$$\text{لا ما} + \text{لا} = ۲ \text{ ج}^۲$$

ہے۔

۰ مساوات (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مخروطی قائم زائد ہے تو ع پر کے عماد کی مساوات

$$(\text{لا} - \text{ج ع}) - (\text{ما} - \text{ج ع}) = ۰$$

یا  
 لا ع - ع ما - ج ع + ج ع = ۰ ... (۴) ہے۔

(۲۰۰) مثال ۱۔ لا ما = ج میں ایک مثلث بنایا گیا ہے جس کے دو ضلع علی الترتیب ما + م، لا = ۰ اور ما + م، لا = ۰ کے متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرا ضلع زائد م، م، لا ما = ج (م + م) کو لف کرتا ہے۔  
 ع، ع کو ملانے والا خط

$$\text{لا} - \text{ما ع} - \text{ج} = (\text{ع} + \text{ع}) = ۰$$

ہے۔ یہ خط،  $ما + م لا =$  کے متوازی ہوگا اگر  $م$ ،  $ع$ ،  $ع = ا$ ۔  
اسی طرح  $ع$ ،  $ع$  کو ملائیوا لا خط،  $ما + م لا =$  کے متوازی ہے  
اگر  $م$ ،  $ع$ ،  $ع = ا$

پس  $ا$ ،  $ع = م$ ،  $ع$ ،  $ع$  ..... (۱)  
اب  $ع$ ،  $ع$  کو ملائے والا خط

$$لا + ما ع ع ع - ج (ع + ع) = ۰$$

ہے، یا (۱) سے  $م$  لا  $ما + م ع$  - ج  $(م + م)$ ،  $ع = ۰$   
اس کا لغاف،  $ع$  کی مختلف قیمتوں کے لیے

$$۲ م، م لا ما = ج (م + م)$$

۴۔

مثال ۲۔ کوئی خط مستقیم ایک زائد کو نقطوں ق اور ق پر اور  
اس کے متقاربوں کو نقطوں م اور م پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق ق  
اور م م کے وسطی نقطے ایک ہی ہیں۔

مثال ۳۔ ایک زائد کے کسی تماس کا وہ حصہ جو متقاربوں کے  
درمیان منقطع ہوتا ہے نقطہ تماس پر تنصیف ہوتا ہے۔

مثال ۴۔ ایک زائد کا کوئی تماس متقاربوں سے ایک ایسا  
مثلث قطع کرتا ہے جس کا رقبہ مستقل ہوتا ہے۔

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ خطوط  $ما - م لا = ۰$  اور  $ما + م لا = ۰$   
م کی تمام قیمتوں کے لیے زائد  $لا ما = ج$  کے مزدوج قطر ہیں۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ خط  $لا = ۰$  زائد  $لا ما + لا م لا = ۰$  کا  
ایک متقارب ہے۔

دوسرے متقارب کی مساوات کیا ہے؟

مثال ۷۔  $لا ما - لا م - ما = ۰$  کے متقارب معلوم کرو۔

مزدوج زائد کی مساوات کیا ہے ؟  
**مثال ۸۔** اس مثلث کے حاملہ دائرہ کے مرکز کا طریق جو ایک  
 دے ہوئے زائد کے کسی جاس اور متقاربوں سے بنتا ہے دوسرا زائد ہوتا ہے  
 جس کے متقارب دے ہوئے زائد کے متقاربوں پر عمود ہوتے ہیں۔  
**مثال ۹۔** اگر  $\lambda = 1$ ،  $\mu = 2$  کے لحاظ سے (ع، ب) کا قطبی  
 $\lambda = 2$ ،  $\mu = 1$  کو س کرے تو (ع، ب) کو قائم زائد  $\lambda = 2$ ،  $\mu = 1$   
 پر ہونا چاہیے۔

**مثال ۱۰۔** اگر ایک دے ہوئے خط کے متوازی ہم محور دائروں  
 ایک نظام کے جاس گنیجے جائیں تو ان کے نقاط تماس ایک قائم زائد پر ہونگے  
**مثال ۱۱۔** ثابت کرو کہ ہم محور دائروں کے ایک نظام کے لحاظ  
 سے ایک معلومہ خط کے قطبوں کا طریق ایک زائد ہے جس کا ایک متقارب  
 دائروں کے مرکوزوں کے خط پر عمود ہے اور دوسرا متقارب دے ہوئے  
 خط پر عمود ہے۔

**۱۵۶۔** زائد کے متقارب اور مزدوج قطروں کا کوئی زوج  
 موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

$$\text{مستقارب} = \frac{\lambda^2}{\mu} - \frac{\mu^2}{\lambda} = 0$$

اور مزدوج قطر کا کوئی زوج  $\lambda^2 + \mu^2 = 2\lambda\mu$  یا  $\lambda = \mu$  ہے۔  
 دفعہ ۵۸ کی شرط صحیح پوری ہوتی ہے۔

**۱۵۷۔** ہم زائد کے کسی نقطہ کے محددوں کو ایک واحد تبدل کی  
 رقوم میں بیان کر سکتے ہیں جیسا کہ ناقص کی صورت میں کیا گیا تھا چنانچہ  
 ہم رکھ سکتے ہیں  $\lambda = 1$ ،  $\mu = 2$  اور  $\lambda = 2$ ،  $\mu = 1$  کی تمام  
 قیمتوں کے لیے  $\lambda = 1$ ،  $\mu = 2$ ۔  
 اگر منحنی کے کسی نقطہ ن کا معین ن لی ہو اور ل سے

امدادی دائرہ کا ماس لی ق ہو تو ج لی = (قط ل ج ق)۔ اسلئے  
 ج ق زاویہ طہ ہے۔

نقطوں طہ، طہ میں سے گزرنے والے وتر کی مسادات

$$= \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

اس لیے حسب دفعہ ۱۲۳

$$\frac{1}{2} (1 - 1) = \frac{1}{2} (1 - 1) = \frac{1}{2} (1 - 1) = \dots (1)$$

طہ پر کے ماس کی مسادات

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

ہے۔ نیز طہ پر کا عماد

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

ہے۔

مثال۔ اگر چار نقطوں (قط طہ، ب مس طہ) وغیرہ پر  
 عماد ایک نقطہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ

$$\pi(1 + n^2) = \pi + \pi + \pi + \pi$$

اور جب (ط<sub>۱</sub> + ط<sub>۲</sub>) + جب (ط<sub>۲</sub> + ط<sub>۳</sub>) + جب (ط<sub>۳</sub> + ط<sub>۴</sub>) = [مضرب ۱۳۹]  
 ۱۵۸ - ایک ناقص یا زائد کی مساوات کو جبکہ اس کو مبدا قرار دیا جائے (۲۰۲)  
 اس مساوات میں لا کی بجائے لا۔ لکھ کر معلوم کیا جاسکتا ہے جو مرکز  
 کو مبدا لینے سے معلوم کیجا چکی ہے۔ چنانچہ یہ مساوات ہوگی

$$1 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{(a-d)^2}{d^2}$$

$$یا \quad \frac{a^2}{d^2} \pm \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{d^2} \quad (۱)$$

اب اگر اس سے قریبی اسکے کا فاصلہ ثابت رہے (فرض کرو ف)  
 اور خروج المرکز اکائی ہو جائے تو منحنی ایک مکانی ہو جائے گا جس کا وتر  
 خاص ۴ ف ہوگا۔

مکانی کی مساوات کو (۱) سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ (۱) نہ  
 = ف، اس لیے لا متناہی ہونا چاہئے جبکہ ز = ۱ نیز لا (۱ - ز) =

$$= ف (۱ + ز) = ۲ ف اس لیے \frac{b^2}{d} = ۲ ف - پس (۱) سے$$

$$\frac{a^2}{d} \pm \frac{a^2}{b^2} = ۲ ف$$

یا چونکہ لا متناہی ہے

$$\frac{a^2}{d} \pm ۲ ف = لا$$

اس لیے مکانی ایک ناقص یا زائد کی انتہائی شکل ہے جس کا  
 وتر خاص محدود ہے لیکن محور اعظم اور محور اصغر لا متناہی ہیں اور مرکز اور  
 دوسرا اسکے لاتناہی ہیں۔

مکانی کے خواص کو ناقص یا زائد کے خواص سے اخذ کرنا طالب علم  
 کے لیے بہت مفید ہوگا۔

۱۵۹ — فرض کرو کہ ایک مخروطی کا ماسکہ مرتب پر ہے۔  
ماسکہ کو مبدا و قرار دو اور فرض کرو کہ مرتب محور ما ہے، تب  
مخروطی کی مساوات ہوگی

$$\begin{aligned} \text{یا} \quad \text{لا}^2 + \text{ما}^2 &= \text{زا}^2 \\ \text{لا}^2 + (\text{زا} - ۱)^2 &= \text{ما}^2 \end{aligned}$$

(۲-۳) یہ مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو حقیقی ہونگے اگر زاکائی  
سے بڑا ہو، منطبق ہونگے اگر زاکائی کے مساوی ہو، اور خیالی ہونگے اگر  
زاکائی سے کم ہو۔

پس ہمیں نہ صرف ناقص، مکانی اور زائد کو ہی مخروطیاں سمجھنا  
چاہیئے بلکہ دو حقیقی یا خیالی خطوط مستقیم کو بھی۔

یہ ذہن نشین رہے کہ ایک دائرہ کا مرتب لامتناہی فاصلہ پر  
ہوتا ہے، نیز دو متوازی خطوط مستقیم کے ماسکے اور مرتب سب کے سب  
لامتناہی پر ہوتے ہیں۔

## ساتویں باب پر مثالیں

- ۱۔ (و ب، ج و د دو خطوط مستقیم ہیں جو ایک دوسرے کو  
علی القواکم تنصیف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ ن کا طریق جو اس طرح  
حرکت کرتا ہے کہ  $\text{ن} \times \text{ا} = \text{ب} \times \text{ن} = \text{ج} \times \text{ن} = \text{د} \times \text{ن}$ ، ایک قائم قطع زائد
- ۲۔ ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو  
ثابت خطوط مستقیم و لا، و ما کو علی الترتیب ن پر قطع کرتا ہے۔ خط  
ن کا طریق ایک نقطہ ن لیا گیا ہے ایسا کہ  $\text{ن} \times \text{ا} = \text{ب} \times \text{ن} = \text{ج} \times \text{ن} = \text{د} \times \text{ن}$ ۔ ثابت کرو کہ  
ن کا طریق ایک زائد ہے جس کے مقارب و لا، و ما ہیں۔
- ۳۔ ایک خط مستقیم کے سرے دو ثابت خطوط مستقیم پر ہیں اور وہ



ایک ثابت نقطہ میں سے بھی گذرتا ہے۔ خط کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔  
 ۴۔ ایک خط مستقیم کے سرے دو ثابت خطوط مستقیم پر ہیں اور وہ ان سے مستقل رقبہ کا ایک مثلث قطع کرتا ہے۔ خط کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔

۵۔ ۱ اور ۲ دو ثابت خطوط مستقیم ہیں اور ن کوئی نقطہ ہے۔ ن سے ۱ اور ۲ پر عمود ن م اور ن ل ہیں۔ ن کا طریق معلوم کرو اگر ذوار بقعۃ الاضلاع و م ن ل مستقل رقبہ کا ہو۔

۶۔ ایک قائم قطع زائد کے مرکز سے کسی نقطہ کا فاصلہ اس عمودی فاصلہ کے بالعکس متناسب ہوتا ہے جو نقطہ کے قطبی کا زائد کے مرکز سے ہے۔

۷۔ ایک زائد کے نقطہ ن کا معین ن ل ہے اور ن گ عماد ہے جو محور سے گ پر ملتا ہے۔ اگر ل ن کو خارج کیا جائے اور وہ متقارب سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ق گ متقارب کے علی القوائم ہے۔

۸۔ اگر ایک زائد اور اس کے مزدوج زائد کے مزدوج المکز زائد (۲۰۴)

ہوں تو ثابت کرو کہ  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

۹۔ دو خطوط مستقیم جو ان نقطوں کو ملاتے ہیں جن پر ایک زائد کوئی دو مماس متقابلوں سے ملے ہیں مماسوں کے وتر مماس کے متوازی اور اس سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک زائد کے کسی نقطہ پر کے مماس کا وہ حصہ جو نقطہ مماس اور قاطع محور کے درمیان منقطع ہوتا ہے ان عمودوں کے طولوں کے درمیان موسیقی اوسط ہے جو مماسوں سے اس نقطہ پر کے عماد پر کھینچے گئے ہوں۔

۱۱۔ اگر کسی نقطہ میں سے خط و ن ق کو ایک زائد کے ایک متقارب کے متوازی کھینچا گیا ہو اور یہ خط زائد کو ن پر اور و کے قطبی کو ق پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ن، وق کا نقطہ وسطی ہے۔

۱۲۔ ایک متوازی الاضلاع کو اس طرح بنایا گیا ہے کہ اس کے اضلاع

ایک زائد کے متقاربوں کے متوازی ہیں اور اس کا ایک وتر زائد کا ایک وتر ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرے وتر کی سمت مرکز میں سے گزرے گی۔

۱۳۔ ایک قائم زائد کے راس  $A$ ،  $B$  ہیں اور اس پر کوئی نقطہ  $C$  ہے۔ ثابت کرو کہ زاویہ  $ACB$  کے داخلی اور خارجی ناصف متقاربوں کے متوازی ہیں۔

۱۴۔ ایک دائرہ کے ایک ثابت قطر کے سرے  $A$ ،  $B$  ہیں اور اس قطر کے عمود وار کسی وتر کے سرے  $C$ ،  $D$  ہیں۔ ثابت کرو کہ  $ACB$  اور  $ADB$  کے نقطہ تقاطع کا طریق قائم قطع زائد ہے۔

۱۵۔ ایک زائد کے متقاربوں کو حوالے کے محاور قرار دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ زائد کے دو محاسوں کے نقطہ تقاطع کے مجدد نقاط تماس کے محددوں کے درمیان موسیقی اوسط ہیں۔

۱۶۔ ایک زائد کے کسی نقطہ سے دوسرے زائد کے تماس کھینچے گئے ہیں جس کے متقارب وہی ہیں۔ ثابت کرو کہ وتر تماس متقاربوں سے ایک مستقل رقبہ قطع کرتا ہے۔

۱۷۔ وہ خطوط مستقیم جو ایک مساوی المحاور زائد کے کسی نقطہ سے کسی قطر کے سروں تک کھینچے گئے ہوں متقاربوں کے ساتھ مساوی المیلاں ہوتے ہیں۔

۱۸۔ قائم زائد  $ABC$  کے عمادی وتروں کے نقاط وسطی کا طریق  $(A^2 - B^2) = C^2$  والا ہے۔

(۲۰۵)

۱۹۔ مخروطیوں کے ایک نظام کے صدر محاورہ دے ہوئے خطوط مستقیم پر ہیں اور یہ تمام مخروطی ایک دے ہوئے نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دے ہوئے خط کے قطب ایک قائم زائد پر واقع ہوتے ہیں۔

۲۰۔ مخروطیوں کے ایک نظام کے صدر محاورہ دے ہوئے خطوط مستقیم پر ہیں اور یہ سب مخروطی ایک دے ہوئے خط مستقیم کو مس کرتے

ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دے ہوئے نقطہ کے قطبیوں کا لحاف ایک مکانی ہے۔

۲۱۔ دو خطوط لا۔ ع۔ = ما۔ بہ۔ = زائد لا۔ ما۔ ج کے لحاظ سے مزدوج ہیں (یعنی ہر خط دوسرے کے قطب میں سے گذرتا ہے)۔ ثابت کرو کہ (ع۔ بہ) زائد لا۔ ما۔ ج = ۰ پر ہے۔

۲۲۔ ایک دائرہ ایک زائد کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک متقارب سے ان چار نقاط تقاطع کے فاصلوں کا حاصل ضرب دوسرے متقارب سے ان کے فاصلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۲۳۔ ثابت کرو کہ اگر ایک قائم قطع زائد ایک دائرہ کو چار نقطوں پر قطع کرے تو ان چار نقطوں کے اوسط محل کا مرکز مخیونوں کے مرکوز کے درمیان وسط میں ہے۔

۲۴۔ اگر ایک قائم زائد پر چار نقطے لئے جائیں ایسے کہ کسی دو کو ملا کر دوسرے دو کو ملانے والے وتر پر عمود ہو اور اگر ع۔ بہ، ج، ضہ، کسی ایک متقارب کے ساتھ ان خطوط مستقیم کے میلان ہوں جو ان نقطوں کو مرکز سے علی الترتیب ملانے سے حاصل ہوتے ہیں تو ثابت کرو کہ مس مس = ۱

۲۵۔ زائد  $\frac{لا}{ب} - \frac{ما}{ب} = ۱$  کے وتروں کا ایک سلسلہ اُس دائرہ

کے مماس ہیں جو زائد کے ماسکوں کو ملانے والے خط کو قطر مان کر کھینچا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ زائد کے لحاظ سے ان وتروں کے قطبوں کا طریق  $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$  ہے۔

۲۶۔ اگر دو خطوط مستقیم ثابت نقطوں میں سے گزریں اور ان کے درمیانی زاویہ کا ناصف ہمیشہ ایک ثابت خط کے متوازی رہے تو ثابت کرو کہ خطوط کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

۲۷۔ ثابت کرو کہ ایک زائد کے مزدوج قطروں کے زوج کسی خط مستقیم (۲۰۶)

سورج میں منقطع ہوتے ہیں۔

۲۸ — ایک مثلث کے دو اضلاع 'ا ب'، 'ب ج' کو دو ترمان کر ان پر دو مساوی دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں کے تقاطع کا طریق ایک قائم زائد ہے جس کا مرکز 'ب ج' کا نقطہ وسطی ہے اور جو 'ا ب' ج میں سے گذرتا ہے۔

۲۹ — نصف قطر کا ایک دائرہ ایک قائم زائد کو جس کا مرکز ج ہے چار نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ج ف' + 'ج ق' + 'ج س' = 'ج'۔

۳۰ — اگر قائم زائد لا = ج کے نقطوں ('لا'، 'ا')، ('لا'، 'ب')، ('لا'، 'م')

('لا'، 'م') پر کے عماد نقطہ (ع، 'ب') پر طیں تو ثابت کرو کہ  
ع = لا + لا + لا + لا اور ب = م + م + م + م

نیز لا لا لا لا لا = م م م م = ج

۳۱ — ایک قائم زائد کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد زائد ایک نقطہ میں سے متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ زائد کا مرکز مثلث 'ف ق س' کا مرکز ہندسی ہے۔

۳۲ — اگر ایک قائم زائد کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد ایک نقطہ پر متقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ 'ف ق س' اس قطر کے دوسرے سرے میں سے گذرے گا جو 'س' میں سے گذرتا ہے۔

۳۳ — قائم قطعات زائد کے ایک سلسلہ کو جس کے متقارب لا = ہیں خط لا = ک نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س'، 'م' وغیرہ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ف'، 'ق'، 'س' وغیرہ پر کے عماد مکافی لا = م ک (م - ک) = کو مس کرتے ہیں۔

۳۴ — قائم زائد لا = ج = میں لا انتہا مثلث بنائے جاسکتے ہیں

جن کے سب اضلاع مکافی  $ما = ۲$  لا کو مس کرتے ہوں۔  
نیز مکافی میں لا انتہا مثلث بنائے جاسکتے ہیں جن کے اضلاع قائم زائد  
کو مس کرتے ہوں۔

۳۵۔ ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر اس سے ایک  
دائرہ کا تماس کھینچا جائے تو اس تماس کا طول ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو  
ن سے دائرہ کے ایک ثابت تماس پر کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق  
ایک مخروطی ہے جس کا وتر خاص دائرہ کے قطر کے مساوی ہے۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز ایک قائم زائد کے کسی نقطہ  
ن پر ہے اور جس کا نصف قطر ن میں سے گزرنیوالے نوآئد کے قطر کے  
مساوی ہے زائد کو تین دیگر نقطوں پر قطع کرتا ہے جو ایک مستساوی الاضلاع  
مثلث کے راس ہیں۔

۳۷۔ ایک زائد پر چار نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'ن' ہیں اور ن میں  
دو خطوط متقابلوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو مثلث 'ا'، 'ب'، 'ج' کے اضلاع  
سے مل کر ترتیب 'ل'، 'م'، 'ق' اور 'ن'، 'م'، 'ق' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ  
ل : م : م : ق = ل : م : ق۔

۳۸۔ ثابت کرو کہ کوئی خط مستقیم جو  $ما = ۲$  لا = ۰ اور لا = ۲ ب ما  
= کو ایسے نقطوں پر قطع کرے جو موسیقی مزدوج ہوں زائد لا ما + ۲ ب =  
کو مس کرے گا۔

۳۹۔ ثابت کرو کہ دائرہ لا + ما = ۲ ا = ۰ کا کوئی تماس دو زائدوں  
لا (لا + ما) = ۳ ا = ۰ اور ما (ما - لا) = ۳ ا = ۰ سے موسیقی طور پر تقسیم  
ہوتا ہے۔

۴۰۔ ہم مرکز مخروطیوں کے ایک نظام کے مرتب دئے گئے ہیں۔  
ثابت کرو کہ (۱) مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے  
قطبوں کا طریق ایک مکافی ہے اور (۲) مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے  
نقطہ کے قطبی کا لاف ایک مکافی ہے۔

## متفرق مسئلہ (۲۳)

(۲۰۸)

$$۱۔ \text{خطوں } لا + \frac{لا + بیا}{بیا} لا + ما - لب + (ب - لا) (لا - ما) =$$

کے درمیانی زاویوں کے نامصف معلوم کرو۔

$$۲۔ \text{ان دائروں کا مشترک وتر معلوم کرو جس کی مساواتیں}$$

$$ر = ۲ لب ط اور ر - ۲ ج ط - لب ا =$$

ہیں۔

جواب : ۲ ( لب ط - ج ط - لب ا ) =

۳۔ ثابت کرو کہ اگر ایک دائرہ ایک دے ہوئے دائرہ کو علی القواہم قطع کرے اور نیز ایک دے ہوئے خط مستقیم کو مس کرے تو دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔

$$۴۔ \text{ایک ثابت نقطہ (ف) جس سے ایک خط مستقیم کو } لا + \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} =$$

کے کسی قطر کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ خط مستقیم مزدوج قطر سے قی پرمتا ہے۔ ثابت کرو کہ قی کا طریق قائم زائد

$$(لا - لب) لا - لا - لا + ما + ب ا گ لا =$$

ہے۔

۵۔ اس محزوطی کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرو جس کا خروج المکرز

۲۶ 'ماسکہ' (۰، ۰) اور مرتب لا + ما + ا = ہے۔

$$\text{جواب : } (لا + ا) (ا + ما) =$$

۶۔ اگر ان عمودوں کے پائین لی، ہوں جو ثابت نقطہ (ج) سے خطوط ۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا پر کھینچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ سے لی ہر کی مساوات (۱۔ ب) لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا = ۰ ہے۔ اس اخذ کرو کہ اگر خطوط کو مبدا کے گرد اس طرح گھمایا جائے کہ ان کے درمیان زاویہ مستقل رہے تو نقطہ (۱۔ ج) سے لی ہر کا فاصلہ مستقل رہے گا۔

۷۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا قطر دائروں

$$لا + ما - ۴ = ۰ \text{ اور } لا + ما + ۲ لا + ۳ ما - ۶ = ۰$$

کا مشترک وتر ہے۔

جواب: لا + ۵ ما - ۲ لا - ۳ ما - ۱۸ = ۰

۸۔ اگر مکانی ما - ۴ لا = ۰ کے وتر ق کے محاذی مکانی (۲۰۹) کے اس پر قائمہ زاویہ بنے تو ق پر کے عماد مکانی

$$ما - ۱۶ لا = ۰ \text{ (۱۶-۱۶)}$$

پر ملیں گے۔

۹۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص اور اس دائرہ کے مشترک مماس جو ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کے بیروں میں سے گزرتا ہے ایک مرکز بناتے ہیں۔

۱۰۔ مخروطی (ل - م) لا - ۴ ل م لا - ما - (ل - م) ما - ۱ = ۰ کی مساوات اس کے متعارفوں کو حوالے کے محاور قرار دیکر معلوم کرو۔

$$\text{جواب: } لا + ما = \frac{۱}{۲ لا + ۲ م}$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کے پائین جو مبدا سے خطوط مستقیم

$$لا + ما - ۴ = ۰, لا + ۵ ما - ۲ لا - ۳ ما - ۱۸ = ۰ \text{ اور } لا + ۱۵ لا - ۲۴ ما - ۴۲ = ۰$$

پر کھینچے جائیں سب کے سب خط مستقیم ۳ لا + ما - ۸ = ۰ پر واقع ہوتے ہیں  
۱۲۔ ثابت کرو کہ اگر دائروں میں ۱ = ۰، ۲ = ۰، ۳ = ۰ (دونوں میں لا  
اور ما کے سر کا ٹی ہیں) کے نصف قطر ۲ اور ۲ ہوں تو وہ نقطے جن پر

دائروں کے محاذی مساوی زوا کے بنتے ہیں دائرہ ۱ = ۰ = ۰ پر ہیں۔

اگر اُس دائرہ کو جس کا قطر دے ہوئے دائروں کے مشابہت کے  
مرکزوں کو ملانے والا خط ہو این کے ”مشابہت کا دائرہ“ کہا جائے تو  
ثابت کرو کہ کسی تین دائروں کے مشابہت کے تین دائرے جبکہ انیس  
دو دو کو لیا گیا ہو ہم محور ہوتے ہیں۔

۱۳۔ ما - ۱۲ = ۰ کے دو نقطوں پر جن کے ماسکی فاصلوں کا  
مجموعہ ۲ ہے ماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ ماس مکانی ما = ۱۲  
(لا + ج - ۱) پر متقاطع ہوں گے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر  $\frac{لا}{۱۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$  کے نقطوں (لا، ما) (لا، ما)

(لا، ما) اور (لا، ما) پر کے عماد ایک نقطہ پڑیں تو  $\frac{لا}{۱۲} \times \frac{ما}{۲} = ۱$

$= ۱ \times \frac{ما}{۲} = ۱$

۱۵۔ وہ دائرے جن کے قطر ایک قائم زائد کے متوازی و تروں

ایک سلسلہ ہوں زائد کے دو ثابت نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ خطوط

لا - ۲ لا ما ق م ۲ = ۰

کے درمیانی زاویوں کے ناصف لا - ۲ = ۰ ہیں خواہ محوروں کے درمیان  
زاویہ کچھ ہی ہو۔



۱۷۔ ہم محو دائروں کا ایک نظام ایک دے ہوئے خط مستقیم سے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'ف'، 'ق'، وغیرہ پر قطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جن کے قطر 'ق'، 'ف'، 'ق'، 'ف'، وغیرہ ہیں، ہم محور میں کیونکہ مشترک بنیادی محور دے ہوئے خط مستقیم پر عمود ہے۔

۱۸۔ اگر ایک دائرہ جس کا مرکز (ع) ہے،  $MA = LA$  کو چار نقطوں پر قطع کرے جن میں سے تین ایک متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں تو ثابت کرو کہ (۱) چوتھے نقطہ کے محدد (ع)  $MA = LA = ۳$  ہے، (۲) اور (۲) دائرہ کا مرکز کافی  $MA = LA = ۳۲$  پر ہے۔

۱۹۔ ت سے ناقص  $\frac{LA}{A} + \frac{MA}{B} = ۱$  کا محاس کھینچا گیا جو (۱) پر کے محاس سے محورا صفر کے مساوی طول قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ت مکانی  $\frac{MA}{B} = \frac{LA}{A} + ۲$  پر ہے۔

۲۰۔ ایک دائرہ ناقص  $\frac{LA}{A} + \frac{MA}{B} = ۱$  کے ایک قطر کے بیروں میں سے گذرتا ہے اور نیز ناقص کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کا مرکز ناقص

$$MA + LA = ۲ (B - A)$$

پر ہے۔

۲۱۔ ایک مثلث کے راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر عمودوں پائین نقاط (۲۵، ۲۰)، (۱۶، ۸) اور (۹، ۸) ہیں۔ مثلث کے راسوں کے محدد معلوم کرو۔

جواب: چار نقطوں (۱۵، ۱۰)، (۱، ۵)، (۵، ۵) اور (۱۵، ۱) میں سے کوئی تین۔

۲۲ — دائروں کے ہم محور نظام  $لا + ما + ۲گ - لا - ج = ۲$  میں سے دو دائرے لیے گئے ہیں جو ایک دوسرے کو علی القوام قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر دائروں کے کسی ایسے زوج کے مشترک تماس پر نقطوں  $(ج، ۰)$  اور  $(۰، ج)$  سے عمود  $خ، ع$  ہوں تو  $خ، ع = ج - ۲$ ۔

۲۳ — مکانی  $ما - ۲ = لا$  پر کوئی نقطہ  $ن$  ہے اور محور پر نقطہ  $ق$  ایسا ہے کہ  $ن ق = ن ا$  جہاں  $ا$  مکانی کا راس ہے۔ ثابت کرو کہ  $ن ق،$  مکانی  $ما + ۳۲ = لا$  کو لف کرتا ہے۔

$$۲۴ — \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱ \text{ کے نقطہ } (لا، ما) \text{ پر کا تماس دائرہ}$$

$لا + ما - لا = ۰$  سے نقطوں  $ق$  اور  $ق'$  پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز اور  $ق، ق'$  میں سے گزرنے والے خطوط  $لا ما = ما (لا \pm لا ز)$  ہیں۔

۲۵ — ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس منقطع  $خ$  کے محاذی جو اس پر خطوط  $لا = \pm لا$  منقطع کرتے ہیں نقطہ  $(ج، ۰)$  پر ایک قائمہ زاویہ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم مخروطی  $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$  کو مس کرتا ہے۔

کو مس کرتا ہے۔

۲۶ — ثابت کرو کہ اس مثلث کا نو نقطی دائرہ جو خطوط  $۳لا + ما$  اور  $۱۲ - ۳لا - ما - ۳۶ = ۰$  اور  $لا = ۰$  سے بنتا ہے

$$۴لا + ۴ما - ۲۵لا + ۲۴ما + ۳۶ = ۰$$

ہے۔ نیز ثابت کرو کہ (۱) مثلث کا اندرونی دائرہ

$$لا + ما - لا۶ + لا۶ + ما۶ + ۹ = ۰$$

ہے اور (۲) وہ دائرہ جو پہلے ضلع کو اور دوسرے دو محدودہ ضلعوں کو مس کرتا ہے

$$لا + ما - لا۱۲ - ما۱۴ + ۴۹ = ۰$$

ہے۔

ثابت کرو کہ نقطہ دو دائرہ دو دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۲۷۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو دائروں  $LA + MA$

$MA = 10$ ،  $LA + MA = 10$ ، اور  $LA + MA = 10$

$MA = 2$  میں سے ہر ایک کو ایک قطر کے سروں پر مس کرتا ہے۔

جواب :  $LA + MA = 10$ ،  $LA = 8$ ،  $MA = 2$ ۔

۲۸۔ ثابت نقطہ (م، ک) سے مکانی  $MA = 10$  (لا + لا)

کے مس ت ف، ت ق کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف اور ق

پر کے غاد، کی تمام قیمتوں کے لیے، خط  $MA + MA = 10$  پر ملتے ہیں۔

۲۹۔ مکانی  $MA = 10$  کے گرد متساوی الاضلاع مثلث

کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مثلثوں کے راس مخروطی

$MA = (10 + 10) (10 + 10)$

پر ہیں۔

۳۰۔ اگر  $\frac{LA}{10} + \frac{MA}{10} = 10$  پر دو نقطے ف، ق ہوں جنکے

خارج المركز زاوے طہ اور فہ رشتہ ق ط طہ + ق فہ = ۲ کو پورا کرتے ہیں

تو ثابت کرو کہ ف ق ناقص

$$= -\frac{10}{10} - \frac{10}{10} + \frac{10}{10}$$

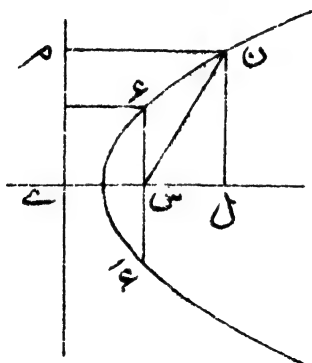
کو نف کرتا ہے۔



## آٹھواں باب

مخروطی کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو

۱۶۰۔ ایک مخروطی کی قطبی مساوات معلوم کرنا جبکہ ماسکہ قطب ہو۔  
فرض کرو کہ ماسکہ  $S$  میں اور  $e$  مرتب ہے۔ فرض کرو کہ خروج مرکز  
ز ہے۔



میں  $e$  کو مرتب پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ  $S$  سے ابتدائی  
خط ہے۔

فرض کرو کہ وتر خاص  $ع$  سے  $ع$  ہے تو  $ز$  سے

$=$  سے  $ع = ل$  (فرض کرو)  
 فرض کرو کہ منحنی کے کسی نقطہ  $ن$  کے محدد  $ر$  طہ ہیں۔ فرض کرو کہ  
 (۱۳)  $ن$  م  $ن$   $ل$  علی الترتیب مرتب پر اور سے پر عمود ہیں۔ تب  
 سے  $ن = ز$   $ن$  م  $ز$   $ل$  سے  $ز$   $ل$  سے  $ز$   $م$  سے  $ز$   $م$  سے  $ز$   $م$  سے  
 با  $ر = -$  ز  $ر$  جم طہ  $+ ل$

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + ز \text{ جم طہ}$$

اگر مخروطی کا محور ابتدائی خط کے ساتھ زاویہ  $ع$  بنائے تو منحنی کی  
 مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + ز \text{ جم (طہ - ع)}$$

ہوگی۔ کیونکہ اس صورت میں سے  $ن$  سے کے ساتھ زاویہ  
 طہ - ع بناتا ہے۔

۱۶۱۔ اگر مرتب پر کے کسی نقطہ کے محدد  $ر$  طہ ہوں تو

$$\frac{ل}{ر} = \text{جم طہ} = \text{سے} = \frac{ل}{ر}$$

اس لئے مرتب کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ز \text{ جم طہ}$$

ہے۔ اسی طرح  $\frac{ل}{ر} = ۱ + ز \text{ جم (طہ - ع)}$  کے مرتب کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ز \text{ جم (طہ - ع)}$$

اگر ماسکی وتر  $n$  میں  $n$  ہو اور  $n$  کا سمتی زاویہ  $\theta$  تو  $n$  کا سمتی  
زاویہ  $\theta + \theta$  ہو گا۔ پس اگر  $n$  میں  $n = r$  میں  $n = r$  تو

$$\frac{r}{r} = 1 + \text{زجم } \theta \text{، اور } \frac{r}{r} = 1 + \text{زجم } (\theta + \theta)$$

$$\therefore \frac{r}{r} = \frac{r}{r} + \frac{r}{r}$$

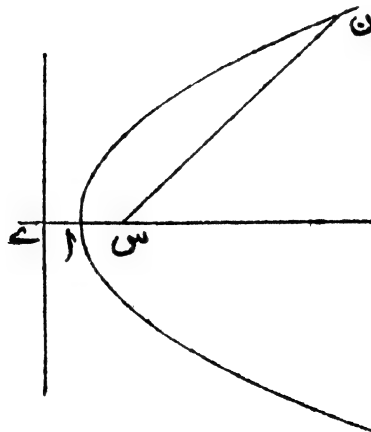
$$\frac{r}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \text{ پس}$$

اس لئے کسی مخروطی میں نیم وتر خاص کسی ماسکی وتر کے  
مقطعوں کے درمیان موسیقی اوسط ہوتا ہے۔

$$(۲۱۴) \quad ۲۶۲ - \text{مخروطی } \frac{r}{r} = 1 + \text{زجم } \theta \text{ کو اس کی مساوات سے قسم کرنا۔}$$

(۱) فرض کرو  $z = \theta$  تو منحنی مکافی ہے اور مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{r}{r} = 1 + \text{زجم } \theta$$



نقطہ ۱ پر جہاں منحنی محور کو قطع کرتا ہے

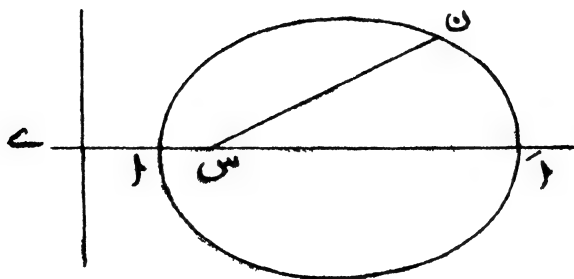
$$\text{ط} = ۰ \text{ اور } ر = \frac{۱}{۲}$$

جیسے زاویہ ط بڑھتا ہے (۱+ جم ط) گھٹتا ہے یعنی ل گھٹتا ہے اور اس لیے ر بڑھتا ہے، اور ر بغیر کسی حد کے بڑھتا ہے یہاں تک کہ ط = ۰ تو ر لانتہا ہی ہو جاتا ہے۔ جیسے ط، ۲ کے آگے بڑھتا ہے (۱+ جم ط) مسلسل بڑھتا ہے اور اس لیے مسلسل گھٹتا ہے یہاں تک کہ ط = ۲۲ تو دوجہ پھر  $\frac{۱}{۲}$  ل کے مساوی ہو جاتا ہے۔ پس منحنی کی شکل وہ ہے جو نقشہ میں دکھائی گئی ہے اور وہ سمت ۱ میں ل انتہا فاصلہ تک جاتی ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ز اکائی سے کم ہے تو منحنی ایک ناقص ہے۔

$$\text{نقطہ ۱ پر ط} = ۰ \text{ اور } ر = \frac{ل}{۱+ز}$$

جیسے ط بڑھتا ہے جم ط گھٹتا ہے اور اس لیے ل گھٹتا ہے یعنی ر بڑھتا ہے یہاں تک کہ ط = ۲۲ تو ر =  $\frac{ل}{۱-ز}$  [چونکہ  $ز > ۱$ ، ر کی یہ قیمت مثبت ہے]۔



اس لیے منحنی محور کو کمر ایک ایسے نقطہ  $A$  پر قطع کرتا ہے کہ  $s = \frac{l}{1-z}$ ۔  
 جیسے طہ  $\pi$  سے  $\pi + 2$  تک بڑھتا ہے جم طہ مسلسل۔  $1$  سے  $A$  تک  
 بڑھتا ہے اسلئے  $\frac{l}{r}$  مسلسل بڑھتا ہے اور مسلسل  $\frac{l}{1-z}$  سے  $\frac{l}{1+z}$   
 تک گھٹتا ہے۔

چونکہ طہ کی کسی قیمت کے لیے جم طہ = جم  $(\pi + 2)$  طہ اس لیے  
 منحنی محور کے گرد متشکل ہے۔

اس لیے جب  $z$  اکائی سے چھوٹا ہوتا ہے تو مساوات ایک  
 بند منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ابتدائی خط کے گرد متشکل ہوتی ہے۔  
 (۳) فرض کرو کہ  $z$  اکائی سے بڑا ہے تو منحنی ایک زائد ہے۔

$$\text{نقطہ } A \text{ پر طہ } = 0, \text{ اور } r = \frac{l}{1+z}$$

جیسے طہ بڑھتا ہے جم طہ گھٹتا ہے اور اس لیے ر بڑھتا ہے  
 یہاں تک کہ  $1 + z$  جم طہ  $= 0$ ۔ طہ کی اس قیمت کے لیے جس کو ہم  $e$  کہیں گے  
 (زاویہ  $A$  میں شکل میں) ر کی قیمت لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے۔  
 جیسے طہ  $e$  کے آگے بڑھتا ہے  $(1 + z)$  جم طہ منفی ہو جاتا ہے

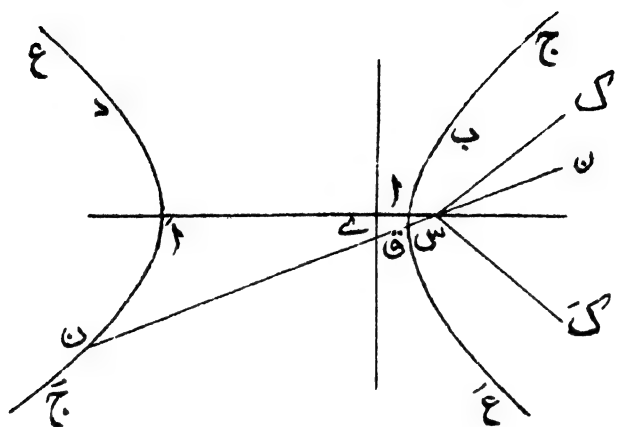
$$\text{اور جب طہ } = \pi \text{ تو } r = -\frac{l}{1-z} = s \text{ (شکل میں) اور } (1 + z) \text{ جم طہ}$$

منفی رہے گا یہاں تک کہ طہ  $(\pi + 2 - e)$  کے مساوی ہو یعنی زاویہ اس ک  
 (شکل میں) کے مساوی ہو۔ جب طہ  $= \pi + 2 - e$  تو ر پھر لا متناہی  
 ہو جاتا ہے۔ اگر طہ اس سے قدرے کم ہو تو ر بہت بڑا اور منفی  
 ہو گا اور اگر طہ قدرے بڑا ہو تو ر بہت بڑا اور مثبت ہو گا۔ ر کی  
 قیمتیں مثبت رہیں گی جبکہ طہ  $\pi + 2 - e$  سے  $\pi + 2$  تک بدلے۔

پس منحنی حسب ذیل ترتیب میں مرسم ہوتا ہے :-



اول حصہ ا ب ج پھر ج ن ا اور ا د ع اور آخر میں  
ع ق ا۔



منحنی دو جداگانہ شاخوں پر مشتمل ہے اور پوری شاخ ج ن ا د ع کے لیے سمتی نیم قطر منفی ہے۔  
اگر ایک خط میں ق ن (حسب شکل) کھینچا جائے جو منحنی کو دو نقطوں ن اور ق پر جو مختلف شاخوں پر ہوں قطع کرے تو ان دو نقطوں ق اور ن کے متعلق یہ نہیں سمجھنا چاہیے کہ ان کا سمتی زاویہ ایک ہی ہے۔ سمتی نیم قطر میں ن منفی ہے یعنی میں ن کو اس سمت میں کھینچا گیا ہے جو اس سمت کے مخالف ہے جو اس کے سمتی زاویہ کی تحدید کرتی ہے، اس لیے سمتی زاویہ ا س ن ہونا چاہیے جہاں ن میں ممدودہ پر ہے۔ پس اگر ق کا سمتی زاویہ ط ہے تو ن کا طہ - ۲۱ ہوگا۔

۱۶۳۔ ایک مخروطی پر کے دو دے ہوئے نقطوں میں سے

گذرنے والے خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا اور کسی نقطہ پر  
کے تماس کی مساوات معلوم کرنا۔  
فرض کرو کہ دو نقطوں  $N$  اور  $Q$  کے سمتی زاویے علی الترتیب  
(ع۔ ی) اور (ع۔ ب) ہیں۔  
فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$\frac{L}{r} = 1 + \text{زجم طہ} \dots \dots (1)$$

ہے۔ وہ خط مستقیم جس کی مساوات

$$\frac{L}{r} = \{ \text{جم طہ} + \text{بجم (طہ - عہ)} \} \dots (2)$$

ہے کسی دو نقطوں میں سے گزرے گا کیونکہ اس کی مساوات میں دو  
غیر تابع مستقلات  $\{$  اور  $b$  شامل ہیں۔ چنانچہ وہ دو نقطوں  $N$   
اور  $Q$  میں سے گزرے گا اگر (۲) میں  $r$  کی وہی قیمتیں ہوں جو  
اسکی (۱) میں ہیں جبکہ  $\text{طہ} = \text{عہ} - \text{بہ}$  اور جبکہ  $\text{طہ} = \text{عہ} + \text{بہ}$ ۔ یہ صورت  
اس وقت ہوگی جبکہ۔

$$1 + \text{زجم (عہ - بہ)} = \{ \text{جم (عہ - بہ)} + \text{بجم بہ} \}$$

$$\text{اور } 1 + \text{زجم (عہ + بہ)} = \{ \text{جم (عہ + بہ)} + \text{بجم بہ} \}$$

$$\therefore 1 = \text{ز} \text{ اور } \text{بجم بہ} = 1$$

$\{$  اور  $b$  کی ان قیمتوں کو (۲) میں درج کرنے سے ہمیں وتر  
کی مطلوبہ مساوات

$$\frac{L}{r} = \text{زجم طہ} + \text{قط بہجم (طہ - عہ)} \dots \dots (3)$$

حاصل ہوتی ہے۔

اس نقطہ پر جس کا سمتی زاویہ  $\text{عہ}$  ہے تماس کی مساوات معلوم

کرنے کے لیے (۳) میں بہ = رکھنا چاہیے چنانچہ اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{ل}{ر} = زجم طہ + جم (طہ - عہ) \dots \dots \dots (۴)$$

نتیجہ صریح - اگر مخروطی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + زجم (طہ - عہ)$$

ہو تو اس وتر کی مساوات جو نقطوں (عہ - بہ) اور (عہ + بہ) کو ملاتا ہے (۱۸)

$$\frac{ل}{ر} = زجم (طہ - عہ) + قط یہ جم (طہ - عہ)$$

ہے اور عہ پر کے تماس کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = زجم (طہ - عہ) + جم (طہ - عہ)$$

ہے -

۱۶۴ - ایک مخروطی کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی کی

مساوات معلوم کرنا -

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + زجم طہ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے اور فرض کرو کہ نقطہ کے محدود ر، طہ ہیں -

فرض کرو کہ ان نقطوں کے سمتی زاوے عہ ± بہ ہیں جن پر کے تماس

نقطہ (ر، طہ) میں سے گذرتے ہیں -

اس خط کی مساوات جو ان نقطوں میں سے گذرتا ہے

$$\frac{ل}{ر} = زجم طہ + قط یہ جم (طہ - عہ) \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔ ان نقطوں پر کے ماسوں کی مساواتیں

$$\begin{aligned} \frac{L}{r} &= \text{زجم طہ} + \text{جم (طہ - عہ + بہ)} \\ \text{اور} \quad \frac{L}{r} &= \text{زجم طہ} + \text{جم (طہ - عہ - بہ)} \\ \text{ہیں۔ چونکہ یہ ماس (۱) طہ، ۱ میں سے گزرتے ہیں اس لیے} \\ \frac{L}{r} &= \text{زجم طہ} + \text{جم (طہ - عہ + بہ)} \\ \text{اور} \quad \frac{L}{r} &= \text{زجم طہ} + \text{جم (طہ - عہ - بہ)} \\ \text{پس} \quad \text{طہ} &= \text{عہ اور جم بہ} = \frac{L}{r} - \text{زجم طہ} \\ \text{مساوات (۲) میں عہ اور بہ کی بجائے اندراج کرو تو} \end{aligned}$$

$$\left( \frac{L}{r} - \text{زجم طہ} \right) \left( \frac{L}{r} - \text{زجم طہ} \right) = \text{جم (طہ - طہ)} \dots (۳)$$

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

۱۶۵۔ ایک مخروطی کے کسی نقطہ پر کے عماد کی قطبی مساوات معلوم کرنا جبکہ ماس کے قطب ہو۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات  $\frac{L}{r} = ۱ + \text{زجم طہ}$  ہے تو کسی نقطہ (۲۱۹) عہ پر کے ماس کی مساوات

$$\frac{L}{r} = \text{زجم طہ} + \text{جم (طہ - عہ)}$$

ہے۔

اس ماس پر کسی عمودی خط کی مساوات

$$\frac{J}{r} = \text{زجم (طہ + } \frac{H}{r} \text{)} + \text{جم (طہ + } \frac{H}{r} \text{ - عہ)}$$

$$\frac{J}{r} = \text{زجم طہ - جب (طہ - عہ)}$$

ہے۔

یہ عماد کی مطلوبہ مساوات ہوگی اگر ج کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ نقطہ  $(\frac{ل}{ل+زجم عه})$  خط پر ہو۔ اس لیے حاصل ہونا چاہئے

$$ج = \frac{ل + زجم عه}{ل} = - زجب عه$$

$$یا ج = \frac{ل - ل زجب عه}{ل + زجم عه}$$

پس عماد کی مساوات

$$\frac{ل زجب عه}{ل + زجم عه} \times \frac{1}{ر} = زجب طه + جب (طه - عه)$$

ہے۔ مثال ۱۔ دو نقطوں پر جن کے سمتی زاویے علی الترتیب عه اور یہ ہیں ماسوں کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ر} = زجم طه + جم (طه - عه)$$

$$اور \frac{ل}{ر} = زجم طه + جم (طه - عه)$$

نہیں۔ یہ ماس جہاں ملتے ہیں وہاں

$$جم (طه - عه) = جم (طه - عه)$$

$$طه = \frac{عہ + عہ}{۲}$$

پس اگر ایک مخروطی کے نقطوں ن، ق پر کے ماسوں کا

نقطہ تقاطع ت ہو تو بس ت زاویہ ن س ق کی تصفیف کرے گا۔ لیکن اگر مخروطی قطع زائد ہو اور نقطے مختلف شاخوں پر ہوں

میں تہ خارجی زاویہ ن میں ق کی تنصیف کرے گا کیونکہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ن کا سمتی زاویہ (اگر ن بعید تر شاخ پر ہو) وہ زاویہ نہیں ہے جو ن میں سے کے ساتھ بناتا ہے بلکہ وہ زاویہ ہے جو ن میں محدودہ سے کے ساتھ بناتا ہے۔

مثال ۲۔ اگر ایک مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کاس مرتب سے ک پر ملے تو زاویہ ک میں قائمہ ہوگا۔  
اگر ن کا سمتی زاویہ ع ہو تو ن پر کے کاس کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = زجم ط + جم (ط - ع)$$

ہے۔ یہ کاس مرتب سے جس کی مساوات ل = ز رجم ط ہے وہاں ملیگا جہاں جم (ط - ع) = ۰۔

پس نقطہ ک پر ط - ع =  $\pm \frac{ل}{ر}$   
اس لیے زاویہ ک میں قائمہ ہے

مثال ۳۔ اگر ایک مخروطی کے وتروں کے محاذی ایک ماسکہ پر ایک مستقل زاویہ بنے تو وتر کے سروں پر کے کاس ایک ثابت مخروطی پر ملیں گے اور وتر ایک دوسرے ثابت مخروطی کو مس کرے گا۔

فرض کرو کہ ۲ بہ وہ زاویہ ہے جو وتر کے محاذی ماسکہ پر بنتا ہے۔  
فرض کرو کہ وتر کے سروں کے سمتی زاویے ع - بہ اور ع + بہ ہیں۔  
وتر کی مساوات ہوگی

$$\frac{ل}{ر} = ز رجم ط + قط بہ جم (ط - ع)$$

یا  $\frac{ل}{ر} \text{ جم بہ} = ز \text{ جم بہ} + \text{جم} (ط - ع) \dots (۱)$

لیکن (۱) مخروطی

$\frac{ل}{ر} \text{ جم بہ} = ۱ + ز \text{ جم بہ} + \text{جم} ط \dots (۲)$

کے اُس نقطہ پر کے ماس کی مساوات ہے جس کا سمتی زاویہ ع ہے۔ پس وتر ہمیشہ ایک ثابت مخروطی کو مس کرتا ہے جس کا خروج المرکز

ز جم بہ ہے اور وتر خاص ۲ ل جم بہ ہے۔ وتر کے سروں پر کے ماسوں کی مساواتیں

$\frac{ل}{ر} = ز \text{ جم ط} + \text{جم} (ط - ع + بہ)$

اور  $\frac{ل}{ر} = ز \text{ جم ط} + \text{جم} (ط - ع - بہ)$

ہیں۔ یہ دونوں خط مخروطی

$\frac{ل}{ر} = ز \text{ جم ط} + \text{جم بہ}$

سے ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں یعنی وہاں جہاں ط = ع اور  $\frac{ل}{ر} = ز \text{ جم ع} + \text{جم بہ}$

پس وتر کے سروں پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق مخروطی

$\frac{ل}{ر} \text{ قط بہ} = ۱ + ز \text{ قط بہ} + \text{جم} ط \dots (۳)$

ہے۔ مخروطی (۲) اور (۳) دونوں کا ماسکہ اور مرتب وہی ہیں جو دے ہوئے

مخروطی کے ہیں۔ مثال ۴۔ اُس مثلث کے حاطد الزو کی مساوات معلوم

کہ جو ایک مکانی کے تین ماسوں سے بنتا ہے۔

فرض کرو کہ تین نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے سمتی زاوے علی الترتیب  
ع، 'ب'، 'ج' ہیں۔  
فرض کرو کہ مکانی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + \text{جم طہ}$$

ہے۔ تب 'ا'، 'ب'، 'ج' پر کے ماسوں کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ر} = \text{جم طہ} + \text{جم (طہ - ع)}$$

$$\frac{ل}{ر} = \text{جم طہ} + \text{جم (طہ - ب)}$$

$$\frac{ل}{ر} = \text{جم طہ} + \text{جم (طہ - ج)}$$

ہیں۔ ب اور ج پر کے ماس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$\text{طہ} = \frac{۱}{۲} (\text{ب} + \text{ج}) \text{ اور } \frac{ل}{ر} = ۲ \text{ جم } \frac{ل}{ر} - \text{جم } \frac{ل}{ر}$$

ج اور 'ا' پر کے ماس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$\text{طہ} = \frac{۱}{۲} (\text{ج} + \text{ع}) \text{ اور } \frac{ل}{ر} = ۲ \text{ جم } \frac{ل}{ر} - \text{جم } \frac{ل}{ر}$$

اور 'ا' اور ب پر کے ماس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$\text{طہ} = \frac{۱}{۲} (\text{ع} + \text{ب}) \text{ اور } \frac{ل}{ر} = ۲ \text{ جم } \frac{ل}{ر} - \text{جم } \frac{ل}{ر}$$

اندراج سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ تین نقاط تقاطع اس دائرہ پر ہیں جس کی  
مساوات



$$r = \frac{l}{\text{جم} (ط - \frac{ع}{2} - \frac{ز}{2} - \frac{ج}{2})} = \frac{2 \text{ جم} \frac{ع}{2} \text{ جم} \frac{ز}{2} \text{ جم} \frac{ج}{2}}{\text{جم} (ط - \frac{ع}{2} - \frac{ز}{2} - \frac{ج}{2})}$$

ہے۔

یہ دائرہ ہمیشہ مکافی کے ماسکہ میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۵۔ مخروطی  $\frac{l}{r} = 1 + ز \text{ جم} ط$  کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرنا۔  
عہ پر کے ماس کی مساوات

$$\frac{l}{r} = ز \text{ جم} ط + \text{جم} (ط - ع) \dots\dots\dots (۱)$$

ہے۔ نقطہ عہ، مخروطی پر لاتنا ہی پر کا نقطہ ہوگا اگر

$$0 = 1 + ز \text{ جم} ع \dots\dots\dots (۲)$$

مطلوبہ مساوات (۱) اور (۲) سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل

ہوگی چنانچہ وہ

$$\left\{ \frac{ز l}{r} + (1 - ز) \text{ جم} ط \right\} = ز \text{ جب} ط \text{ جب} ع = (1 - ز) \text{ جب} ط$$

ہے۔

## آٹھویں باب پر مثالیں

۲۲۲)

۱۔ ایک مکافی کے کسی دو ماسوں کے درمیان خارجی زاویہ ان کے نقاط تماس کے سمتی زاویوں کے فرق کا نصف ہوتا ہے۔

۲۔ ایک مکافی کے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریقی جبکہ ماس ایک دوسرے کو ایک مستقل زاویہ پر قطع کریں ایک قطع زائد ہے جس کا ماسکہ اور مرتب وہی ہیں جو ابتدائی مکافی کے ہیں۔

۳۔ اگر ایک مخروطی کے کوئی دو ماسکی وتر  $n$  اور  $q$  میں  $q$  ایک دوسرے کے علی القوام ہوں تو ثابت کرو کہ

$$n \times \sin \frac{1}{2} + q \times \sin \frac{1}{2} = \text{مستقل ہے۔}$$

۴۔ اگر ایک مکافی پر { 'ب'، 'ج' کوئی تین نقطے ہوں اور ان نقطوں پر کے ماسوں سے مثلث 'ا ب ج' بنے تو ثابت کرو کہ  $n \times \sin \frac{1}{2} + q \times \sin \frac{1}{2} = \text{مکافی کا ماسکہ ہے۔}$

۵۔ اگر ایک ناقص کا ایک ماسکی وتر محور کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بنا کر تو ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو اس کے سروں پر کے ماسوں کے درمیان بنتا ہے

$$\text{مس} = \frac{2 \text{ ز جب } \theta}{1 - \text{ز}}$$

ہے۔

۶۔ مساوات  $\frac{L}{r} = 1 + \text{ز}$  کے ذریعہ ثابت کرو کہ ناقص

کی سکوین ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے ہو سکتی ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

۷۔ ایک وتر کے معادی مخروطی کے ماسکہ پر مستقل زاویہ  $\theta$  بنا کر بتاتا ہے، وتر کے قطب کا طریق معلوم کرو، ان صورتوں میں تمیز کرو جنکے لیے  $\text{جم} \theta < = > \text{ز}$ ۔

۸۔ ایک مخروطی کا ایک وتر  $n$  ہے جو ایک ماسکہ پر قائم زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ  $n$  کے قطب کا طریق اور وہ طریق جسکو  $n$  ق لف کرتا ہے مخروطیاں ہیں جن کے وتر خاص اور ابتدائی مخروطی کے وتر خاص میں نسبتیں علی الترتیب  $1:2$  اور  $1:4$  ہیں۔

۹۔ ایک مخروطی کا ماسکہ اور مرتب دے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے لحاظ سے ایک دے ہوئے نقطہ کا قطبی ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔  
۱۰۔ اگر دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہو تو ثابت کرو کہ ان کے مشترک وتروں میں سے دو وتران کے مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گزریں گے۔

۱۱۔ دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہے اور اس ماسکہ میں سے کوئی وتر کھینچا گیا ہے جو مخروطیوں سے علی الترتیب  $N$  اور  $Q$  پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ  $N$  پر کے ماس  $Q$  اور  $Q$  پر کے ماسوں سے ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جو مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گزریں والے دو خطوط مستقیم پر واقع ہیں، یہ خطوط علی القواثم ہوں گے اگر مخروطیوں کا خروج المرکز ایک ہی ہو۔

۱۲۔ ایک مکافی کے ماسکہ میں سے کوئی دو وتر  $l$  میں سے  $m$  کھینچے گئے ہیں۔  $l$  پر کا ماس نقطوں  $m$  پر کے ماسوں سے نقطوں  $k$  پر ملتا ہے اور  $l$  پر کا ماس ان سے  $g$  پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ خطوط  $gk$  علی القواثم ہیں۔

۱۳۔ دو مخروطی ایک مشترک ماسکہ رکھتے ہیں جس کے گرد ایک گول گھمایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے مشترک وتروں میں سے دو ایسے مخروطیوں میں سے گزریں گے جن کا ماسکہ ثابت ماسکہ ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ  $\frac{l}{r} = 1 + \text{زحم طہ کے دو ماسوں کے (جو باہم)}$

علی القواثم ہیں) نقطہ تقاطع کے طریق کی مساوات  
 $r^2 (z^2 - 1) - 2 \text{ زحم طہ} + 2l^2 = 0$

۴۔

۱۵۔ اگر ایک ناقص کے ماسکوں میں سے  $h$  میں سے گزریں والے

دو وتر  $sq$  اور  $sq$  ہوں تو  $\frac{sq}{sq} + \frac{sq}{sq} = \frac{sq}{sq}$  کے محل پر

منحصر نہیں ہوگا۔

۱۶۔ دو مخروطی ایک ہی ماسکہ کے ساتھ بنائے گئے ہیں اور اس ماسکہ کا فاصلہ ہر ایک کے متناظر مرتب سے وہی ہے۔ اگر یہ مخروطی ایک دوسرے کو سس کریں تو ثابت کرو کہ قاطع مخروطوں کے درمیانی زاویہ کے نصف کی جیسا کہ دگنا، خروج المرکزوں کے متکافوں کے فرق کے مساوی ہے۔

۱۷۔ دے ہوئے نصف قطر کا ایک دائرہ جو ایک دے ہوئے مخروطی کے ماسکہ میں سے گزرتا ہے مخروطی کو نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ

$$س ا \times س ب \times س ج \times س د$$

مستقل ہے۔

۱۸۔ ایک دائرہ ایک مخروطی کے ماسکہ میں سے جس کا وتر خاص ۲ ہے گزرتا ہے اور مخروطی سے چار نقطوں پر ملتا ہے جن کے فاصلے ماسکہ سے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{۲}{ل} = \frac{۱}{س ا} + \frac{۱}{س ب} + \frac{۱}{س ج} + \frac{۱}{س د}$$

۱۹۔ ایک دیا ہوا دائرہ جس کا مرکز ایک مکانی کے محور پر ہے ماسکہ میں سے گزرتا ہے اور کسی مخروطی سے جس کا وتر خاص دیا گیا ہے اور ماسکہ میں ہے اور مکانی کا ایک مماس اس کا مرتب ہے چار نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' پر منقطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ فاصلوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کا مجموعہ مستقل ہے۔

۲۰۔ دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ میں مشترک ہے اور ان کے محاور ایک ہی سمت میں ہیں۔ ان مخروطیوں میں سے ایک پر نقطہ 'ا' اور دوسرے پر نقطہ 'ب' لیے گئے ہیں ایسے کہ 'ا' سے اور 'ب' سے علی القیوم ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ا' اور 'ب' کے مماس ایک مخروطی پر ملتے ہیں جس کے خروج المرکز کا مربع ابتدائی مخروطیوں کے خروج المرکزوں کے مربعوں کے

مجموعہ کے مساوی ہے۔

۲۱۔ ایک مشترک وتر خاص کے ساتھ مخروطیوں کا ایک سلسلہ مرتب کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان کے ان نقطوں کا طریق جن پر ماسکہ سے ماسک عمودیم وتر خاص کے مساوی ہے مساوات  $ل = رجم طه$  سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۲۔ اگر ایک ثابت نقطہ  $و$  میں سے گزرنیوالا وتر  $ن و$  ہو تو  $\frac{ل}{ر} = \frac{ن}{س}$  و مستقل ہوگا جہاں  $س$  مخروطی کا ایک ماسکہ ہے۔

۲۳۔ مخروطی مرتب کئے گئے ہیں جن کے وتر خاص مساوی ہیں اور ایک ماسکہ مشترک ہے۔ نیز متناظر مرتب ایک ثابت ہم ماسکی مخروطی کو لف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ مخروطی سب کے سب دو ثابت مخروطیوں کو مس کرتے ہیں جن کے وتر خاص کے متکافی علی الترتیب متغیر مخروطی اور اس کے ہم ماسکہ ثابت مخروطی کے وتر خاص کا مجموعہ اور فرق ہیں اور جن کا مرتب وہی ہے جو ثابت ہم ماسکی مخروطی کا ہے۔

۲۴۔ ایک مخروطی کو مرتب کیا گیا ہے جس کا ماسکہ اور خروج المکرز وہی

ہیں جو مخروطی  $\frac{ل}{ر} = ۱ + رجم طه$  کے ہیں اور یہ دو مخروطی نقطہ  $طه = عه$  پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے وتر خاص کا

$$طول = \frac{ل(۱-ز)}{ز+۲ رجم عه+۱} ہوگا۔$$

۲۵۔ نقطہ  $(ر، طه)$  سے مخروطی  $\frac{ل}{ر} = ۱ + رجم طه$  کے

ماسوں کا زوج کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان ماسوں کے زوج کی مساوات

$$\left\{ \frac{ل}{ر} - رجم طه \right\} \left\{ ۱ - \left( \frac{ل}{ر} - رجم طه \right) \right\} = ۱$$

$$= \left[ \left( \frac{L}{r} - \text{زجم طہ} \right) \left( \frac{L}{r} - \text{زجم طہ} \right) - \text{جم طہ} \right] \text{طہ} - ۲$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

نیز ثابت کرو کہ متقارب

$$\frac{Z}{r} = (1 - ۲) \text{جم طہ} \pm \text{جب طہ} \sqrt{1 - ۲}$$

ہیں۔

$$۲۶ - \text{اگر } \frac{L}{r} = ۱ + \text{جم طہ کے نقطوں عہ، ب، جہ پر کے عماد نقطہ}$$

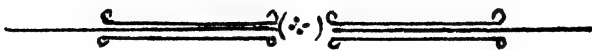
(غہ، فہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ ۲ فہ = عہ + بہ + جہ -

$$۲۷ - \text{اگر } \frac{L}{r} = ۱ + \text{زجم طہ کے ان نقطوں پر کے عماد جن کے}$$

سمتی زاوے طہ، طہ، طہ، طہ ہیں نقطہ (غہ، فہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ  
طہ، طہ، طہ، طہ + طہ - ۲ فہ = (۱ + ۲) - ۲

$$۲۸ - \text{اگر } \frac{L}{r} = ۱ + \text{جم طہ کے ان نقطوں ن، ق، مرا پر کے}$$

عماد جن کے سمتی زاوے طہ، طہ، طہ، طہ ہیں نقطہ و (غہ، عہ) پر ملیں تو  
ثابت کرو کہ اس مثلث کے حاطہ دائرہ کا قطر جو ن، ق، مرا پر کے مساوی  
سے بنتا ہے اس کے مساوی ہوگا جہاں اس مکانی کا ماسکہ ہے۔



# نواں باب

## درجہ دوم کی عام مساوات

۱۶۶ — ہم ابواب ماسبق میں دیکھ چکے ہیں کہ کسی مخروطی کی مساوات ہمیشہ درجہ دوم کی ہوتی ہے، اب ہم ثابت کریں گے کہ درجہ دوم کی ہر مساوات ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے اور نیز معلوم کریں گے کہ کسی ایسی مساوات سے اس مخروطی کی نوعیت اور محل کس طرح متعین کئے جاسکتے ہیں جس کو وہ تعبیر کرتی ہے۔

۱۶۷ — ثابت کرو کہ ہر منحنی جس کی مساوات دوسرے درجہ

کی ہے ایک مخروطی ہے۔  
ہم محددوں کے محوروں کو قائم فرض کر سکتے ہیں کیونکہ اگر مساوات مائل محوروں کے حوالے سے دی گئی ہو اور اگر ہم قائم محوروں میں تبدیل کریں تو مساوات کا درجہ نہیں بدلتا [دفعہ ۵۳]۔

پس فرض کرو کہ منحنی کی مساوات

$$1) \quad x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0 \quad (1)$$

ہے۔  
چونکہ درجہ دوم کی مساوات کی یہ عام سے عام شکل ہے اس لئے اس میں تمام ممکنہ صورتیں شامل ہیں۔

ہم رقم لا ما کو اس طرح خارج کر سکتے ہیں کہ محوروں کو ایک خاص زاویہ میں سے گھمایا جائے کیونکہ محوروں کو ایک زاویہ ط میں سے گھمانے کے لیے ہمیں لا اور ما کی بجائے علی الترتیب

لا جم طہ - ماجب طہ اور لاجب طہ + ماجم طہ  
درج کرنا ہوگا۔

چنانچہ مساوات (۱) ہو جائے گی

(۲۲۷)

۱ (لاجم طہ - ماجب طہ) + ۲ (لاجم طہ - ماجب طہ)

(لاجم طہ + ماجم طہ)

+ ب (لاجم طہ + ماجم طہ) + ۲ گ (لاجم طہ - ماجب طہ)

+ ۲ ف (لاجم طہ + ماجم طہ) + ج = ۰ (۲)

(۲) میں لا ما کا سر

۲ (ب - ۱) جب طہ جم طہ + ۲ (جم طہ - جب طہ)

ہے اور یہ صفر ہوگا اگر

مس ۲ طہ =  $\frac{۲}{ب-۱}$  (۳)

چونکہ کسی ایسے زاویہ کو معلوم کیا جاسکتا ہے جس کا ماس کسی حقیقی

مقدار کے مساوی ہے اس لیے زاویہ طہ =  $\frac{۱}{۲}$  مس ۱ طہ تمام صورتوں میں حقیقی ہے۔

اب مساوات (۲) کو لکھا جاسکتا ہے

۱ (لا + ب ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ج = ۰) (۴)

اگر ۱ اور ب میں سے کوئی بھی صفر نہیں ہے تو ہم مساوات (۴) کو شکل

۱ (لا +  $\frac{ب}{۱}$ ) + ب (ما +  $\frac{ف}{ب}$ ) = ۲ ( $\frac{گ}{ب}$  +  $\frac{ج}{ب}$ )



میں لکھ سکتے ہیں، یا مبادا کو نقطہ  $(-\frac{گ}{ب}, -\frac{ف}{ب})$  پر لینے سے

$$۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = \frac{گ}{ب} \dots \dots \dots (۵)$$

اگر مساوات (۵) کا بائیں جانبی رکن صفر ہو تو مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی [دفعہ ۳۵]۔

لیکن اگر مساوات (۵) کا بائیں جانبی رکن صفر نہ ہو تو ہمیں مساوات

$$۱ = \frac{لا}{\frac{گ}{ب}} + \frac{ما}{\frac{گ}{ب}}$$

حاصل ہوتی ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ مساوات ایک ناقص کو تعبیر کرے گی اگر دونوں نسب نامہ مثبت ہوں اور ایک زائد کو تعبیر کرے گی اگر ایک نسب نامہ منفی اور دوسرا مثبت ہو۔

اگر دونوں نسب نامہ منفی ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں مساوات کو پورا نہیں کرینگی۔ اس صورت میں منحنی ایک خیالی ناقص ہوتا ہے۔

پھر فرض کرو کہ (۱ یا ب صفر ہے، مثلاً فرض کرو ۱ صفر ہے۔ ۲۲۸)  
[۱ اور ب دونوں بوجہ دفعہ ۵۳ صفر نہیں ہو سکتے] تب مساوات (۴) لکھی جاسکتی ہے

$$ب(ما + \frac{ف}{ب}) = ۲گ - لا - ج + \frac{ف}{ب} \dots \dots \dots (۶)$$

اگر گ = ۰ تو یہ مساوات متوازی خطوط کے ایک زوج کو تعبیر کرتی ہے جو منطبق ہونگے اگر گ = ۰ اور نیز ف = ب ج = ۰۔  
اگر گ صفر نہیں ہے تو ہم مساوات کو لکھ سکتے ہیں

$$(ما + \frac{ف}{ب}) = ۲گ - لا - ج + \frac{ف}{\frac{ب}{بگ}}$$

جو ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور محور لا کے متوازی ہے۔

پس تمام صورتوں میں وہ منحنی جو درجہ دوم کی عام مساوات سے تعبیر ہوتا ہے مخروطی ہے۔

۱۶۸۔ ایک مخروطی کے مرکز کے محدود معلوم کرنا۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ جب محدودوں کا مبداء کسی مخروطی کا مرکز ہوتا ہے تو مخروطی کی مساوات میں وہ رقبے شامل نہیں ہوتیں جن میں متغیروں کا درجہ پہلا ہوتا ہے پس مخروطی کا مرکز معلوم کرنے کے لیے مبداء کو کسی نقطہ (لا، ما) پر تبدیل کرنا چاہئے اور لا، ما کا ایسا انتخاب کرنا چاہئے کہ استحالة شدہ مساوات میں لا اور ما کے سر صفر ہو جائیں۔

فرض کر دو کہ مخروطی کی مساوات

$$۱ + لا + ۲ھ + لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰$$

ہے۔

(لا، ما) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات اس طرح حاصل کی جاسکتی ہے کہ لا کی بجائے لا + لا اور ما کی بجائے ما + ما درج کیا جائے چنانچہ استحالة شدہ مساوات ہوگی

$$۱ + (لا + لا) + ۲ھ + (لا + لا) + (ما + ما) + ۲گ + (ما + ما) + ۲ف + (لا + لا) = ۰$$

$$۲ + ف + (ما + ما) + ج = ۰$$

یا

$$۱ + لا + ۲ھ + لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰$$

$$۱ + لا + ۲ھ + لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰$$

اس مساوات میں لا اور ما دونوں کے سر صفر ہونگے اگر لا اور ما کو اس طرح

منتخب کیا جائے کہ

$$(۱) \quad ۱ + ۲ = ۳ = ۰$$

$$(۲) \quad ۱ + ۲ + ۳ = ۰$$

تب (۱) کو مبدأ، مانکر اس کے حوالے سے استعمال شدہ مساوات

$$(۳) \quad ۱ + ۲ + ۳ = ۰$$

ہوگی جہاں

$$(۴) \quad ۱ + ۲ + ۳ = ۰$$

پس مخروطی کے مرکز کے محدد ۱ اور ۲ کی وہ قیمتیں ہیں جو مساواتوں (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتی ہیں۔

اس لیے مرکز نقطہ

$$\left( \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲} \right)$$

ہے۔ اگر ۱ = ۲ = ۰، تو مرکز کے محدد لامتناہی ہوتے ہیں اور اس لیے

منحنی ایک مکافی ہوتا ہے [دفعہ ۱۵۸]

لیکن اگر ۱ = ۲ = ۰، اور ۱ = ۲ = ۰، یعنی اگر

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

تو مساواتوں (۱) اور (۲) سے ایک ہی خط مستقیم تعبیر ہوتا ہے اور اس خط کا کوئی نقطہ مرکز ہے۔ اس صورت میں طریق متوازی خطوں کا ایک

زوج ہے۔

اوپر کی تحقیق میں محاور قائم یا مائل ہو سکتے ہیں۔

(۳) کے ذریعہ دکھائے جائیں گے۔  
آئندہ وہ نتائج جو مائل محوروں کے لیے درست رہتے ہیں علا

۱۶۹ - دفعہ ماسبق کی مساواتوں (۱) اور (۲) کو علی الترتیب ۱ اور ۲

سے ضرب دو اور مجموعہ کو (۴) کے بائیں جانبی رکن سے تفریق کرو تو

$$\text{ج} = \text{گ} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج} \dots \dots \dots (۵)$$

$$\text{گ} = \frac{\text{گ} - \text{ب} - \text{گ}}{۲} + \frac{\text{ف} - \text{ا} - \text{ف}}{۲} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{ا} - \text{ب} + \text{ج} + ۲ + \text{ف} - \text{ا} - \text{ف} - \text{ب} - \text{گ} - \text{ج}}{۲} \dots (۵)$$

یا مساواتوں (۱)، (۲) اور (۵) سے لا، ما کو ساقط کرنے پر فوراً حاصل ہوتا ہے

$$\left| \begin{array}{ccc} \text{گ} & \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ف} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{ن} & \text{ک} \end{array} \right| = \text{یعنی} \left| \begin{array}{ccc} \text{گ} & \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ف} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{ن} & \text{ک} \end{array} \right| - \text{ج} (\text{ا} - \text{ب} - \text{ج}) = ۰$$

$$(۲۳۰) \quad ۱۷۰ - \text{جملہ} (\text{ا} - \text{ب} + \text{ج} + ۲ + \text{ف} - \text{ا} - \text{ف} - \text{ب} - \text{گ} - \text{ج}) = \text{ج} \text{ کو بالعموم}$$

علامت  $\Delta$  سے تعبیر کیا جاتا ہے اور اس کو

$$\Delta = \text{لا} + \text{ما} + \text{ب} + \text{ا} + \text{گ} + ۲ + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج}$$

کا ممیزہ کہتے ہیں۔

$\Delta = ۰$  سے وہ شرط حاصل ہوتی ہے کہ مخروطی دو خطوط مستقیم ہو سکے۔

کیونکہ اگر  $\Delta$  صفر ہے تو ج صفر ہے اور اس صورت میں دفعہ ۲۸ کی مساوات (۳) دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔

یہ وہ شرط ہے جو ہم نے دفعہ ۳۷ میں معلوم کی تھی۔

$$۱۷۱ - \text{اُس مخروطی کے محوروں کا محل اور مقدار معلوم کرنا جسکی}$$

مساوات  $\Delta = \text{لا} + \text{ما} + \text{ب} + \text{ا} + \text{گ} + ۲ + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج} = ۰$  ہے۔

اگر ایک مخروطی کسی اہم مرکز دائرہ سے منقطع ہو تو نقاط تقاطع میں گزرنے والے قطر مخروطی کے محوروں کے ساتھ مساوی المیلان ہوں گے اور وہ منطبق ہونگے اگر دائرہ کا نصف قطر مخروطی کے کسی ایک نیم محس کے مساوی ہو۔

وہ خطوط جو مبدا میں سے اور مخروطی اور دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گذرتے ہیں مساوات

$$(1) \left( \frac{1}{r} - 1 \right) \text{ لا} + 2 \text{ لا} + \text{ما} + (\text{ب} - \frac{1}{r}) \text{ ما} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

سے حاصل ہوتے ہیں اگر دائرہ کی مساوات لا + ما = ر ہو۔  
یہ خطوط منطبق ہونگے اگر

$$(2) \left( \frac{1}{r} - 1 \right) (\text{ب} - \frac{1}{r}) - \text{لا} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

اور اس صورت میں وہ مخروطی کے محوروں میں سے ایک یا دوسرے پر منطبق ہونگے۔

پس مخروطی کے نیم محوروں کے طول مساوات (۲) کی اصلیں ہیں  
یعنی مساوات

$$(3) \frac{1}{r} - (\text{ب} + 1) + \frac{1}{r} + \text{ب} - \text{لا} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

کی اصلیں ہیں۔

اب (۱) کو  $(\frac{1}{r} - 1)$  سے ضرب دو، تب اگر  $\frac{1}{r}$  مساوات (۲) کی  
اصلوں میں سے کوئی ایک ہو تو

$$\left( \frac{1}{r} - 1 \right) \text{ لا} + 2 \text{ لا} + \text{ما} + (\text{ب} - \frac{1}{r}) \text{ ما} = 0$$

اس لیے (۴) میں مساوات (۳) کی کوئی ایک اصل درج کریں تو  
متناظر محور کی مساوات حاصل ہوگی۔

اوپر کی تحقیق میں ہم نے محوروں کو قائم فرض کیا ہے۔ لیکن اگر محور زیادہ  
سہ پر مائل ہوں تو اس قدرے ترمیم کرنی ہوگی کیونکہ نصف قطر کے دائرہ کی

مساوات  $لا + ۲ = ما + جم + سه + ۲ = را$  ہوگی۔

۱۷۲۔ ایک مکانی کا محور اور وترِ خاص معلوم کرنا۔

اگر مساوات

$لا + ۲ = ما + ۲ = لا + ۲ = ف + ما + ج = ۰$  ایک مکانی کو تعبیر کرے تو دوسرے درجہ کی ارقامِ کامل مربع ہوگی [دفعہ ۱۰۲]۔  
اس لیے مساوات

(۱)  $(ع + لا + ۲ = ما + ۲ = لا + ۲ = ف + ما + ج = ۰)$  کے مثل ہے جہاں  $ع = را$  اور  $۲ = ب$ ۔

(۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ خط  $ع + لا + ۲ = ما + ۲ = پر$  عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے خط  $لا + ۲ = ف + ما + ج = ۰$  پر کا عمود۔ ان خطوط کا علی القوام ہونا ضروری نہیں ہے لیکن ہم مساوات (۱) کو شکل

$(ع + لا + ۲ = ما + ۲ = لا + ۲ = ف + ما + ج = ۰)$  میں لکھ سکتے ہیں اور وہ دو خطوطِ مستقیم جن کی مساواتیں  
 $ع + لا + ۲ = ما + ۲ = ۰$  اور  $لا + ۲ = (ع + لا + ۲ = ف + ما + ج = ۰)$  ہیں علی القوام ہونگے اگر

$ع = (ع + لا + ۲ = ف + ما + ج = ۰)$  یا اگر  $لا = (ع + لا + ۲ = ف + ما + ج = ۰)$

اب

$ع + لا + ۲ = ما + ۲ = ۰$  اور  $لا + ۲ = (ع + لا + ۲ = ف + ما + ج = ۰)$  کو علی الترتیب لا اور ما کے نئے محور قرار دو تو حاصل ہوگا

$ما = ع + لا$

اور ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک مکانی کی مساوات ہے جو اس کے محور اور رأس پر کے تماس کے حوالے سے حاصل ہوتی ہے۔

وترِ خاص معلوم کر نیکیے لیے ہم مساوات کو شکل

(۲۳۲)

$$\left\{ \frac{2(ع-ل-گ) + 2(ب-ل-ف) + 2(ما+ل-ج)}{2(ع-ل-گ) + 2(ب-ل-ف) + 2(ما+ل-ج)} \right\} ع = \left( \frac{ع+ل+ب+ما+ل}{ع+ب} \right)$$

$$\frac{2(ع-ل-گ) + 2(ب-ل-ف) + 2(ما+ل-ج)}{ع+ب} = ع$$

میں لکھتے ہیں، پس  $ع =$  اس لیے (۱) مکانی ہے جس کا محور  
 $ع + ل + ب + ما + ل = ۰$

ہے اور جس کا وتر خاص

$$\frac{2(ع-ل-گ) + 2(ب-ل-ف) + 2(ما+ل-ج)}{ع+ب} = ۰$$

ہے کیونکہ  $ل = (ع+گ+ب-ف) \mid (ع+ب)$

۳۷۱۔ اب ہم ان مخروطیوں کا محل اور انکی نوعیت معلوم کریں گے  
 جن کی مساواتیں حسب ذیل ہیں:

$$(۱) \quad ۰ = ۲۰ - ۱۲ - ۲۳ + ۶ + ۱۱ + ۱۰$$

$$(۲) \quad ۰ = ۱۵ + ۲۰ - ۱۸ + ۶ + ۱۱ + ۱۰$$

$$(۳) \quad ۰ = ۸۱ + ۱۲۶ + ۱۱ - ۲۹ + ۲۴ + ۱۱ + ۱۰$$

$$(۴) \quad ۰ = ۱ - ۲۹ - ۱۲ - ۱۱ + ۱۱ + ۱۰$$

(۱) مرکزوں کو معلوم کرنے کے لیے مساواتیں [دفعہ ۱۶۸ (۱)، (۲)]

$$۰ = ۲۳ + ۱۱ - ۱۲$$

$$۰ = ۲ - ۱۲ + ۱۱$$

ہیں۔ ان سے  $۲ = ۱۱$  اور  $۳ = ۱۱$ ۔ اس لیے مرکز نقطہ (۳، ۲) ہے۔

مرکز میں سے گزرنیوالے متوازی محوروں کے حوالے سے معادلات [دفعہ ۱۶۹]

$$۰ = ۲۰ - ۲ \times ۱ - ۲ \times \frac{۲}{۳} + ۶ + ۱۱ + ۱۰$$

ہے 'یا'  $z - 4a + 6a^2 = 0$ ۔  
پس مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو نقطہ  $(2, 3)$  پر متقاطع ہوتے ہیں۔ وہ محور  $z$  کو وہاں قطع کرتے ہیں جہاں  $z - 4a + 6a^2 = 0$ ۔ یعنی جہاں  $z = 0$  اور یہاں  $z = \frac{5}{2}$ ۔

$$(2) \quad z - 5a + 8a^2 - 20a + 15 = 0$$

مرکز معلوم کر نیکے لیے مساواتیں

$$z - 5a + 8a^2 = 0 \text{ اور } z - 2a - 20 = 0$$

ہیں چنانچہ  $z = 5a$  اور  $z = 2a$ ۔

مرکز میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات

$$z - 5a + 8a^2 - 20a + 15 = 0$$

$$z - 5a + 8a^2 = 1$$

ہوگی۔

اس مخروطی کے نیم محور مساوات

(۲۳۳)

$$\frac{1}{r} - (1+b) \frac{1}{r} + 1b - 2 = 0 \quad [\text{دفعہ ۱۱، (۳)}]$$

کی اسلیں ہیں۔

$$0 = \frac{25}{r} - 1 + \frac{2}{r} - \frac{1}{r}$$

$$0 = 25 - r + 2 - 1$$

$$r = \frac{2}{2} - 1 = \frac{2}{2}$$

اس لیے نخی ایک زائد ہے جس کا حقیقی نیم محور  $\frac{1}{2}\sqrt{13}$  ہے اور خیالی نیم محور

$$\frac{1}{3}\sqrt{6} \text{ ہے۔}$$



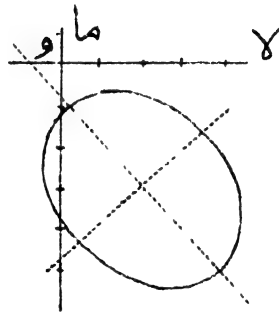


$$\frac{13}{36} = \frac{65}{180} = 1 + b \quad \text{کی اصلیں ہیں اور}$$

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{225} - \frac{29}{900} = 2 - b$$

$$0 = 13 - 32 + 2 + 2 = 0$$

اس لیے نیم محوروں کے مربع ۹ اور ۴ ہیں۔



محور اعظم کی مساوات [دفعہ ۱ (۳)]

$$0 = \frac{1}{15} + 2 \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{5} \right)$$

$$0 = 6 + 2$$

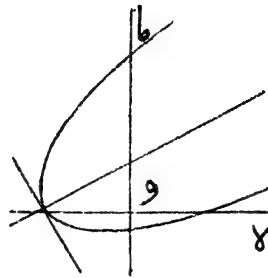
یا

$$0 = 1 - 6 + 2 - 2 (6 - 5) \quad (۴)$$

اس مساوات کو شکل

$$1 + 2 = (2 + 6 - 5) + (2 + 6 - 5) + (2 + 6 - 5) + (2 + 6 - 5)$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔



(۳۵)

خطوط  $0 = 1 + 12 + 5 - 12$

اور  $0 = 1 + 12 + 5 - 12$  علی القوم ہیں اگر

$0 = 1 + 12 + 5 - 12$

یعنی اگر  $1 = 1$

اس لیے دی ہوئی مساوات

(۱)  $\frac{1}{13} = \frac{1 + 12 + 5 - 12}{13}$

کے مماثل ہے۔ اس لیے کافی کے محور کی مساوات  $0 = 1 + 12 + 5 - 12$  ہے اور

اس پر کے مماس کی مساوات  $0 = 1 + 12 + 5 - 12$  ہے۔

منحنی کا ہر نقطہ صریحاً خط  $0 = 1 + 12 + 5 - 12$  کی مثبت جانب ہونا چاہئے کیونکہ مساوات (۱) کی دائیں جانب ہمیشہ مثبت ہے۔

۴۷۱۔ مخروطی کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرنا۔

ہم (دفعہ ۴۷۱ میں) دیکھ چکے ہیں کہ مخروطی کی مساوات اور متقاربوں کی

مساوات میں صرف ایک مستقل مقدار کا فرق ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات







$$r^2 - 2r - 20 = 0$$

ہے اور اس لیے  $r^2 = 60$  یا  $r^2 = 12$   
اس لیے مخروطی کی مساوات سادہ ترین شکل میں

$$1 = \frac{r^2}{12} - \frac{r^2}{60}$$

ہے۔

## نویں باب پر مثالیں

(۲۳۸)

۱۔ حسب ذیل منحنیوں کے مراکز معلوم کرو:

$$(1) \quad 3x^2 - 5x + 6y + 11 = 0$$

$$(2) \quad 3x^2 - 12x + 6y + 13 = 0$$

$$(3) \quad 3x^2 - 4x + 6y + 9 = 0$$

نیز مرکزوں میں سے گزرنے والے محوروں کے حوالے سے ان منحنیوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۲۔ حسب ذیل مساواتوں سے کون سے منحنی تعمیر ہوتے ہیں؟

$$(1) \quad 3x^2 - 4x + 6y + 9 = 0$$

$$(2) \quad 3x^2 - 12x + 6y + 13 = 0$$

$$(3) \quad 3x^2 - 4x + 6y + 9 = 0$$

$$(4) \quad 3x^2 - 12x + 6y + 13 = 0$$

$$(5) \quad 3x^2 - 4x + 6y + 9 = 0$$

۳۔ حسب ذیل منحنیوں کو مرتبہ کرو:

$$(1) \quad 3x^2 - 4x + 6y + 9 = 0$$

$$(2) \quad 3x^2 - 12x + 6y + 13 = 0$$

$$(3) \quad 3x^2 - 4x + 6y + 9 = 0$$

$$(4) \quad 3x^2 - 12x + 6y + 13 = 0$$

$$(۵) \quad ۰ = ۲ + ۶۲ + ۱۱۲ + ۲ (۶۳ + ۱۱۲)$$

$$(۶) \quad ۰ = ۱۱۲ + ۱۰۰ + ۲۰۰ + ۲ (۱۱۲ + ۱۰۰)$$

$$(۷) \quad ۰ = ۱۱۲ + ۱۰۰ + ۲۰۰ + ۲ (۱۱۲ + ۱۰۰)$$

۴۔ اگر ایک مخروطی کے دو وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں تو ثابت کرو کہ ان کا نقطہ تقاطع منحنی کا مرکز ہونا چاہیئے۔

۵۔ ثابت کرو کہ مخروطی

$$۱۰ = (۳ - ۶۲ + ۱۱۲) + (۱ + ۶۲ - ۱۱۲)$$

کے نیم محوروں کا حاصل ضرب اکائی ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ ناقص

$$۰ = ۴ + ۶۲ - ۱۱۲ + ۲ (۶۲ - ۱۱۲)$$

کے نیم محوروں کا حاصل ضرب  $\frac{۲}{۷}$  ہے اور اس کے محوروں کی مساوات

$$۰ = ۸ - ۶۲ + ۱۱۲ + ۲ (۶۲ - ۱۱۲)$$

ہے۔

۷۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

(۲۳۹)

$$۰ = ۹ + ۱۱۲ - ۱۰۰ - ۲ (۱۱۲ - ۱۰۰)$$

خطوط مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرے گی؟

۸۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کر جس کے متقارب خطوط ۱۱۲

+ ۶۲ - ۱۰۰ = ۵ اور ۱۱۲ + ۶۲ - ۱۰۰ = ۸ ہیں اور جو نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرتا ہے۔

$$۹۔ مخروطی ۳ - ۱۱۲ - ۱۰۰ + ۲ (۱۱۲ - ۱۰۰) = ۰$$

کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرو اور نیز اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جس کے متقارب وہی ہیں اور جو نقطہ (۲، ۲) میں سے گزرتا ہے۔

$$۱۰۔ زائد ۶ - ۱۱۲ - ۱۰۰ + ۲ (۱۱۲ - ۱۰۰) = ۰$$

کے متقارب معلوم کرو اور نیز مزدوج زائد کی مساوات معلوم کرو۔



۱۱۔ اگر  $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ لا} + ۸ \text{ لا} + ۹ \text{ لا} + ۱۰ \text{ لا} = ۱$  اور  $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ لا} + ۸ \text{ لا} + ۹ \text{ لا} + ۱۰ \text{ لا} = ۱$  ایک ہی مخروطی کو تعبیر کریں اور محاور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(۱ - ۱) (۱ - ۱) = (۱ - ۱) (۱ - ۱)$$

۱۲۔ ثابت کرو کہ محوروں کے تمام محلوں کے لیے بشرطیکہ وہ قائم رہیں

اور مبدأ نہ بدلے مساوات

$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ لا} + ۸ \text{ لا} + ۹ \text{ لا} + ۱۰ \text{ لا} = ۱$  میں  $۱$  گ  $۲$  ف  $۳$  گ  $۴$  ف  $۵$  گ  $۶$  ف  $۷$  گ  $۸$  ف  $۹$  گ  $۱۰$  ف کی قیمت مستقل رہتی ہے۔

۱۳۔ ایک دئے ہوئے خط کے کسی نقطہ سے دو دائروں میں سے ہر ایک کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وتر مماس کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک زائد ہے جس کے متقارب دئے ہوئے خط پر اور اس خط پر عمود ہیں جو دائروں کے مرکزوں کے ملتا ہے۔

۱۴۔ ایک متغیر دائرہ ہمیشہ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے اور ایک مخروطی کو نقطوں ف، ق، س، س پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$وف \times وق \times و س \times و س$$

(دائرہ کا نصف قطر)

مستقل ہے۔

۱۵۔ اگر  $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ لا} + ۸ \text{ لا} + ۹ \text{ لا} + ۱۰ \text{ لا} = ۱$  اور  $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ لا} + ۸ \text{ لا} + ۹ \text{ لا} + ۱۰ \text{ لا} = ۱$  دو مخروطیوں کی مساواتیں ہوں تو قائم محوروں کی کسی تبدیلی کی وجہ سے  $۱$  ب  $۲$  ب  $۳$  ب  $۴$  ب  $۵$  ب  $۶$  ب  $۷$  ب  $۸$  ب  $۹$  ب  $۱۰$  ب نہیں بدلیگا۔

۱۶۔ لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے قائم زائدوں لا، لا، لا، لا، لا، لا، لا، لا، لا، لا کے (۲۴۰)

راسوں کا طریق وہ منحنی ہے جس کی مساوات  $(۱ + لا) = (۱ - لا) = ۰$  ہے۔

۱۷۔ اگر  $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} + ۶ \text{ لا} + ۷ \text{ لا} + ۸ \text{ لا} + ۹ \text{ لا} + ۱۰ \text{ لا} = ۱$  دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ مبدأ سے ان کے نقطہ تقاطع کے فاصلہ کا مربع

$$(ج ۱ - گ ۲ + ب ج - ف ۱)$$

$$۱ ب - ۲ ھ$$

ہے۔  
۱۸۔ اگر  $۱ لا + ۲ ھ + ۱ ما + ۲ ب + ۱ گ + ۲ لا + ۲ ف + ۱ ج = ۰$  ایک  
تاقم زائد ہو تو ثابت کرو کہ اس کے متقاربوں کے حوالے سے  
اس کی مساوات  $۲ (۱ ب - ۲ ھ) + ۱ لا + ۱ ما = ۰$  ہوگی۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ مخروطی  $۱ لا + ۲ ھ + ۱ ما + ۲ ب + ۱ گ + ۲ لا + ۲ ف + ۱ ج = ۰$   
کے متقاربوں کی مساوات  
ب  $۱ لا - ۲ ھ + ۱ ما + ۱ ما = ۰$

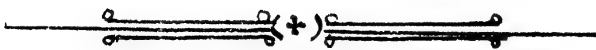
ہے جہاں  $۱ لا + ۲ ھ + ۱ ما + ۲ ب + ۱ گ + ۱ ما = ۱ لا + ۲ ب + ۱ ف$   
۲۰۔ ثابت کرو کہ وہ منحنی جو مساواتوں

$۱ لا = ۱ ت + ۲ ب + ۱ ج$  اور  $۱ ما = ۱ ت + ۲ ب + ۱ ج$   
سے حاصل ہوتا ہے مکافی ہے جس کا وتر خاص

$$(۱ ب - ۱ ب)$$

$$(۱ ۲ + ۱ ۲)$$

ہے۔



# دسواں باب

## متفرق مسائل

(۲۴۱)

۱۷۷۔ ہم (دفعہ ۱۶۷) میں ثابت کر چکے ہیں کہ وہ منحنی جو درجہ دوم کی مساوات سے تعبیر ہوتا ہے ہمیشہ ایک مخروطی ہوتا ہے۔  
ہم اس پورے باب میں مخروطی کی مساوات کو

$$x^2 + y^2 = 2ax + 2by + c$$

فرض کریں گے الا انکاس کے خلاف بیان کیا گیا ہو۔  
اس مساوات کے دائیں جانب جو جملہ ہے اس کو بعض اوقات علامت  
فہ (لا، ما) سے تعبیر کیا جائے گا۔

۱۷۸۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کر دو جو ایک مخروطی کے  
دونوں نقطوں میں سے گزرے اور نیز کسی نقطہ پر تماس کی مساوات  
معلوم کر دو۔

فرض کرو کہ مخروطی پر دو نقطے (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔

$$\text{مساوات}$$

$$x^2 + y^2 = 2ax + 2by + c$$

$$\{ (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2 \}$$

$$+ ب (ما - ما) (ما - ما) = (لا + لا) ۲ + ب ما + گ لا + ف ما + ج$$

(۱) . . . . .

کو مختصر کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ وہ درجہ اول کی مساوات ہے، اور اس لیے وہ کسی خاص خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر ہم مساوات (۱) میں  $لا = لا$  اور  $ما = ما$  رکھیں تو دائیں جانبی رکن تمامًا معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن کے معدوم ہونے کی وجہ یہ ہے کہ نقطہ (لا، ما) منحنی پر ہے۔ اس لیے نقطہ (لا، ما) خط مستقیم (۱) پر واقع ہے، اسی طرح نقطہ (لا، ما) بھی اس خط پر واقع ہے۔

پس نقطوں (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے گزرنے والے خط مستقیم کی مساوات (۱) ہے اور یہ مساوات

$$+ (لا + لا) + (ما + لا) + (لا + لا) + ب ما + (ما + ما)$$

$$+ گ لا + ف ما + ج = (لا + لا) + (لا + لا) + ب ما + ما + گ لا + ف ما + ج (۲)$$

میں تبدیل ہوتی ہے۔

نقطہ (لا، ما) ہم اس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات (۲) میں  $لا = لا$  اور  $ما = ما$  رکھتے ہیں چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$+ (لا + لا) + ۲ + (لا + لا) + ب ما + ما + گ لا + ف ما + ج = (لا + لا) + ب ما + ما$$

اس مساوات کے طرہ میں  $گ لا + ف ما + ج$  جمع کرو، تو چونکہ نقطہ (لا، ما) منحنی پر ہے اس لیے بائیں جانبی رکن معدوم ہوگا اور ہم اس کی مساوات شکل

$$+ (لا + لا) + (لا + لا) + ب ما + ما + گ لا + ف ما + ج = (لا + لا) + ب ما + ما$$

$$+ ج = . . . . . (۳)$$

میں حاصل ہوگی۔

یہ تعادل توجہ سے کہ نقطہ (لا، ما) پر کے ہم اس کی مساوات منحنی کی

مساوات سے اس طرح حاصل ہو جاتی ہے کہ لا کی بجائے لا لا، لا لا، لا لا کی بجائے لا لا، لا لا، لا کی بجائے لا لا، لا کی بجائے لا لا اور لا کی بجائے لا لا۔

۹۷۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک دیا ہوا خط مستقیم ایک مخروطی کا تماس ہو سکے۔

فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات

$$ل + لا + م + ن = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔

اُن خطوط مستقیم کی مساوات جو میدا کو اُن نقطوں سے ملاتے ہیں جہاں خط (۱) منحنی فہ (لا، ما) = کو قطع کرتا ہے مساوات (دفعہ ۳۸)

$$لا + لا + م + ب - ما - ۲ (گ + لا + ف + ما) \frac{لا + لا + م}{ن} + ج = \frac{لا + لا + م + ۲}{ن}$$

$$= ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔

اب اگر خط (۱) مخروطی فہ (لا، ما) = کا تماس ہے تو وہ مخروطی کو منطبق نقطوں پر قطع کرے گا اور اس لیے خطوط (۲) منطبق ہونے چاہئیں اس کے لیے شرط ہے

$$(۲۳۳) \quad (۱ن - ۲گ + ل + ن + ج + ل) (ب + ن - ۲ف + م + ن + ج + م)$$

$$= (۲ن - ۲ف + ز + ن - گ + م + ن + ج + ل + م)$$

$$یا \quad ل + ۲ (ب + ج - ن) + م + (ج + ل - گ) + (ن + ۲ (ب - ۲ف + م + ن) (گ - ف))$$

$$+ ۲ (ن + ل) (ف - گ + ب) + ۲ (م + ف - گ) = ۰ \dots \dots (۳)$$

اس مساوات (۳) کو شکل

۱. ل + ب + م + ج + ن + ۲ + ف + م + ن + ۲ + گ + ن + ل + ۲ + ھ + ل + م = ۰

(۴) . . . . .

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں سر (ب، ج وغیرہ منقطع

(۳) 

گ	ھ	ل
ن	ب	ھ
ج	ن	گ

میں ل، ب، ج وغیرہ کے ہم جزو نمبر بی ہیں۔

ثبوت دیگر۔ نقطہ (لا، ما) پر کا ماس

لا (لا + ھ + ما + گ) + ما (ھ + لا + ب + ما + ف) + گ (لا + ف + ما + ج) = ۰

ہے۔ یہ ماس دے ہوئے خط پر منطبق ہوگا اگر

لا + ھ + ما + گ - ل = ۰

ھ + لا + ب + ما + ف - ل = ۰

گ + لا + ف + ما + ج - ل = ۰

نیز چونکہ (لا، ما) دے ہوئے خط پر ہے اس لیے

ل + لا + م + ما + ن = ۰

پس لا، ما، لہ کو سا قذا کرنے پر حاصل ہوگا

= 

ل	ش	ھ	ل
م	ف	ب	ھ
ن	ج	ن	گ
۰	ن	م	ل

اس کو پھیلا یا جائے تو

۱. ل + ب + م + ج + ن + ۲ + ف + م + ن + ۲ + گ + ن + ل + ۲ + ھ + ل + م = ۰

۱۸۰۔ ایک محروطی کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی کی مساوات

معلوم کرنا۔

حسب دفعات ۷۶، ۱۰۰، یا ۱۱۹ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ قطبی کی مساوات اُسی شکل کی ہوتی ہے جو ماس کے مساوات کی ہے۔

پس نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات

$$لا لا + لا = (لا لا + لا ما) + ب ما + گ (لا لا) + ف (ما + ما)$$

$$+ ج = ۰$$

$$یا لا (لا لا + لا ما + گ) + ما (لا + ب ما + ف)$$

$$+ گ لا + ف ما + ج = ۰$$

ہے۔

مبدأ کے قطبی کی مساوات کو اوپر کی مساوات میں لا = ما = بھکر (۴) حاصل کیا جاتا ہے چنانچہ یہ مساوات

$$گ لا + ف ما + ج = ۰$$

ہے۔

۱۸۱۔ اگر دو نقطے 'ف' 'ق' ایسے ہوں کہ ایک مخروطی کے لحاظ سے 'ف' کے قطبی پر 'ق' واقع ہو تو اُسی مخروطی کے لحاظ سے 'ق' کے قطبی پر 'ف' واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ 'ف' کے محدد لا، ما اور 'ق' کے محدد لا، ما ہیں۔

'ف' کے قطبی کی مساوات ہے

$$لا لا + لا = (لا لا + لا ما) + ب ما + گ (لا لا) + ف (ما + ما)$$

$$+ ج = ۰$$

اب چونکہ نقطہ (لا، ما) 'ف' کے قطبی پر ہے اس لیے

$$لا لا + لا = (لا لا + لا ما) + ب ما + گ (لا لا) + ف (ما + ما)$$

$$+ ج = ۰$$

اس نتیجہ کے تشاکل سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ یہ وہ شرط بھی ہے کہ ق کا قطبی فن میں سے گزرے۔

اگر دو نقطوں فن، ق کے قطبی نقطہ میں سے قطبی فن ق کا قطب میں ہو گا۔ چونکہ ق، فن کے قطبی پر ہے اس لیے ق کا قطبی فن میں سے گزرے گا اور اسی طرح ق کا قطبی فن میں سے بھی گزرے گا اس لیے اس کو خط فن ق ہونا چاہئے۔

اگر مخروطی کا کوئی وتر ایک ثابت نقطہ ق میں سے کھینچا جائے اور اس وتر کا قطب فن ہو تو چونکہ ق، فن کے قطبی پر ہے اس لیے نقطہ فن ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہوگا یعنی ق کے قطبی پر۔

تعریف۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے دو نقطوں کو اس وقت مزدوج کہا جاتا ہے جبکہ ہر ایک دوسرے کے قطبی پر واقع ہو۔  
تعریف۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے دو خطوط مستقیم کو اس وقت مزدوج خطوط کہا جاتا ہے جبکہ ہر ایک دوسرے کے قطب میں سے گزرے۔  
مزدوج قطر حسب تعریف دفعہ ۱۲۷، مرکز میں سے گزرنے والے مزدوج خطوط ہوتے ہیں۔

ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ دو خطوط مستقیم

$$ل، لا + م، ن + م = ۰$$

$$ل، لا + م، م + ن = ۰$$

اور

مخروطی فن (لا، ما) = ۰ کے لحاظ سے مزدوج ہوں، طریقہ حسب ذیل ہے۔

فرض کرو کہ ل، لا + م، ن + م = ۰ کا قطب (لا، ما) ہے، پس ل، لا +

$$م، م + ن = ۰ وہی ہے جو$$

$$(لا، لا + م، م + ن) + (ما، ما + ب، ب + ف) + (گ، گ + ل، ل + ج) = ۰$$

ہے اور اس لیے

$$لا، لا + م، م + گ، گ - ل، ل = ۰$$

$$لا، لا + ب، ب + ف، ف - ل، ل = ۰$$



اور  
 گ لا + ف مار + ج - لہ ن =  
 اب اگر دے ہوئے خطوط مزدوج ہیں تو (لا، مار)  
 ل، لا + م، م + ن، ن =

پر ہے، اس لیے

ل، لا + م، م + ن، ن =  
 پس لا، مار، لہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے

و	ھ	گ	ل
گ	ب	ف	م
گ	ف	ج	ن
ل	م	ن	و

=

∴ (ل، ل + ب، م + ج، ن + ف، م) (م، ن + م، و)  
 + (ن، ل + ن، ل) ھ + (ل، م + ل، م) =

۱۸۲۔ اگر مخروطی کا کوئی وتر ایک نقطہ میں سے گذرتا ہوگا  
 کیسے بچا جائے تو وہ، منحنی اور و کے قطبی سے موسیقی طور پر منقطع ہوگا۔  
 فرض کرو کہ وف ق مرا کوئی وتر ہے جو منحنی کو ف، سے پراور و سے  
 قطبی کو ق پر قطع کرتا ہے۔

و کو مبدأ قرار دو اور خط وف ق مرا کو محور لا۔ فرض کرو کہ مخروطی  
 کی مسادات

و لا + ھ لا + ب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج =  
 ہے۔ جہاں ما = مخروطی کو قطع کرتا ہے  
 و لا + ۲ گ لا + ج =

∴  $\frac{1}{و ف} + \frac{1}{و م} = \frac{۱}{ج} - \frac{۱}{گ}$  ..... (۱)

و کے قطبی کی مساوات

$$گ + لا + ف + ج = ۰$$

ہے۔ اس لیے

$$\frac{۱}{وق} = - \frac{گ}{ج} \dots \dots \dots (۲)$$

(۱) اور (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{۱}{وق} = \frac{۱}{وفا} + \frac{۲}{وق}$$

۱۸۳۔ مخروطی کے متوازی وتروں کا ایک نظام کھینچا گیا ہے۔  
وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرنا۔

(۲۴۶)

فرض کرو کہ مخروطی پر دو نقطے (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔ ان نقطوں کو ملانے والے خط استقیم کی مساوات

$$۱ (لا - لا) (لا - لا) + ۲ (لا - لا) (لا - لا) + ۳ (لا - لا) (لا - لا) + \dots$$

$$+ ب (لا - لا) (لا - لا) = ۱ (لا - لا) + ۲ (لا - لا) + ۳ (لا - لا) + \dots$$

$$+ ج + \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔

(۱) میں لا کا سر ۱ (لا + لا) + ۲ (لا + لا) + ۳ (لا + لا) اور ما کا سر ۲ (لا + لا) + ۳ (لا + لا) + ۴ (لا + لا) ہے۔ پس اگر اوپر کا خط خط ما = م لا کے متوازی ہے تو

$$م = \frac{۱ (لا + لا) + ۲ (لا + لا) + ۳ (لا + لا) + \dots}{۲ (لا + لا) + ۳ (لا + لا) + ۴ (لا + لا) + \dots} \dots \dots \dots (۲)$$

اب اگر (لا، ما) اُس وتر کا وسطی نقطہ ہو جو نقطوں (لا، ما) اور (لا، ما) کو

ملا تا ہے تو  $۱۲ = ۱۱ + ۱$  ،  $۲۳ = ۲۱ + ۲$  اور اس لیے (۲) سے حاصل ہوتا ہے

یا  
جو مطلوبہ مساوات ہے -  
اگر خط (۳) کو شکل = م لا + ک میں لکھا جائے تو

$$\frac{m+1}{m+2} = \frac{1}{2}$$

۴۔

[نتیجہ بالا کو دفعات ۱۵۶ اور ۵۸ سے فوراً ماخوذ کیا جاسکتا ہے]

مثال ۱۔ مخروطی ۱ لا + ۲ ھ لا + ۱ ب = ۱ کے مساوی

مزدوج قطروں کی مساوات معلوم کرنا۔

ان خطوط مستقیم سے جو مخروطی کے مرکز اور مخروطی اور بی مرکز دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں مساوی قطر حاصل ہوتے ہیں۔ مخروطی اور دائرہ ل (لا + ۲ ھ لا + ۱ ب جم) = ۱ کے نقاط تقاطع میں سے خطوط

$$(۱ - ل) لا + ۲ (ھ - ل جم) لا + ۱ (ب - ل) = ۰$$

گزرتے ہیں۔ یہ خطوط مزدوج ہوں گے اگر

$$ب (۱ - ل) + ۱ (ب - ل) = ۲ (ھ - ل جم)$$

اس سے ل کی جو قیمتیں حاصل ہوں ان کو درج کرنے سے مطلوبہ مساوات

$$۱ لا + ۲ ھ لا + ۱ ب = \frac{۲ (۱ ب - ھ)}{۱ ب - ۲ ھ جم} (لا + ۲ ھ لا + ۱ ب جم) = ۰$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ کسی دوہم مرکز مخروطیوں میں بالعموم

مشترک مزدوج قطروں کا ایک اور صرف ایک زوج ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطیوں کی مساواتیں

$$۱ لا + ۲ ھ لا + ۱ ب = ۱ \text{ اور } ۲ لا + ۲ ھ لا + ۱ ب = ۱$$

ہیں۔

قطر (لا + ۲ ھ لا + ۱ ب = ۰ دونوں مخروطیوں کے لحاظ سے مزدوج ہوں گے اگر

$$۱ ب - ۲ ھ ھ + ۱ ب = ۰$$

$$۱ ب - ۲ ھ ھ + ۱ ب = ۰$$

اور

$$\frac{ب}{بھ - ب} = \frac{۵۲ - ۱}{۵۱ - ۱} = \frac{۱}{۵۰}$$

اس لیے مشترک مزدوج قطروں کی مساوات  
(۵۱ - ۱) (بھ - ب) + (۱ - ۱) (ب - ب) = ۰

ہے۔

چونکہ کسی دہم مرکز مخروطیوں میں مزدوج قطروں کا ایک زوج مشترک ہوتا ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی دہم مرکز مخروطیوں کی مساواتیں شکلوں

$$۱ + ب = ۱ + ب، ۱ + لا = ۱ + لا، ۱ + ب = ۱ + ب$$

میں تحویل کیجا سکتی ہیں۔

۱۸۵۔ اس خط مستقیم کا طول معلوم کرنا جو ایک دے ہوئے نقطہ سے دی ہوئی سمت میں کھینچنے پر مخروطی سے ملے۔

فرض کرو کہ (لا، ما) دیا ہوا نقطہ ہے اور اس میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ وہ نقطہ جو اس خط پر نقطہ (لا، ما) سے فاصلہ ر پر ہے (لا + رجم طہ، ما + رجب طہ) ہے، محاور علی القوام فرض کئے گئے ہیں۔ اگر یہ نقطہ مخروطی ف (لا، ما) پر ہو تو

$$۱ (لا + رجم طہ) + ۲ (لا + رجم طہ) (ما + رجب طہ) + ب (ما + رجب طہ) = ۰$$

$$+ ۲ گ (لا + رجم طہ) + ۲ ف (ما + رجب طہ) + ج = ۰$$

$$یا ۲ (لا + رجم طہ) + ۲ جب طہ + ب جب طہ + ۲ رجم طہ (لا + لا + ما + گ) = ۰$$

$$+ ۲ رجب طہ (لا + ب + ما + ف) + ف (لا، ما) = ۰$$

اس دو درجی مساوات کی اصلیں ر کی مطلوبہ دو قیمتیں ہیں۔  
اب اگر نقطہ (لا، ما) اس وتر کا نقطہ وسطی ہو جو مخروطی خط پر قطع کرتا ہے تو ر کی

دو قیمتیں جو اوپر کی مساوات سے حاصل ہوں گی مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہونگی۔ اس لیے رکاسر معدوم ہونا چاہیے چنانچہ

(ا لا + ہ ما + گ) جم ط + (ہ لا + ب ما + ف) جب ط = ۰  
پس اگر دتروں کو ہمیشہ ایک مستقل سمت میں کھینچا جائے یعنی ط مستقل  
ہو تو ان کے وسطی نقطوں کا طریق [دفعہ ۱۸۳]

$$۱ لا + ہ ما + گ + (ہ لا + ب ما + ف) مس ط = ۰$$

ہے۔

۱۸۶۔ وہ مستطیل جو اُس دتر کے مقطوعوں سے بنتا ہے جو نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتا ہے اور محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے رکی ان دو قیمتوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے جو دفعہ ۸۵ کی دو درجی مساوات سے حاصل ہوتی ہیں چنانچہ وہ (مستطیل)

فہ (لا، ما)

$$۱ جم ط + ۲ ہ جب ط + ب جب ط$$

کے مساوی ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر اُسی نقطہ (لا، ما) میں سے دوسرا دتر کھینچا جائے اور یہ دتر محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو اس دتر کے مقطوعوں کا مستطیل

فہ (لا، ما)

$$۱ جم ط + ۲ ہ جب ط + ب جب ط$$

ہوگا۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہوئے کسی مخروطی کے دو دتر دی ہوئی سمتوں میں کھینچے جائیں تو دتروں کے مقطوعوں کے مستطیلوں کی نسبت تمام نقطوں کے لیے (بشمول مخروطی کے مرکز کے) مستقل ہوتی ہے چنانچہ یہ نسبت مخروطی کے متوازی قطروں کے مربعوں کی نسبت مساوی ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح ۲۔ ان دو ماسوں کی نسبت جو کسی نقطہ سے مخروطی پر

کھینچے جائیں مخروطی کے متوازی قطروں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔  
 نتیجہ صریح ۳۔ اگر نقطہ (لا، ما) میں سے ایک وتر کھینچا جائے  
 جو محور لا کے ساتھ وہی زاویہ بنا لے تو اس وتر کے مقطوعوں کا مستطیل  
 فہ (لا، ما)

۱ جم طہ + ۲ جب طہ جم طہ + ب جب طہ

ہوگا۔  
 پس کسی دو متوازی وتروں کے مقطوعوں کے مستطیلوں کی نسبت  
 جبکہ وتر دو ثابت نقطوں (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے کھینچے جائیں مستقل  
 ہوتی ہے چنانچہ یہ نسبت فہ (لا، ما) کے مساوی ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح ۴۔ اگر ایک مخروطی کو ایک دائرہ چار نقطوں  
 ف، ق، س، س پر قطع کرے تو خط ف ق جو ان نقطوں میں سے کسی  
 دو کو ملائے اور خط س س جو دیگر دو نقطوں کو ملائے مخروطی کے محور کے ساتھ  
 مساوی زاویے بناتے ہیں۔

کیونکہ اگر ف ق اور س س، ت پر ملیں تو مستطیل ت ف  
 x ت ق اور ت س x ت س مساوی ہیں جس کی وجہ یہ ہے کہ  
 چاروں نقطے مخروطی پر ہیں۔ اس لیے نتیجہ صریح ۱ کی رُو سے مخروطی کے متوازی  
 قطر مساوی ہیں اور اس لیے وہ مخروطی کے ایک محور کے ساتھ مساوی طور پر  
 ما ل ہونے چاہئیں [دیکھو دفعہ ۱۳۶]۔

مثال ۱۔ اگر ایک مثلث ایک مخروطی کو محیط کرے تو وہ تین خطوط  
 جو مثلث کے راسوں کو مقابل کے اضلاع کے نقاطِ تماس کے ساتھ ملاتے ہیں  
 ایک نقطہ پر ملیں گے۔

فرض کرو کہ مثلث کے راس ۱، ب، ج ہیں اور مقابل کے اضلاع کے  
 نقاطِ تماس ۱، ب، ج۔ نیز فرض کرو کہ مثلث کے ضلعوں کے متوازی مخروطی  
 کے نیم قطروں کے طول ۱، ۲، ۳ ہیں۔ تب

ب : ا : ج = ر : ر = ج : ا = ر : ر

ا : ج : ا = ب : ر : ر

ب : ا : ج = ب : ا : ج = ا : ج : ب  
جس سے ظاہر ہے کہ تینوں خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں کیونکہ ا : ب : ج  
ایک خطِ مستقیم پر نہیں ہو سکتے۔

مثال ۲۔ اگر ایک مخروطی ایک مثلث کے اضلاع کو علی الترتیب  
نقطوں ا اور ا، ب اور ب، ج اور ج پر قطع کرے تو

ب : ا : ج = ب : ا : ج = ا : ج : ب

= ب : ج : ب = ج : ا : ج = ا : ب : ا

(کارنو کا مسئلہ)

[ب : ا : ج = ب : ج : ب = ر : ر = ج : ا : ج اور علیٰ ہذا دوسروں کیلئے

ر : ر = ر : ر = ج : ا : ج کے وہ نیم قطر ہیں جو مثلث کے اضلاع کے متوازی ہیں]  
مثال ۳۔ اگر ایک مخروطی ایک کثیر مثلثی ا : ب : ج د... کے  
تمام ضلعوں کو مس کرے اور اضلاع ا : ب : ج... کے نقاطِ تماس  
ف : ق : س، س : ق : س، ق : ف : س ہوں تو

ا : ف : ب = ب : ق : ج = ج : س : د = د : س : ق = ق : ف : ا

..... د : س : ق

۱۸۷۔ اگر مساوات

ا : لا : لا = ب : لا : لا = گ : لا : لا = ف : لا : لا =

کے دائیں بائیں رکن کو اختصاراً س لکھا جائے اور

ا : لا : لا = ب : لا : لا = گ : لا : لا = ف : لا : لا =



کے دائیں جانبی رکن کو  $س$  کو لکھا جائے تو  $س$ ۔ لے  $س$  = . ایک ایسے مخروطی کی مساوات ہوگی جو مخروطیوں  $س$  = . اور  $س$  = . کے مشترک نقطوں میں سے گزرے گا۔

کیونکہ مساوات  $س$ ۔ لے  $س$  = . دوسرے درجہ کی ہے اور اسلئے ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے۔ نیز اگر کوئی نقطہ دئے ہوئے دونوں مخروطیوں ہو تو اس کے محدود دونوں مساواتوں  $س$  = . اور  $س$  = . کو پورا کریں گے اور اس لئے وہ مساوات  $س$ ۔ لے  $س$  = . کو بھی پورا کریں گے۔

لہٰذا کوئی مناسب قیمت دیکر مخروطی  $س$ ۔ لے  $س$  = . سے کوئی اور شرط پوری کرائی جاسکتی ہے۔

پس  $س$ ۔ لے  $س$  = . ایک ایسے مخروطی کی عام مساوات ہے جو دو دئے ہوئے مخروطیوں  $س$  = . اور  $س$  = . کے مشترک نقطوں میں سے گزرتا ہے۔

اگر مخروطی  $س$  = . دو خطوط متقیم کو تعبیر کرے جنکی مساواتیں  $ل$  لاہم  $ا$  = . اور  $ل$  لاہم  $م$  ماہن = . ہیں جن کو ہم اختصاراً  $ع$  = . اور  $و$  = . لکھیں گے تو  $س$ ۔ لے  $و$  = . ایک ایسے مخروطی کی عام مساوات ہوگی جو ان نقطوں میں سے گزرے گا جہاں خطوط  $ع$  = . اور  $و$  = . مخروطی  $س$  = . کو قطع کرتے ہیں۔

اب اگر خط  $و$  = . خط  $ع$  = . کی جانب حرکت کر کے بالآخر اس پر منطبق ہو جائے تو مساوات  $س$ ۔ لے  $ع$  = . لے  $ع$  = . کی تمام قیمتوں کے لئے ایک ایسے مخروطی کو تعبیر کرے گی جو مخروطی  $س$  = . کو منطبق نقطوں کے دونوںوں پر قطع کرے گا یعنی وہاں جہاں  $س$  = . سے خط  $ع$  = . ملتا ہے۔ اس کا

یہ مطلب ہے کہ  $س$ ۔  $لہ$   $ء$ ۔ ایک مخروطی ہے جو  $س$ ۔ = کو ان دو نقطوں پر  $س$  کرتا ہے جہاں  $س$ ۔ =، خط  $ء$ ۔ سے منقطع ہوتا ہے۔  
مثال ۱۔ دو قائم زائد کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے تمام مخروطی

قائم زائد ہوتے ہیں۔

اگر قائم زائد کی مساداتیں  $س$ ۔ = اور  $س$ ۔ = ہوں تو وہ تمام مخروطی جو ان کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں مسادات  $س$ ۔ =  $لہ$   $س$ ۔ = میں شامل ہیں۔  
اب  $س$ ۔ =  $لہ$   $س$ ۔ = میں لا اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہوگا کیونکہ  $س$ ۔ = اور  $س$ ۔ = میں یہ مجموعہ صفر ہے، محاور قائم فرض کئے گئے ہیں۔ اس سے مسئلہ ثابت ہے۔

اس کی حسب ذیل مخصوص صورتیں ہیں:

(۱) اگر دو قائم زائد چار نقطوں پر متقاطع ہوں تو ان میں سے کسی دو نقطوں کو ملائیں اور باقی دو نقطوں کو ملائے والے خط مستقیم پر عمود ہوگا۔ (کیونکہ خطوط کا زوج نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہوا مخروطی ہے)۔

(۲) اگر ایک قائم زائد ایک مثلث کے راسوں میں سے گزرے تو وہ مرکز عمودی میں سے بھی گزرے گا۔ (کیونکہ اگر مثلث کے راس  $ا$ ،  $ب$ ،  $ج$  ہوں اور راس  $ا$  سے  $ب$  پر کھینچا ہوا عمود مخروطی کو  $د$  پر قطع کرے تو خطوط  $ا$ ،  $ب$ ،  $ج$  کا زوج ایک قائم زائد ہے کیونکہ یہ خطوط علی القوائم ہیں۔ اس لیے زوج  $ب$ ،  $د$ ،  $ج$  بھی ایک قائم زائد ہے یعنی یہ خطوط علی القوائم ہیں۔)

مثال ۲۔ اگر دو مخروطیوں کے محاور متوازی ہوں تو ان کے نقاط تقاطع میں سے ایک دائرہ گزرے گا

محدوں کے محوروں کو مخروطیوں کے محوروں کے متوازی لو تو ان کی مساداتیں ہوں گی

$$لا + ب + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$$



قطر اور اس کے مزدوج کو محاور قرار دو تو مخروطی کی مساوات ۱ لا<sup>۲</sup>  
 + ب ما<sup>۲</sup> = ا ہوگی۔ فرض کرو کہ دتروں کی مساواتیں ما-م (لا-ج) = ۰ اور  
 ما-م (لا+ج) = ۰ ہیں۔ اب ان کے سروں میں سے گزرنے والے کسی  
 مخروطی کی مساوات

$$۱ لا^۲ + ب ما^۲ - ا ل = ل (ما-م (لا-ج) ) \{ ما-م (لا+ج) \} = ۰$$

سے حاصل ہوگی۔

محور لا اس مخروطی کو ان نقطوں پر قطع کرتا ہے جو لا<sup>۲</sup> - ا ل م م (لا-ج) =  
 سے حاصل ہوتے ہیں اور لا کی یہ دو قیمتیں سرکجا مساوی اور مختلف علامت  
 ہیں خواہ ل، م، اور م کچھ ہی ہوں۔

مخصوص صورت میں اگر ق اور ف س ق اور ف س ق، ایک مخروطی  
 کے دو ماسکی وتر ہوں تو خطوط ف اور ق ق، محور کو مرکز سے متساوی الفضل  
 نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔

مثال ۵۔ اگر ایک دائرہ اور ایک مخروطی میں دو ہر تاس ہو تو  
 وتر تاس محوروں میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی ہوتا ہے۔

کیونکہ اگر لا<sup>۲</sup> + ب ما<sup>۲</sup> - ا ل = ل (لا+م+ن) = ۰ ایک دائرہ ہو تو  
 لا کا سر صفر ہے اور اس لیے ل یا م صفر ہے۔

مثال ۶۔ اگر دو دائرے ایک مخروطی کے ساتھ دو ہر تاس رکھیں  
 اور وتر تاس متوازی ہوں تو دائروں کا بنیادی محور تاس کے ان دتروں کے  
 درمیان وسط میں ہوگا۔

دائرہ

$$۱ لا^۲ + ب ما^۲ - ا ل + (ب-۱) (لا-د) = ۰$$

$$۱ لا^۲ + ب ما^۲ - ا ل + (ب-۱) (لا-د) = ۰$$

$$۲ لا - د - د = ۰$$

کا بنیادی محور

ہے۔







۱۹۰۔ مخروطی کے مرتب دائرہ کی مساوات معلوم کرنا۔ (۲۵۵)

اُن ماسوں کی مساوات جو (لا، ما) سے مخروطی نہ (لا، ما) = ۰ کے  
کھینچے گئے ہوں

$$(1 + لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا) = ۰$$

$$= (1 + لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا) = ۰$$

ہے۔ یہ دو ماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں گے اگر مساوات بالا  
لا اور ما کے سرور کا مجموعہ صفر ہو۔ اس کے لیے ضرورت ہے کہ

$$(1 + لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا) = ۰$$

$$= (1 + لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا) = ۰$$

اس لیے نقطہ (لا، ما) اُس دائرہ پر ہے جس کی مساوات

$$(1 + لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا) = ۰$$

یا ج لا + ج ما - ۲ لا - ۲ ما + ۱ = ۰، ... (۱)  
ہے جہاں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'ف'، 'گ'، 'ھ' کے وہی معنی ہیں جو دفعہ ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴  
بیان کئے جا چکے ہیں۔

اگر ھ = ۱، ا = ۱، تو اوپر کی مساوات

$$۲ لا + (ب - گ - ف + ھ) + ۲ ما + (ف - ھ - گ) + ج + (ا + ب) - ف - گ = ۰$$

یا ۲ لا + ۲ ف - ما - ۱ - ب = ۰، ... (۲)  
میں تحویل ہوتی ہے۔

اس صورت میں مخروطی ایک مکافاتی ہے اور (۲) مرتب کی مساوات ہے

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ منحنی

$$۱۱ لا + ۲۴ لا + ۱۴ ما - ۲ لا + ۱۶ ما + ۱۱ = ۰$$



کے مرتب دائرہ کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ + لا۲ - لا۲ = ما۲$$

۴۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ مکافی

$$لا^۲ + لا۲ + ما۲ - لا۲ = ما۲ - ما۲ + لا۲ - لا۲ = ۰$$

کے مرتب کی مساوات  $لا۲ - لا۲ = ۰$  ہے۔

۱۹۱۔ ثابت کرو کہ ایک مرکزدار مخروطی میں چار اور صرف چار ماسکے (۲۵۷)

ہوتے ہیں جن میں سے دو حقیقی ہوتے ہیں اور دو خیالی۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$لا^۲ + ب۲ - ما^۲ = ۰ \quad (۱)$$

۵۔

فرض کرو کہ ایک ماسکے (لا، ما) ہے اور نظیری مرتب کی مساوات

لاجم ع + ماجب ع - ع = ۰ ہے۔ اگر مخروطی کا خروج المکرز ہو تو مخروطی کی مساوات ہوگی

$$(لا - لا) + (ما - ما) - ز = (لاجم ع + ماجب ع - ع) = ۰ \quad (۲)$$

چونکہ (۱) اور (۲) ایک ہی منحنی کو تعبیر کرتے ہیں اور (۱) میں لا، ما کا

صفر ہے اس لیے (۲) میں لا، ما کا سر صفر ہونا چاہیے پس ع صفر ہے

یا  $\frac{۲}{۲}$ ۔

اس لیے ایک مرتب، محوروں میں ایک یا دوسرے کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ ع = ۰۔ تو چونکہ (۱) میں لا اور ما کے سر صفر ہیں اس لیے

ما = ۰ اور لا = ز ع۔ نیز (۱) اور (۲) میں دوسرے سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\frac{۱ - ۱}{لا - ز ع} = \frac{ب}{۱} = \frac{۱}{ز - ۱}$$

$$\text{نہ} \quad \sqrt{1 - \frac{1}{b}} = z \quad (۳) \dots\dots\dots$$

$$(۴) \dots\dots\dots \text{ع لا} = 1$$

$$\text{اور} \quad \text{لا}^2 = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \quad (۵) \dots\dots\dots$$

(۵) سے ہم دیکھتے ہیں کہ محور لا پر دو ماسکے ہیں جن کے فاصلے

مرکز سے  $\pm \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$  ہیں۔ (۴) سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک مرتبہ نظیری ماسکہ کا قطبی ہے۔

اگر  $e = \frac{c}{a}$  تو اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ محور ما پر دو ماسکے

ہیں جن کے فاصلے مرکز سے  $\pm \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$  ہیں۔ ماسکوں کے ان دو

زوجوں میں سے ایک صرفاً حقیقی ہے اور دوسرا خیالی خواہ  $a$  اور  $b$  کی قیمتیں (حقیقی) کچھ ہی ہوں۔

محور لا پر کے ایک ماسکہ کے حوالے سے محروطی کا خروج المرکز

(۲۵۷)

حسب مساوات (۳)  $\sqrt{1 - \frac{1}{b}}$  کے مساوی ہے اسی طرح محور ما پر کے

ایک ماسکہ کے حوالے سے خروج المرکز  $\sqrt{1 - \frac{1}{a}}$  ہوگا۔ اگر منفی ناقص ہے

تو  $a$  اور  $b$  کی علامت ایک ہی ہوگی اور ان میں سے ایک خروج المرکز

حقیقی اور دوسرا خیالی ہوگا۔ لیکن اگر منفی ایک زائد ہو تو

$a$  اور  $b$  کی علامتیں مختلف ہونگی اور دونوں خروج المرکز حقیقی ہونگے۔

کسی محروطی میں اگر  $z$  اور  $z'$  خروج المرکز ہوں تو

$$1 = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-1}$$

۱۹۲۔ درجہ دوم کی عام مساوات سے تعبیر شدہ مخروطی کا خروج المرکز معلوم کرنا۔

محوروں کو بدلنے سے ہم مخروطی کی مساوات کو شکل

$$(۱) \quad \text{عہ لاً} + \text{بہ ما} + \text{جہ} = ۰ \quad \dots \dots \dots$$

میں تحویل کر سکتے ہیں۔

اگر مخروطی کا ایک خروج المرکز ز ہو تو

$$(۲) \quad \text{عہ} = \text{بہ} (۱ - z^2) \quad \dots \dots \dots$$

لیکن (دفعہ ۵۲) ہم جانتے ہیں کہ

$$(۳) \quad \text{عہ} + \text{بہ} = ۱ + \text{بہ} \quad \dots \dots \dots$$

$$(۴) \quad \text{عہ} - \text{بہ} = ۱ - \text{بہ}^2 \quad \dots \dots \dots$$

مساواتوں (۲)، (۳) اور (۴) سے عہ اور بہ کو ساقط کرنے پر

$$\frac{(1 - z^2)}{1 - \text{بہ}^2} = \frac{(1 + \text{بہ})}{1 - \text{بہ}^2}$$

$$(۵) \quad \dots \dots \dots \quad \text{یا} \quad z^2 + \frac{(1 - \text{بہ})^2}{1 - \text{بہ}^2} = (1 - z^2) \quad \dots \dots \dots$$

اگر منحنی ایک ناقص ہے تو  $1 - \text{بہ}^2$  مثبت ہے اور  $z^2$  کی قیمت

مثبت ہے اور دوسری منفی۔  $z^2$  کی حقیقی قیمت ناقص کا وہ خروج المرکز ہے

(۲۵۸) جو ایک حقیقی ماسکہ کے حوالے سے ہوتا ہے اور خیالی قیمت وہ خروج المرکز ہے جو خیالی ماسکہ کے حوالے سے ہوتا ہے۔

اگر منحنی ایک زائد ہے تو  $z^2$  کی دونوں قیمتیں حقیقی ہیں اور اس لیے

دونوں خروج المرکز حقیقی ہیں جیسا کہ دفعہ ۱۹۰ میں معلوم ہو چکا ہے۔

اس لیے ان دو خروج المرکزوں میں تمیز پیدا کرنا چاہیے۔

(۱) میں عہ اور بہ کی علامتیں مختلف ہوتی ہیں جبکہ منحنی زاہد ہوتا ہے اور اگر عہ کی علامت جہ کی علامت سے مختلف ہو تو حقیقی ماسکے محور لا بہ واقع ہوں گے۔ پس حقیقی ماسکے کے حوالے سے خروج المرکز معلوم کرنیکے لیے (۳) اور (۴) سے عہ اور بہ کی قیمتیں حاصل کرو تو (۲) سے مطلوبہ خروج المرکز معلوم ہوگا اگر عہ کی وہ قیمت لجائے جس کی علامت جہ کی علامت سے مختلف ہے۔

مثال۔ اُس مخروطی کا خروج المرکز معلوم کرو جس کی مساوات ہے

$$لا - ۴ لا م - ۲ م + ۱۰ لا + ۴ م = ۰$$

مرکز کے حوالے سے مساوات لا - ۴ لا م - ۲ م + ۱۰ لا + ۴ م = ۰ ہے۔ یہ عہ لا + یہ م - ۱ = ۰ ہو جائے گی جہاں عہ + یہ = -۱ اور عہ = -۲ پس عہ = ۲ اور بہ = -۳۔ حقیقی ماسکے کے حوالے سے خروج المرکز مساوات ۳ - (۱ - ز) سے حاصل ہوگا، اس لیے  $ز = \frac{5}{3}$ ۔

۱۹۳۔ مخروطی کے ماسکے اور مرتب کی تعریف سے مخروطی کے ماسکے، مرتب، اور خروج المرکز حسب ذیل طریقہ پر فوراً معلوم کئے جاسکتے ہیں: اگر (عہ، بہ) ایک ماسکے ہے تو مخروطی

$$لا + ۲ لا م + م + ب + ۲ گ لا + ۲ ف م + ج = ۰ \therefore (۱)$$

بموجب تعریف

$$(لا - عہ) + (ما - یہ) - (ل لا + م م + ن) = ۰ \dots (۲)$$

کے مماثل ہے جہاں نظیری مرتب ل لا + م م + ن = ۰ ہے اور خروج المرکز  $ز = لا + م$  سے حاصل ہوتا ہے۔

(۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے پر

$$لا - ۱ = لا، ل م = ل م، م - ۱ = م، ل ب = ل ب$$

$$ل ن + عہ = ل گ، م ن + بہ = ل ف، ن - عہ = یہ، ل ج = ل ج$$

پس

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لہ (اے + ہ + گ) = ل (ل + ع + م + ہ + ن)} \\ \text{لہ (ع + ہ + ب + ف) = م (ل + ع + م + ہ + ن)} \\ \text{لہ (گ + ع + ف + ہ + ج) = ن (ل + ع + م + ہ + ن)} \end{array} \right. \dots (۱)$$

نیز

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لہ (۱ - ہ) = ل - م} \\ \text{لہ = ل - م} \end{array} \right. \dots (ب)$$

۱۔ ماسکے - مساواتوں (۱) کو ترتیب وار ع، ہ، ا سے ضرب دو اور جمع

کرو تو

$$\text{لہ (ل + ع + م + ہ + ن) = لہ (ع + ہ)}$$

نیز

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لہ (ل + ع + م + ہ + ن) = لہ (اے + ہ + گ) - (ع + ہ + ب + ف)} \\ \text{اور لہ (ل + ع + م + ہ + ن) = لہ (اے + ہ + گ) - (ع + ہ + ب + ف)} \end{array} \right.$$

اس لیے مساواتوں (ب) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لہ (اے + ہ + گ) - (ع + ہ + ب + ف)}$$

$$\text{ب - ۱} \\ \text{لہ (اے + ہ + گ) - (ع + ہ + ب + ف)} =$$

اس لیے ماسکے دو مخروطیوں کے نقاط تقاطع ہیں جو مساواتوں

$$\text{لہ (اے + ہ + گ) - (ع + ہ + ب + ف)}$$

$$\text{ب - ۱} \\ \text{لہ (اے + ہ + گ) - (ع + ہ + ب + ف) = لہ (اے + ہ + گ) - (ع + ہ + ب + ف)}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

## ۲۔ مرتب

مساواتوں (۱) سے  $\Delta$  اور  $\Delta$  کو سا قفا کرنے سے

$$= \begin{vmatrix} \Delta - 1 & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta - 1 & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta - 1 & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta - 1 & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta - 1 \end{vmatrix}$$

یعنی  $\Delta \times \Delta - (\Delta + \Delta + \Delta) = \Delta^2 - 3\Delta = \Delta(\Delta - 3)$

$$= \Delta(\Delta - 3)$$

جس میں  $\Delta$  کا سر اور مستقل رقم صفر ہیں۔

پس (ب) سے

$$\frac{\Delta}{\Delta - 3} = \frac{\Delta - 3}{\Delta} = \frac{\Delta + \Delta + \Delta}{\Delta}$$

ان مساواتوں سے نسبتیں  $\Delta : 3 : \Delta$  ملتی ہیں جن سے مرتب متعین ہوتے ہیں۔

## ۳۔ خروج المکرز۔

$$\Delta(1 + \Delta) = \Delta + \Delta^2 = 2 - \Delta^2 \text{ کیونکہ } \Delta^2 = \Delta + \Delta^2$$

$$\Delta(1 + \Delta) = \Delta + \Delta^2 = 2 - \Delta^2 \text{ اور } \Delta(1 + \Delta) = \Delta + \Delta^2 = 2 - \Delta^2$$

$$\Delta(1 + \Delta) = \Delta + \Delta^2 = 2 - \Delta^2$$

۱۹۴۔ مخروطی کی مساوات جبکہ ماسک کو مبدا پر لیا گیا ہو لا  $\Delta + \Delta^2 = \Delta(1 + \Delta) = \Delta + \Delta^2 = 2 - \Delta^2$  میں سے کوئی ایک، مخروطی سے منطبق نقطوں پر ملتا ہے پس ماسک سے مخروطی کے ماس خیالی خطوط لا  $\Delta + \Delta^2 = \Delta(1 + \Delta) = \Delta + \Delta^2 = 2 - \Delta^2$  ہیں

یعنی

$$لا + ما = ۰$$

ان ماسوں کا وتر تاس نظیری مرتب ہے۔  
چونکہ ماسکے سے کھینچے ہوئے ماسوں کی مساوات مرتب کے محل پر  
منحصر نہیں ہوتی اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر مخروطیوں میں ایک ماسکے  
مشترک ہو تو ان کے دو خیالی ماس مشترک ہوتے ہیں اور یہ کہ ہم ماس  
مخروطیوں میں چار مشترک ماس ہوتے ہیں۔

اب اگر محدودوں کے مبدا اور محوروں کو کسی طریقہ پر بدل جائے لیکن  
وہ قائم رہیں تو ایک ماسکے سے کھینچے ہوئے ماسوں کی مساوات  

$$لا + ما = ۰$$
 سے بدل کر  $لا + ما + ۲ گ + ۲ ف + ۲ ج = ۰$   
ہو جائے گی۔

پس ایک مخروطی کے ماسوں کی مساوات جبکہ ماس ایک  
ماسکے سے کھینچے گئے ہوں ان شرطوں کو پورا کرتی ہے جو ایک  
دائرہ کے لیے ہیں۔

اس کے بالعکس اگر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے مخروطی کے  
ماسوں کی مساوات دائرہ کی شرطوں کو پورا کرے تو نقطہ ایک  
ماسکے ہونا چاہیے۔

دائرہ نقطے لاتنا ہی پر۔ وہ خطوط جو مبدا سے کسی دائرہ پر  
لاتنا ہی پر کے نقطوں تک کھینچے گئے ہوں مساوات  $لا + ما = ۰$  سے حاصل

ہوتے ہیں، اس لیے تمام دائروں میں لاتنا ہی پر دو خیالی مشترک نقطے ہوتے ہیں۔ ان نقطوں کو ماسکہ نما کہتے ہیں۔  
 اوپر کے بیان سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی مخروطی کے حقیقی ماسکوں سے کھینچے ہوئے ماس ایک خیالی ذواربعۃ الافلاک کے اضلاع ہیں جس کے دوسرے دو متقابلہ راس ماسکہ نما ع اور جے ہیں اور دوسرے دو متقابلہ راس مخروطی کے خیالی ماسکے ہیں۔  
 پس وہ مساوات جس سے مخروطی کے ماسکے اور مرتب حاصل ہوتے ہیں حسب ذیل طریقہ پر معلوم کیجا سکتی ہے۔

۱۔ ماسکے معلوم کرنا۔

نقطہ (لا، ما) سے مخروطی فہ (لا، ما) کے ماسوں کی مساوات  
 (لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ۲ ف + ج) فہ (لا، ما)  
 = { (لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما + گ) (لا + لا) + (ما + ب + ج) }

۲۔ اگر (لا، ما) مخروطی کا ایک ماسکہ ہو تو یہ مساوات ایک دائرہ کی شرطوں کو پورا کرتی ہے یعنی یہ کہ لا اور ما کے سر مساوی ہیں اور لا ما کا سر صفر ہے۔

پس  
 فہ (لا، ما)۔ (لا + لا + ۲ لا + ما + گ) = ب فہ (لا، ما)۔ (لا + لا + ب + ما + ف)  
 اور فہ (لا، ما) = (لا + لا + ۲ لا + ما + گ) (لا + لا + ب + ما + ف)  
 اس لیے ماسکے وہ نقطے ہیں جو مساواتوں  
 (لا + لا + ۲ لا + ما + گ) = (لا + لا + ب + ما + ف)





$$= \text{فہ (لا' ما)}$$

ہیں۔ پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$۰ = (۲ + ۴ - ۶) ۲ + (۳ - ۶ + ۹) ۳$$

$$۰ = (۲ + ۴ - ۶) ۳ - (۳ - ۶ + ۹) ۲$$

$$۰ = ۳ + ۴ - ۶ - ۱ - ۳ + ۶ - ۹$$

پس اگر ہم

$$(۱) \dots \dots (۴ - ۶ + ۹) ۳ = \text{فہ (لا' ما)}$$

میں ۲ ما کی بجائے ۱-۳ لا درج کریں تو عمل تحویل کے بعد لا' ۱-۳ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } ۱ = ۱ \text{ تو } ۱ = ۱$$

$$\text{جب } ۱ = ۱ \text{ تو } ۲ = ۲$$

اس لیے حقیقی ماسکے (۱-۱) اور (۲-۱) ہیں۔

خیالی ماسکے مخروطی (۱) اور خط ۴-۶+۳=۰ کے نقاط تقاطع ہیں

مرتب ماسکوں کے قطبی ہیں اور حقیقی مرتبوں کی مساواتیں

$$۰ = ۳ - ۶ + ۹ - ۱ \text{ اور } ۰ = ۲ - ۴ + ۶ - ۳$$

حاصل ہوں گی۔

لیکن مرتبوں کی مساواتیں ماسکوں کو پہلے معلوم کئے بغیر بھی اوپر کے ضابطوں

سے معلوم کیجا سکتی ہیں۔

یہ معلوم ہو گا کہ

$$۱ = ۴ - ۶ + ۹ - ۱ \text{ ب' } ۶ = ۳ - ۶ + ۹ - ۱ \text{ گ' } ۳ = ۲ - ۴ + ۶ - ۳ \text{ ج' } ۲ = ۱ - ۳ + ۶ - ۴$$

(۲۶۳)

$$\Delta = ۴ - ۶ + ۹ - ۱$$

$$\frac{۱۲ل + ۳۶ل + ۱۲ل + ۴ل}{۴۰۰} = \frac{۱۲ل}{۶} = \frac{۲ل}{۵}$$

$$\frac{۱۲ل}{۶} = \frac{۲ل}{۵} \text{ یا } \frac{۱۲ل}{۶} = \frac{۲ل}{۵}$$

$$۱۲ل + ۳۶ل + ۱۲ل + ۴ل = ۲۰ل$$

جب  $۰ = ۳ + ۲ = ۲$  تو  
 $۱۲ - ۲۴ = ۱۸ - ۱۲ + ۱۲ = ۰$   
 $\therefore \frac{۱۲}{۳} = \frac{۲۴}{۲} = \frac{۱۸}{۱} = \frac{۱۲}{۳}$  یا  $\frac{۱۲}{۳} = \frac{۲۴}{۲} = \frac{۱۸}{۱}$   
 اس لیے حقیقی مرتبوں کی مساواتیں

$۲ - ۳ = ۳ + ۲ = ۰$  اور  $۲ - ۳ = ۱ - ۳ = ۰$

ہیں۔

جب  $۳ - ۲ = ۰$  ہو تو مرتب خیالی ہوتے ہیں۔

ناقص اور اس کے مرتب دائرہ کی مساواتوں  $\frac{۱۲}{۳} + \frac{۱۲}{۳} = ۱$

اور  $۱ + ۲ = ۳$  سے باسانی معلوم ہوتا ہے کہ مخروطی کے مرتبوں کا ایک زوج 'مخروطی اور اس کے مرتب دائرہ کے نقاط تقاطع میں گزرنے والے متوازی خطوط ہوتے ہیں۔

پس مخروطی فہ (لا، ما) کے مرتب مساوات  
 فہ (لا، ما) + لہ (ج لا، ج ما) - ۲ گ لا - ۲ ف ما + (ب + ج) = ۰  
 سے معلوم ہوتے ہیں جہاں لہ ایسا ہے کہ دوسرے درجہ کی اقسام کا کل مربع ہیں۔

اس لیے لہ مساوات

$۱ + لہ (ج) (ب + لہ ج) = ۰$

یا  $۱ + لہ (ب + لہ ج) = ۰$

سے حاصل ہوتا ہے۔

ادپر کی مثال میں

$۱ + لہ (-۳) + (-۴) = ۰$ ؛ اس لیے  $۱ - لہ = ۰$  یا  $۱ + لہ = ۰$

محزوطی کا مرتب دائرہ

$$- ۴۰ - ۴۰ - ۴۰ + ۴۰ - ۴۰ = ۴۰$$

(۲۶۴) ہے۔ اس لیے جب  $ل = \frac{1}{8}$  تو مرتب

$$۸ (لا + لا۱۲ - لا۴ - لا۶ + لا۹ + لا۱۲ - لا۱۵ + لا۱۸ - لا۲۱ + لا۲۴ - لا۲۷ + لا۳۰) = ۴۰$$

$$۴ لا - لا۱۲ + لا۱۵ + لا۱۸ - لا۲۱ + لا۲۴ - لا۲۷ + لا۳۰ = ۴۰$$

$$یعنی (۴ + لا۳ - لا۲) (۴ - لا۳ - لا۲) = ۴۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

جب  $ل = \frac{1}{4}$  تو مرتبوں کی مساوات

$$۵ (لا + لا۱۲ - لا۴ - لا۶ + لا۹ + لا۱۲ - لا۱۵ + لا۱۸ - لا۲۱ + لا۲۴ - لا۲۷ + لا۳۰) = ۴۰$$

$$۹ لا + لا۱۲ + لا۱۵ - لا۱۸ - لا۲۱ + لا۲۴ - لا۲۷ + لا۳۰ = ۴۰$$

$$یعنی (۳ + لا۲ - لا۱) (۳ - لا۲ - لا۱) = ۴۰$$

ہے۔

۱۹۵۔ محزوطی کے محوروں کی مساوات معلوم کرنا۔

محزوطی کے محور متقاربوں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں اور متقارب اُن خطوں کے متوازی ہوتے ہیں جو مساوات  $۲ لا + لا۱۲ + لا۱۵ - لا۱۸ - لا۲۱ + لا۲۴ - لا۲۷ + لا۳۰ = ۴۰$  سے (دفعہ ۱۷۴) حاصل ہوئے ہیں۔ پس (دفعہ ۳۹) محاورہ وہ خطوط مستقیم ہیں جو محزوطی کے مرکز میں سے گذرتے ہوئے خطوط

$$\frac{لا - لا۲}{لا۱} = \frac{لا۲ - لا۱}{لا۱}$$

کے متوازی ہیں۔

محوروں کی مساواتوں کو ہم حسب ذیل طریقہ پر بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ اگر محزوطی کے محور پر ایک نقطہ ہو تو وہ خط جن کو محزوطی کے

مرکز سے ملتا ہے ن کے قطبی پر عمود ہے۔  
 فرض کرو کہ ن کے محد لا، ما، میں۔ تب ن کے قطبی کی مساوات  
 لا (لا + ہ + ما + گ) + ما (ہ + لا + ب + ما + ف) + گ (لا + ف + ما + ج) =  
 (۱)۔۔۔۔۔۔۔۔

ہے۔  
 مخروطی کے مرکز میں سے گزرنیوالے کسی خط کی مساوات  
 لا + ہ + ما + گ + ل (ہ + لا + ب + ما + ف) = ۰۔۔۔۔۔۔۔۔ (۲)  
 ہے۔ اب چونکہ (۲) (۱) پر عمود ہے اس لیے  
 لا + ل (ہ + لا + ہ + ما + گ) + (ہ + ل + ب) (ہ + لا + ب + ما + ف) = ۰  
 (۳)۔۔۔۔۔۔۔۔

چونکہ (۲) نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتا ہے اس لیے  
 لا + لا + ہ + ما + گ + ل (ہ + لا + ب + ما + ف) = ۰۔۔۔۔۔۔۔۔ (۴)  
 لہ کو (۳) اور (۴) سے ساقط کرو تو ہم دیکھتے ہیں کہ (لا، ما) مخروطی  
 لا + لا + ہ + ما + گ + ل (ہ + لا + ب + ما + ف) = ۰  
 لا + لا + ہ + ما + گ + ل (ہ + لا + ب + ما + ف) = ۰  
 ب ۱۔۔۔۔۔۔۔۔

پر ہونا چاہیے، یہ مطلوبہ مساوات ہے۔  
 مخروطوں کی مساوات کو دفعہ ۱۹۳ یا دفعہ ۱۹۴ سے بھی ماخوذ کیا  
 جاسکتا ہے کیونکہ ان مخروطیوں میں سے ایک جن پر پاسکے واقع ہوتے  
 ہیں خطوط مستقیم کا ایک زوج ہے جو مرکز میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے  
 یہ زوج محاور ہونا چاہیے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ وہ تمام مخروطی جو ایک مخروطی کے چار ماسکوں میں  
 سے گزرتے ہیں قائم الزام ہیں۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اس مخروطی کے ماسکے جس کی مساوات  
 لا + لا + ہ + ما + گ + ل (ہ + لا + ب + ما + ف) = ۰

ہے مخنیوں

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{6}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{6}{\frac{1}{6}} = 36$$

پرواقع ہیں۔

مثال ۳ - ثابت کرو کہ مخروطی

$$لا - لا ۶ + لا ۶ + لا ۶ - لا ۶ = ۵$$

کے حقیقی ماسکے (۱۶) اور (۲-۲) ہیں۔

مثال ۴ - ثابت کرو کہ لا - لا ۸ + لا ۸ - لا ۸ + لا ۸ = ۱ کے

حقیقی ماسکوں کے محدود

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \text{ اور } \left(-\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right) \text{ ہیں۔}$$

مثال ۵ - مکافی لا + لا ۲ + لا ۲ + لا ۲ - لا ۲ + لا ۲ + لا ۲ = ۶ کا ماسک

$$\text{نقطہ } \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) \text{ ہے۔}$$

مثال ۶ - ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے خیالی ماسکوں سے

اس کے کسی ماس پر عمود نکالے جائیں تو ان عمودوں کا حاصل ضرب ہم محور اعظم کے مربع کے مساوی ہوگا۔

مثال ۷ - ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے ایک خیالی ماسک سے

ناقص کے کسی نقطہ کے ماس پر عمود نکالا جائے تو اس عمود کا پائین اس دائرہ پر واقع ہوتا ہے جو محور اصغر کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو۔

مثال ۸ - اگر ایک دائرہ ایک ناقص کے ساتھ دوہرا ماس رکھے

تو ثابت کرو کہ ناقص کے کسی نقطہ سے دائرہ کا ماس ایسے بدلتا ہے جیسے وتر ماس سے اس نقطہ کا فاصلہ۔

۱۹۶ - مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جبکہ محدودوں کے محاور

(۲۶۶)

مخروطی کے کسی نقطہ پر کے ماس اور عماد ہوں۔

مخروطی کی مسادات کی عام سے عام شکل  
 $1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} + 5 \text{ لا} + 6 \text{ لا} + 7 \text{ لا} + 8 \text{ لا} + 9 \text{ لا} + 10 \text{ لا} = 55$

ہے۔ چونکہ مبدا انحنی پر ہے اس لیے محدود (۱۰) اس مسادات کو پورا کرنے اور اس لیے ج = ۰۔

خط ما = منحنی سے وہاں ملتا ہے جہاں  $1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} = ۰$ ۔ اگر خط ما = مبدا پر کا تماس ہے تو لا کی وہ دونوں قیمتیں جو مسادات  $1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} = ۰$  سے حاصل ہوتی ہیں صفر ہونی چاہئیں۔ اس لیے گ = ۰۔ پس مخروطی کی مسادات کی عام سے عام شکل جبکہ محاور لا اور ما کو تماس اور نظیری عماد پر لیا گیا ہو حسب ذیل ہے:

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} + 5 \text{ لا} + 6 \text{ لا} + 7 \text{ لا} + 8 \text{ لا} + 9 \text{ لا} + 10 \text{ لا} = 55$$

مثال ۱۔ مخروطی کے وہ تمام وتر جو مخروطی کے ایک ثابت نقطہ و پر ایک قائمہ زاویہ بناتے ہیں و پر کے عماد سے ایک ثابت نقطہ پر ملتے ہیں۔ و پر کے تماس اور عماد کو محاور قرار دو۔ تب مخروطی کی مسادات ہوگی  $1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} + 5 \text{ لا} + 6 \text{ لا} + 7 \text{ لا} + 8 \text{ لا} + 9 \text{ لا} + 10 \text{ لا} = 55$ ۔

فرض کرو کہ ایک وتر ف ق کی مسادات ل لا + م ما + ن نا = ۰ ہے۔ خطوط و ف، وق کی مسادات (دفعہ ۳۸) ہوگی

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} + 5 \text{ لا} + 6 \text{ لا} + 7 \text{ لا} + 8 \text{ لا} + 9 \text{ لا} + 10 \text{ لا} = 55$$

لیکن و ف اور وق ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اس لیے

(۱) میں لا اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہے۔ اس لیے لا + ب + ۲ ق م = جس سے معلوم ہوتا ہے کہ م مستقل ہے اور م اس نقطہ کا مسکانی ہے جو ف ق، عماد پر قطع کرتا ہے۔

مثال ۲۔ اگر ایک مخروطی کے کوئی دو تروف اور وق و پر کے تماس کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں تو خط ف ق، تماس کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرے گا۔

حسب مثال (۱) خطوط وف اور وق کی مساوات

۱ لا + ۲ ما + ۳ ب + ۴ ف + ۵ م (ل لا + م م) = ۰  
ہے۔ اگر وف اور وق محاور کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں تو لاماکا  
صفر ہے۔ علیٰ ہذا۔

۱۹۷۔ مخروطی لا + ۲ ب + ۳ م = ۱ کے کسی نقطہ (لا، م) پر کے عماد کی  
مساوات (۲۶۷)

$$\frac{لا - لا}{لا} = \frac{ما - ما}{ب م}$$

ہے۔ یہ عماد نقطہ (ھ، ک) میں سے گزرے گا اگر

$$\frac{ھ - لا}{لا} = \frac{ک - ما}{ب م}$$

یعنی اگر لا م (۱ - ب) + ب ھ م - ۱ ک لا = ۰  
اس لیے ان عمادوں کے پائین جو کسی مخصوص نقطہ (ھ، ک) میں سے  
گذریں مخروطی

لا م (۱ - ب) + ب ھ م - ۱ ک لا = ۰، ..... (۱)  
پر واقع ہوتے ہیں۔

مخروطی (۱) اور ابتدائی مخروطی کے چار حقیقی یا خیالی نقاط تقاطع وہ  
نقطے ہیں جن پر کے عماد نقطہ (ھ، ک) میں سے گزرتے ہیں۔

مخروطی (۱) صریحاً ایک قائم زائد ہے جس کے متقارب محدودوں کے محاوروں کے  
متوازی ہیں یعنی ابتدائی مخروطی کے محوروں کے متوازی۔ نیز یہ قائم زائد  
اُس مخروطی کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور خود نقطہ (ھ، ک) میں سے بھی۔

۱۹۸۔ اگر دو تروں ل لا + م م - ۱ = ۰ اور ل لا + م م - ۱ = ۰ کے  
سروں پر کے عماد نقطہ (ھ، ک) پر ملیں تو لہ کی کسی خاص قیمت کیلئے مخروطی

لا + ۲ ب + ۳ م - ۱ - لہ (ل لا + م م - ۱) (ل لا + م م - ۱) = ۰، ..... (۱)



جولہ کی تمام قیمتوں کے لیے ان دو وتروں کے چار بیروں میں سے گزرتا ہے،  
دہی ہوگا (دفعہ ۱۹۷)

جو لا (۱-ب) + ب ۵-ا۔ اک لا = ۰۔۔۔ (۲) ہے۔

اس آخری مساوات میں لا اور ما کے سر اور متقل رقم صفر ہیں اور  
اس لیے وہ قبل الذکر مساوات میں صفر ہونے چاہئیں۔ اس لیے  
۱-ل ل ل = ۰، ب-ل م م = ۰، اور ۱+ل = ۰۔

پس وہ ضروری اور کافی شرطیں کہ وتروں ل لا + م ما = ۰۔ (۳۶۸)  
اور ل لا + م ما = ۱۔ کے بیروں پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں یہ  
ہیں کہ

$$\frac{ل ل ل}{۱} = \frac{م م م}{ب} = ۱۔۔۔۔۔۔۔ (۳)$$

۱۹۹۔ گزشتہ دفعہ سے معلوم ہوتا ہے کہ ناقص (مجاور ۲) ۲ (ب)  
کے ان وتروں کے بیروں پر کے عماد جن کی مساواتیں  
ل لا + م ما = ۱۔ اور ل لا + م ما = ۱۔  
ہیں ایک نقطہ پر ملیں گے اگر

ل ل ل = ب م م = ۱۔۔۔۔۔۔۔ (۱)  
اگر ان چار بیروں کے خارج المرکز زاوے ۵، ۵ اور ۵، ۵ ہوں تو  
دو وتروں کی مساواتیں

$$\frac{لا}{۱} \text{ جم } ۵ + \frac{ما}{ب} \text{ جب } ۵ = \frac{جم}{۲} ۵ - ۵$$

$$\frac{لا}{۱} \text{ جم } ۵ + \frac{ما}{ب} \text{ جب } ۵ = \frac{جم}{۲} ۵ - ۵$$

اور ہوگی۔ اس لیے (۱) کے ساتھ مقابلہ کرنے پر

$$\frac{1}{4} \text{ جم } (\text{عہ} + \text{بہ}) + \frac{1}{4} \text{ جم } (\text{جہ} + \text{ضہ}) + \frac{1}{4} \text{ جم } (\text{عہ} - \text{بہ}) + \frac{1}{4} \text{ جم } (\text{جہ} - \text{ضہ}) = ۰$$

$$\frac{1}{4} \text{ اور جب } (\text{عہ} + \text{بہ}) + \frac{1}{4} \text{ جب } (\text{جہ} + \text{ضہ}) + \frac{1}{4} \text{ جم } (\text{عہ} - \text{بہ}) + \frac{1}{4} \text{ جم } (\text{جہ} - \text{ضہ}) = ۰$$

$$\text{تفریق کرنے پر } \frac{1}{4} \text{ جم } (\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}) = ۰$$

$$\text{اس لیے } \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} = ۲(۱ + ۲) = ۶ \dots (۲) \text{ نیز پہلی مساوات سے}$$

$$\frac{1}{4} \text{ جم } (\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}) + \frac{1}{4} \text{ جم } (\text{عہ} - \text{بہ} - \text{جہ} - \text{ضہ})$$

$$+ \frac{1}{4} \text{ جم } (\text{عہ} + \text{جہ} - \text{بہ} - \text{ضہ}) + \frac{1}{4} \text{ جم } (\text{عہ} - \text{جہ} - \text{بہ} - \text{ضہ}) = ۰$$

اور شرط (۲) کو استعمال کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{جب } (\text{عہ} + \text{بہ}) + \text{جب } (\text{بہ} + \text{جہ}) + \text{جب } (\text{جہ} + \text{ضہ}) = ۰ \dots (۳)$$

(نیز دیکھو دفعہ ۱۳۹)

مثال ۱۔ اگر  $\Delta$  ج وہ اعظم مثلث ہو جو ایک ناقص میں بنایا جائے تو ثابت کرو کہ  $\Delta$  'ب' ج پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں گے۔

(۲۶۹)

$$\text{خارج المکرز اوکے عہ} + \frac{۲۲}{۳} \text{ اور عہ} + \frac{۲۴}{۳} \text{ ہو گئے [دفعہ ۱۳۸]۔}$$

وہ شرط کہ عماد ایک نقطہ پر ملیں یہ ہے (دفعہ ۱۹۸) (۳)

$$\text{جب } ۲ \text{ عہ} + \text{جب } (\frac{۲۲}{۳} + ۲) + \text{جب } (\frac{۲۴}{۳} + ۲) = ۰$$

جو صریحاً درست ہے۔

مثال ۲۔ ایک مرکز دار مخروطی کے چار نقطوں 'ف' 'ق' 'س' 'س' پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور 'ف' 'ق' 'س' میں سے گزرنے والا دائرہ مخروطی کو کمر 'س' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'س' 'س' مخروطی کا ایک قطر ہے۔

س میں، مخروطی کا ایک قطر ہوگا اگر س میں اور س میں، مزدوج  
قطروں کے متوازی ہوں (دفعہ ۱۳۴)۔

اب اگر ق، ل لا + م ما = ۱ ہو تو س میں،  $\frac{1}{ل} لا + \frac{1}{م} ما$   
+ ۱ ہوگا (دفعہ ۱۹۷) نیز س میں، ل لا - م ما = ۰ کے متوازی ہوگا کیونکہ  
ق، س میں، ایک دائرہ پر ہیں۔ پس س میں، ایک قطر ہے کیونکہ  
[دفعہ ۱۸۲] ل لا - م ما = ۰ اور  $\frac{1}{ل} لا + \frac{1}{م} ما = ۰$ ، ۱ لا + ب ما = ۱ کے  
مزدوج قطر ہیں۔

[اس مسئلہ کو دفعہ ۱۹۹ (۲) اور دفعہ ۱۳۶ سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے]  
مثال ۳۔ اگر ایک ناقص کے نقطوں ۱، ب، ج، د پر کے عماد  
ایک نقطہ پر ملیں تو ۱، ب، ج، د میں سے گزرنے والے ایک مکانی کا محور  
مساوی مزدوجوں میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی ہوگا۔

اگر (ھ، ک) وہ نقطہ ہو جہاں عماد ملتے ہیں تو ۱، ب، ج، د مخروطیوں  
کے چار نقاط تقاطع ہیں۔

$$\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ اور } لا ما \left( \frac{۱}{ب} - \frac{۱}{۱} \right) + \left( \frac{۱}{ب} - \frac{۱}{۱} \right) = \frac{ک لا}{۱} - \frac{ھ ما}{ب} = ۰$$

ان نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے تمام مخروطی مساوات  
میں شامل ہیں۔

اگر یہ ایک مکانی ہو تو دوسرے درجہ کی ارقام ایک کامل مربع ہونی  
چاہئیں اور اس لیے  $\frac{لا}{۱} \pm \frac{ما}{ب}$  کا مربع ہونی چاہئیں۔ اس لیے ہر ایسے  
مکانی کی مساوات شکل  $\left( \frac{لا}{۱} \pm \frac{ما}{ب} \right)^2 + ۱ لا + ب ما + ج = ۰$  کی ہے۔ اس لیے

ان کے محاور، خطوط  $\frac{لا}{۱} \pm \frac{ما}{ب} = ۰$  میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی ہیں (دفعہ ۱۷۲)۔

(۲۷۰) مثال ۴۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے ایک نقطہ ن کا قطبی لیا گیا ہے اور اس نقطہ سے اس کے قطبی پر عمود کھینچا گیا ہے، اگر یہ عمود ایک ثابت نقطہ و میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ (ع) ن کا طریق ایک قائم زائد ہے (یہ) اُس مثلث کا حاطہ دائرہ جو ن کا قطبی محوروں سے قطع کرتا ہے ہمیشہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتا ہے (ج) ایک مکانی من کا ماسکہ و ہے محوروں کو مس کرے گا اور ایسے تمام قطبیوں کو (نہ) اس مکانی کا مرتب ج و ہے جہاں ج مخروطی کا مرکز ہے، اور (صہ) و اور و باہم تبدیل کئے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات  $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{ب} = ۱$  ہے اور فرض کرو کہ ثابت نقطہ و کے محدد (ھ) ک ہیں۔

اگر کسی نقطہ ن کے محدد (لا، ما) ہوں تو اُس خط کی مساوات جو ن میں سے گزرے اور اس کے قطبی پر عمود ہو

$$\frac{لا - لا}{۱} = \frac{ما - ما}{ب}$$

$$\text{یا} \quad \frac{لا}{۱} - \frac{ما}{ب} = ۱ - ۱$$

ہوگی۔ اگر یہ خط نقطہ (ھ) ک میں سے گزرے تو

$$\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{ب} = ۱ - ۱ \quad (۱)$$

(۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ (لا، ما) ایک قائم زائد ہے..... (ع) اُس مثلث کے حاطہ دائرہ کی مساوات جو (لا، ما) کا قطبی محوروں سے

قطع کرتا ہے

$$\frac{لا + ما - ۲}{لا} = \frac{ب + ما}{۱} = ۰$$

ہوگی۔ یہ دائرہ نقطہ (لہ، لک) میں سے گزریگا اگر

$$لہ (۲ + ک) = \frac{لا}{۱} - \frac{ب + ک}{۱}$$

پس اگر (لا، ما) رشتہ (۱) کو پورا کرتا ہے تو

$$لہ = \frac{لا - ب}{۲ + ک}$$

اس لیے ایسے تمام دائرے نقطہ و میں سے گزرتے ہیں جس کے محدود

$$\frac{لا - ب}{۲ + ک} ، ب + ک ، ..... (بہ)$$

ہیں۔

(۲۷۱) نقطہ و اس مثلث کے حاطہ دائرہ پر ہے جو محوروں اور کسی ایک قطبی

سے بنتا ہے، اس لیے وہ مکافی جس کا ماسکہ و ہے اور جو محوروں کو مس کرتا ہے

ہر ایک قطبی کو مس کرے گا، ..... (جہ)

یہ مکافی ابتدائی مخروطی کے محوروں کو مس کرتا ہے، اس لیے مرکز ج،

مکافی کے مرتب پر ایک نقطہ ہے، نیز خطوط ج و اور ج و محور لا کے ساتھ

مساوی زاوے بناتے ہیں جو مکافی کا ایک ماس ہے، اس لیے و ماسکہ ہوئیگی

وجہ سے ج و مرتب ہے، ..... (ضہ)

چونکہ ج و ج و = لا - ب اور ج و ج و محور لا کے ساتھ مساوی

زاوے بناتے ہیں اور محور ما کی ایک ہی جانب واقع ہیں اس لیے و اور و باہم

تبدیل پذیر ہیں، ..... (صہ)

۲۰۰۔ تعریف۔ دو منحنیوں کو متشابہ اور متشابہا واقع اسوقت

کہا جاتا ہے جبکہ ایک منحنی کے سمتی نیم قطر جو کسی نقطہ سے کھینچے گئے ہوں  
دوسرے منحنی کے متوازی سمتی نیم قطروں کے ساتھ جو دوسرے نقطہ سے  
کھینچے گئے ہوں ایک متقل نسبت رکھیں۔

دو شخصوں کو متشایہ اس وقت کہا جاتا ہے جبکہ دو ثابت نقطوں  
 و اور  $\omega$  سے گھنٹی ہوئے نصف قطر جو ایک دوسرے کے ساتھ ایک  
 مستقل زاویہ بنائیں مناسب ہوں۔

ان دو ثابت نقطوں اور دو کوشاہ کے مرکز کہا جاسکتا ہے۔

۲۰۱۔ اگر دو مخنیوں کے لیے تشابہ کے مرکوزوں کا ایک زوج موجود ہو تو ایسے زوجوں کی لامتناہی تعداد ہوگی۔

فرض کرو کہ تشابہ کے مرکزوں کا دیا ہوا زوج 'و' ہے اور فرض کرو کہ 'و' و 'ن' متوازی نصف قطروں کا کوئی زوج ہے۔ کوئی نقطہ ج لو اور 'ج' کو 'ج' کے متوازی اور نسبت 'و' : 'و' میں لپیٹو۔ تب متشابہ مثلثات ج و 'و' اور ج و 'ن' سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ج و 'ج' کے متوازی ہے اور اس کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ ج و 'ج' تشابہ کے مرکز ہیں۔

۲۰۲۔ اگر دو مرکز دار مخروطی متشابہ ہوں تو ان دو منحنیوں کے مرکز تشابہ کے مرکز ہوں گے۔

فرض کرو کہ تشابہ کے دو مرکز و اور ق ہیں۔ ایک مخروطی کا کوئی ق  
ن و ق کھینچو اور اس کے جواب میں دوسرے مخفی کا وتر ن و ق کھینچو۔  
تب بموجب فرض ن و x و ق : ن و x و ق ، نظیری وتروں کے  
ہر زوج کے لیے مستقل ہے۔ لیکن چونکہ و ایک ثابت نقطہ ہے اس لیے  
ن و x و ق ہمیشہ پہلے مخروطی کے اس وتر کے مربع کے ساتھ مستقل نسبت  
رکھتا ہے جو اس کے متوازی ہے یہی صورت دوسرے مخروطی کے لیے بھی درست ہے۔ اس لیے

ان دو محروطیوں کے نظیری قطر ایک دوسرے کے ساتھ مستقل نسبت رکھتے ہیں پس ان مخروطیوں کے مرکز تشابہ کے مرکز ہیں۔

۲۰۳۔ وہ شرطیں معلوم کرنا کہ دو محروطی متشابہ اور متشابہ ہا واقع ہوں۔

گذشتہ دفعہ کی روش سے ان کے مرکز تشابہ کے مرکز ہیں۔ نیچے فرض کرو کہ ان محروطیوں کی مساواتیں ان مرکوزوں اور متوازی محوروں کے حوالے سے

$$1) \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا ما} + \text{ب}^2 + \text{ا}^2 = 0$$

$$2) \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا ما} + \text{ب}^2 + \text{ا}^2 = 0 \quad \text{اور}$$

ہیں۔ ان مساواتوں کو قطبی محدودوں میں لکھا جائے تو

$$1) (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + 2 \text{ لا ما} + \text{ا}^2) = 0 \quad \text{جب طہ جم طہ} + \text{ب جب}^2 \text{طہ} + \text{ا}^2 = 0$$

$$2) (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + 2 \text{ لا ما} + \text{ا}^2) = 0 \quad \text{جب طہ جم طہ} + \text{ب جب}^2 \text{طہ} + \text{ا}^2 = 0 \quad \text{اور}$$

پس اگر  $r_1$  :  $r_2$  مستقل ہو تو طہ کی تمام قیمتوں کے لیے

$$1) \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + 2 \text{ لا ما} + \text{ا}^2 = 0 \quad \text{جب طہ جم طہ} + \text{ب جب}^2 \text{طہ} + \text{ا}^2$$

$$2) \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + 2 \text{ لا ما} + \text{ا}^2 = 0 \quad \text{جب طہ جم طہ} + \text{ب جب}^2 \text{طہ} + \text{ا}^2$$

کو مستقل ہونا چاہیے۔ اس کے لیے ضروری ہے کہ  $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}$ ۔ ایسے

ان دو محروطیوں کے متعارف متوازی ہیں [اس نتیجہ کو حسب ذیل طریقہ پر

حاصل کیا جاسکتا ہے: چونکہ  $r_1$  :  $r_2$  مستقل ہے جبکہ ان دو میں سے

ایک لامتناہی ہو جاتا ہے اس لیے دوسرا بھی لامتناہی ہوگا جس سے

ثابت ہوتا ہے کہ متعارف متوازی ہیں۔]

اس کے بالعکس اگر یہ شرطیں پوری ہوں اور اگر ہر کسر لہ کے مساوی ہو

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{ج}{لا}$$

اس لیے نظیری نصف قطروں کی نسبت مستقل ہے اور اس کے منحنی متشابہ ہیں۔

اگر ج اور لہ ج ایک ہی علامت کے نہ ہوں تو مستقل نسبت خیالی ہوتی ہے، اور صفر یا لامتناہی ہوتی ہے اگر ج یا ج صفر ہو۔

تشابہ کی شرطیں ان تین منحنیوں سے جن کی مساواتیں

$$لا = ج، لا = ۰، اور لا = ج$$

ہیں پوری ہوتی ہیں۔ اس لیے ایک زاۓد اس کا مزدوج زاۓد اور ان کے متقارب تین متشابہ اور متشابہ واقع منحنی ہیں۔ مزدوج زاۓد کے لیے مستقل نسبت ۱-۲ ہے اور متقاربوں کے لیے صفر۔

لیکن یہ منحنی ایک ہی شبابہت نہیں رکھتے۔ کیونکہ متشابہ منحنیوں

کے لیے جن کی شبابہت وہی ہو مستقل نسبت حقیقی اور مُعین (محدود) ہونی چاہیئے۔

۲۰۴۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو مخروطی متشابہ ہوں اگرچہ

متشابہ واقع نہ ہوں۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ان دو منحنیوں کے مرکز تشابہ کے مرکز ہونے چاہئیں۔ فرض کرو کہ ان منحنیوں کی مساواتیں ان کے اپنے مرکزوں کے حوالے سے

$$لا + ۲ لا + لا + ب ما + ج = ۰ \dots \dots (۱)$$

$$لا + ۲ لا + لا + ب ما + ج = ۰ \dots \dots (۲)$$

اور

ہیں اور فرض کرو کہ وہ وتر جو پہلے منحنی میں محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے طہ کی تمام قیمتوں کے لیے اس وتر کے متناسب ہے جو دوسرے منحنی میں محور لا کے ساتھ زاویہ (طہ + عم) بناتا ہے۔ اگر دوسرے منحنی کے محوروں کو زاویہ عم میں سے گھمایا جائے تو اس وقت ان مخروطیوں کے نصف قطر ایسے ہوں گے جو متعلقہ محوروں کے ساتھ مساوی زاوے بنائیں گے اور



ایک مستقل نسبت میں ہوں گے۔  
فرض کرو کہ اس طرح دوسرے مخروطی کی مساوات

$$1 + 2h^2 = 1 + 2h^2 + 2b^2 + 2c^2 = 0$$

ہو جاتی ہے۔ تب پچھلی دفعہ کی رُو سے حاصل ہونا چاہیے

$$\frac{1}{b} = \frac{h}{b} = \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{b} = \frac{1}{b}$$

لیکن [دفعہ ۵۲]  $1 + b^2 = 1 + b^2$  اور  $1 + b^2 = 1 + b^2$  (۲۴۴)

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{b} = \frac{1}{b}$$

ہے۔

اوپر کے بیان سے ظاہر ہے کہ متشابہ مخروطیوں کے متقاربوں کے درمیان زاوے مساوی ہوتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۷۴)۔

اس نتیجہ کو حسب ذیل طریقہ پر بھی حاصل کیا جاسکتا ہے: چونکہ ان دو منحنیوں کے سمتی نیم قطر جو ایک دوسرے کے ساتھ ایک خاص مستقل زاویہ پر مائل ہیں مستقل نسبت میں ہیں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان دو سمتوں کا درمیانی زاویہ جو ایک منحنی کے لیے لامتناہی قیمتیں دیتے ہیں دوسرے منحنی کے نظیری زاوے کے مساوی ہونا چاہیے یعنی ایک مخروطی کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ دوسرے مخروطی کے متقاربوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے۔

۵۔ ۲۔ مثلثات جو ایک مخروطی کے اندر اور دوسرے ہم محور مخروطی کے گرد کھینچے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ مخروطی  $\frac{1}{2} \frac{a^2}{b} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} =$  اپر کے نقطوں (ب' ج کے خارج المرکز زاویے ع' ب' ج ہیں اور فرض کرو کہ ان نقطوں پر کے ماسوں سے مثلث (ب' ج بنتا ہے۔

ب' ج پر کے ماس نقطہ (ا' پر ملتے ہیں جہاں

$$\frac{1}{2} \frac{a^2}{b} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} \quad \text{جب } (ب' ج) = (ب' ج)$$

$$\text{نقطہ (ا' مخروطی میں) } = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} = 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} \text{ پر ہوگا اگر}$$

$$\frac{1}{2} \frac{a^2}{b} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} \text{ جب } (ب' ج) = (ب' ج)$$

یعنی اگر  $ل + م + ن = ۰$  جب  $ب' ج = ۰$ ، .... (۱)

$$\text{جہاں } ل = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} = ۱ - \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} = ۰$$

نقطہ ب' میں پر ہوگا اگر

$$ل + م + ن = ۰ \text{ جب } ب' ج = ۰ \text{، .... (۲)}$$

(۱) اور (۲) سے

$$\frac{ل}{ب' ج - ع' ج} = \frac{م}{ب' ج - ع' ج} = \frac{ن}{ب' ج - ع' ج}$$

$$\text{یا } \frac{ل}{ب' ج - ع' ج} = \frac{م}{ب' ج - ع' ج} = \frac{ن}{ب' ج - ع' ج} \text{، .... (۳)}$$

(۲۷۵)

پس

$$\frac{1}{\text{ل}} \cdot \text{جم}^2 \frac{1}{2} (\text{ع} - \text{ب}) = \frac{1}{\text{م}} \cdot \text{جم}^2 \frac{1}{2} (\text{ع} + \text{ب}) + \frac{1}{\text{ن}} \cdot \text{جم}^2 \frac{1}{2} (\text{ع} + \text{ب})$$

اس لیے ج کا طریق مخروطی

$$\frac{1}{\text{ل}} = \frac{1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{ن}} \quad (۴)$$

۴۔ ج کا طریق خود مخروطی سے ہو گا اگر

$$\frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{ل}} \text{ اور } \frac{1}{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ب}}$$

$$\frac{1}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{م}} = 1 + \frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ب}} = 0$$

کے مائل ہیں یعنی

$$\frac{1}{\text{ل}} \pm \frac{1}{\text{ب}} = 1 \quad (۵)$$

چونکہ اوپر کی شرط ع اور ب پر منحصر نہیں ہے اس لیے یہ نتیجہ قطعی ہے کہ اگر ایک مثلث کو س کے اندر اور م کے گرد کھینچا جائے تو ایسے مثلثوں کی تعداد لامتناہی ہوگی۔

ہم فرض کریں گے کہ  $\frac{1}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{ب}} = 1$  تب یہ معلوم ہوگا کہ

$$\frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{ل}} \text{ اور } \frac{1}{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ب}}$$

اور پھر (۱) ہو جائے گا۔

+  $\frac{1}{d}$  جم بہ جم جہ +  $\frac{ب}{ب}$  جب جہ جب جہ = ۰، .... (۱)  
اسی طرح دو اور متشابه مساواتیں حاصل ہونگی۔

اب (۳) سے

(۲۶۹)

$$\text{جم } \frac{1}{p} = \frac{(عہ + بی)}{(بی - عہ)} = \frac{م}{ل} \text{ جم جہ} = \frac{د}{د} \text{ جم جہ}$$

$$\text{اور جب } \frac{1}{p} = \frac{(عہ + بی)}{(بی - عہ)} = \frac{ن}{ل} \text{ جم جہ} = \frac{ب}{ب} \text{ جم جہ}$$

اس طرح 'ج' لا = د جم جہ اور ما = ب جب جہ سے متعین ہو جائا  
ہے۔ اسی طرح د اور ب کے لیے۔

پس میں پر کے نقطوں 'د' 'ب' 'ج' کے خارج المرکز زاوے

$\pi + عہ$ ،  $\pi + بی$ ،  $\pi + جہ$  ہیں جہاں عہ، بی، جہ، 'نقطوں' 'د' 'ب' 'ج' کے  
خارج المرکز زاوے ہیں۔

د' ب' ج کے مرکز ہندسی کا طریق معلوم کرنا۔

مساواتوں

$$+ \frac{1}{d} \text{ جم بہ جم جہ} + \frac{ب}{ب} \text{ جب بہ جب جہ} = ۰، \text{ وغیرہ}$$

سے ہم دیکھتے ہیں کہ عہ، بی، جہ، حسب ذیل مساوات کی تین اصلیں ہیں:

$$\frac{1}{d} \text{ جم جم بہ جم جہ} + \frac{ب}{ب} \text{ جب جب بہ جب جہ} + ۱ = ۰$$

جب ط

لیکن  $\left(\frac{1}{3} \text{ جم ع جم بہ جم جہ} + \text{جم ط}\right) - (1 - \text{جم ط}) - \frac{1}{3} \text{ جب ع جب بہ جب جہ جم ط} =$   
سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم ع} + \text{جم بہ} + \text{جم جہ} + \text{جم ضہ} = - \frac{1}{3} \text{ جم ع جم بہ جم جہ}$$

$$\text{اور جم ع جم بہ جم جہ جم ضہ} = - \frac{1}{3} \text{ جم ع جم بہ جم جہ}$$

اس لیے

$$\text{جم ع} + \text{جم بہ} + \text{جم جہ} = + \frac{1}{3} \text{ جم ضہ}$$

$$\text{اور اسی طرح جب ع} + \text{جب بہ} + \text{جب جہ} = + \frac{1}{3} \text{ جب ضہ}$$

$$\text{اب } 3 \text{ لا} = 3 \text{ لہ جم} (11 + \text{ع}) = - \frac{1}{3} \text{ (جم ع} + \text{جم بہ} + \text{جم جہ)}$$

$$\text{اور } 3 \text{ ما} = 3 \text{ ب جب} (11 + \text{ع}) = - \text{ب (جب ع} + \text{جب بہ} + \text{جب جہ)}$$

اس لیے مرکز ہندسی کے طریق کی مساوات

$$1 = \frac{9 \text{ ما}}{2(\text{ب} - 11)} + \frac{9 \text{ لا}}{2(3 - 12)}$$

# دسویں باب پر مثالیں

(۷۷۷)

۱۔ اگر ق اور ف کوئی دو نقطے ہوں اور ج ایک مخروطی کامرکز ہو تو ثابت کرو کہ مخروطی کے لحاظ سے نقطہ ف کے قطبی پر ق اور ج سے کھینچے ہو عمود ایک دوسرے کے ساتھ دہی نسبت رکھتے ہیں جو ق کے قطبی پر ف اور ج سے کھینچے ہوئے عمودوں میں ہے۔

۲۔ اگر کسی نقطہ سے ایک مخروطی کے دو عماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو ان میں دہی نسبت ہوتی ہے جو نظیری عمودوں میں ہے۔

۳۔ ایک مخروطی پر دو کے مختلف مقاموں کے لیے دفعہ ۱۹۶ میں مندرجہ مثالوں کے ثابت نقطوں کے طریق معلوم کرو۔

۴۔ ایک ناقص کے متوازی وتروں کے ایک نظام میں سے ایک وتر ف وق ہے اور اس پر ایک نقطہ و ایسا ہے کہ ف و + وق مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ و کے مختلف محلوں کے لیے و کا طریق ایک ہم مرکز مخروطی ہے۔

۵۔ اگر و ایک ثابت نقطہ ہو اور و ن کوئی وتر جو ایک مخروطی کو ن ن پر قطع کرتا ہے، اور اگر اس خط پر ایک نقطہ د ایسا لیا جائے کہ  $\frac{1}{د} = \frac{1}{و} + \frac{1}{ن}$

+  $\frac{1}{ن}$  تو ثابت کرو کہ د کا طریق ایک مخروطی ہو گا جس کامرکز و ہو گا۔

۶۔ اگر متوازی خطوط مستقیم کے ایک نظام میں سے ایک خط وف ف ق ق ہو جو ایک دے ہوئے مخروطی کو ف ف پر اور دوسرے کو ق ق پر قطع کرتا ہے اور و ایسا ہو کہ مستطیلوں و ن x و ن اور وق x وق کی نسبت مستقل ہے تو ثابت کرو کہ و کا طریق ایک مخروطی ہے جو ابتدائی مخروطیوں کے

نقاطِ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

۷۔ ایک مخروطی کے کوئی دو وتر  $ف$  و  $ق$  اور  $ق$  و  $وق$  ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور ایک ثابت نقطہ  $و$  میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$ف \times وق + ق \times وق = \text{مستقل ہے۔}$$

۸۔ اگر ایک ناقص کے محورِ اعظم پر ایک نقطہ لیا جائے جس کا نصف

کسی وتر کے مقطوعوں کے متکافوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔

۹۔ اگر ایک قائم زائد کے متوازی وتروں کے ایک نظام میں سے ایک وتر  $ف$  ہو اور اگر عمودی قطر کے سرے  $ق$  ہوں تو ثابت کرو کہ  $ف$  اور  $ق$  ایک ثابت دائرہ پر ملیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ الفاظ "قائم زائد" اور "دائرہ" باہم بدلے جاسکتے ہیں۔

۱۰۔ اگر ایک مکافی کا کوئی ماسکی وتر  $ن$   $س$  ہو اور  $ن$   $م$   $ن$   $م$  ایک ثابت خطِ مستقیم پر عمود ہوں تو

$$\frac{ن م}{ن س} + \frac{ن م}{ن س}$$

مستقل ہوگا۔

۱۱۔ ایک دائرہ کے وتر ایک ثابت نقطے میں سے گزرتے ہوئے کھینچے گئے ہیں اور ان وتروں کو قطر ماکر دائرہ متسم کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں میں سے کسی ایک کے لحاظ سے ثابت نقطہ کا قطبی ایک ثابت مکافی کو مس کرتا ہے۔

۱۲۔ ایک مخروطی پر کے ایک ثابت نقطے سے وتر کھینچے گئے ہیں جو

ایک ثابت قطر پر مساوی مقطوعے قطع کرتے ہیں جہاں ان نقطوں کو مرکز سے پیمائش کیا گیا ہے۔ ان وتروں کے دوسرے سروں پر کے حاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۱۳۔ اگر ایک ناقص کے کسی ماسکی وتر کے سروں کے محدد (لا، ما) اور (لا، ما) ہوں اور اس کے وسطی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو ثابت کرو کہ ما، ما سے بدلیں گے جیسے لا۔ مکانی کی صورت میں کیا ہو جائے گا؟

۱۴۔ ایک ناقص کے محور پر دو ثابت نقطے میں ہا ہیں جن کا فاصلہ مرکز ج سے مساوی ہے۔ ان نقطوں میں سے گزرتے ہوئے دو طرف سے ق اور ف کی کھینچے گئے ہیں اور معین مرق کو ماس تک اس طرح خارج کیا گیا ہے کہ مرق، ق کے فضلہ کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ ماس کا طریق ایک قائم زاویہ ہے۔

۱۵۔ ایک ناقص کے محور پر دو ثابت نقطے میں ہا ہیں جو مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہیں اور ان نقطوں میں سے گزرتے ہوئے دو طرف سے ق اور ف کی کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف پر کا ماس اور خط ق ق محور کے ساتھ ایسے زاویے بناتے ہیں جن کے ماس ایک مستقل نسبت میں ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ایک ناقص کے دو متوازی وتر جو ماسکوں میں سے کھینچے گئے ہیں سختی کو نقطوں ف، ف پر محور اعظم کی ایک ہی جانب قطع کرتے ہیں اور نقطوں ف، ف میں سے گزرنے والا خط نیم محوروں ج، ج ب کو علی الترتیب ع، و پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ  $\frac{ع ج}{و ج} + \frac{ج ب}{و ج}$  مستقل ہے۔

۱۷۔ ایک ناقص کے دو ماس کسی بیرونی نقطہ سے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر وہ چار نقطے جہاں ماس محوروں کو قطع کرتے ہیں ایک دائرہ پر واقع ہوں تو نقطہ کا طریق ایک ثابت قائم زاویہ ہوگا۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے ماس محور اعظم اور محور اصغر کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں لیکن وہ علی القوائم نہ ہوں تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک



قائم زائد ہو گا جس کے راس ناقص کے ماسکے ہوں گے۔  
 ۱۹۔ اگر ایک مخروطی کے ماسوں کا ایک زوج ایک ثابت قطر سے  
 دو نقطوں پر ملے اور مرکز سے ان کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ  
 نقطہ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ نقطہ تقاطع کا طریق ایک  
 مخروطی ہے اگر متکافیوں کا حاصل ضرب یا مجموعہ مستقل ہو۔

۲۰۔ نقطہ ۱ میں سے جو ایک ناقص کے ایک وتر اب کا نقطہ وسطی  
 ہے کوئی وتر ف وق کھینچا گیا ہے۔ ف اور ق پر کے ماس ۱ ب سے  
 علی الترتیب مں اور ت پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ۱ س = ب ت۔  
 ۲۱۔ مخروطی ۱ لا + ۲ ب = ۱ کے ماسوں کے ایسے زوج  
 کھینچے گئے ہیں کہ وہ ہمیشہ مخروطی ۱ لا + ۲ ب = ۱ کے مزدوج قطروں  
 کے متوازی رہتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق  

$$۱ لا + ۲ ب = ۱$$

$$\frac{۱}{ب} + \frac{۱}{س} = \frac{۱}{س}$$

ہے۔

۲۲۔ ایک ناقص کے دو ماس ف ت، ف ت ہیں جو ایک  
 ثابت نقطہ ق پر کے ماس سے نقطوں ت، ت پر ملتے ہیں۔ ف کا طریق  
 معلوم کرو (۱) جبکہ ق ت اور ق ت کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہو، اور  
 (۲) جبکہ مستطیل ق ت x ق ت مستقل ہو۔

۲۳۔ ایک مخروطی کے راس ۱ پر کے ماس پر ایک ثابت نقطہ و  
 ہے اور اس ماس پر و سے مساوی فاصلوں پر دو نقطے ف، ف ہیں۔ ثابت  
 کرو کہ اگر ف اور ف سے مخروطی کے دوسرے ماس کھینچے جائیں تو ان کے  
 نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۲۴۔ اگر ایک دے ہوئے مربع کے ماٹڈ دائرہ کے کسی نقطہ سے اُس  
 دائرہ کے ماس کھینچے جائیں جو مربع کے اندر کھینچا گیا ہو تو یہ ماس مربع کے وتر

ایسے چار نقطوں پر ملیں گے جو ایک قائم زاہد پر واقع ہوں گے۔

۲۵۔ ایک مخروطی کے ایسے دو محاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو جو ایک ثابت خط مستقیم پر مستقل طول کا مقطوعہ قطع کریں۔

۲۶۔ ایک مخروطی کے دو محاس ایک ثابت خط مستقیم ص من سے نقطوں (۳۸۰)

ف اور ق پر ملتے ہیں۔ اگر ف، ق ایسے ہوں کہ ایک ثابت نقطہ و پر وق کے محاذی ایک قائمہ زاویہ بنے تو ثابت کرو کہ محاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دوسرا مخروطی ہوگا۔

۲۷۔ ایک دائرہ کے قطر کے سروں کو کسی نقطہ سے ملایا گیا ہے اور اس نقطہ سے دائرہ کے دو محاس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ عمود وار قطر پر کا وہ مقطوعہ جو ایک خط اور ایک محاس کے درمیان قطع ہوتا ہے اس مقطوعہ کے مساوی ہے جو دوسرے خط اور دوسرے محاس کے درمیان قطع ہوتا ہے۔

۲۸۔ منشآت ایک ناقص کے گرد ایک دے ہوئے قاعدہ پر جو ناقص کو نقطہ ف پر مس کرتا ہے کھینچے گئے ہیں۔ اگر قاعدہ پر کے زاوے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوں تو ثابت کرو کہ راسوں کا طریق وہ عماد ہے جو ف میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر کھینچا گیا ہے۔

۲۹۔ ایک مکانی قائم محوروں کے درمیان پھسلتا ہے۔ وہ منحنی معلوم کرو جو اس کے محور پر کا کوئی نقطہ مرسم کرتا ہے۔ اس سے ثابت کرو کہ ماسکہ اور راس ایسے منحنی مرسم کریں گے جن کی مساواتیں

$$\text{لا}^2 = \text{ا}^2 (\text{لا} + \text{ما})^2, \text{لا}^2 \text{ما}^2 (\text{لا} + \text{ما} + \text{ا})^2 = \text{ا}^2$$

ہیں جہاں  $\text{ا}$ ، مکانی کا وتر خاص ہے۔

۳۰۔ اگر محدود کے محاذ ایک دوسرے سے زاویہ عم پر مائل ہوں اور اگر ان کے درمیان ایک ناقص پھسلے تو ثابت کرو کہ مرکز کے طریق کی مساوات

$$\text{جب}^2 \text{ا}^2 (\text{لا} + \text{ما} - \text{ف})^2 - \text{م}^2 \text{جم}^2 \text{ا}^2 (\text{لا} + \text{ما} - \text{ع} - \text{ق})^2 = ۰$$

ہے جہاں ف اور ق<sup>۲</sup> سے علی الترتیب ناقص کے نیم محوروں کے مربعوں کا مجموعہ اور حاصل ضرب تعمیر ہوتے ہیں۔

۳۱۔ اگر ایک ناقص کے دو ماس وف، وق ہوں اور ان کے متوازی نیم قطر ج ف، ج ق ہوں تو ثابت کرو کہ

$$وف \times وق + ج ف \times ج ق = وس \times وھ$$

جہاں س، ھ ماسکے ہیں۔

۳۲۔ دو ثابت نقطوں ف، ق میں سے خطوط مستقیم ا ب ف،

ج ق د کھینچے گئے ہیں جو ایک دوسرے کے نلی القوائم ہیں اور ایک دے ہوئے خط مستقیم کو نقطوں ا، ج پر اور دوسرے دے ہوئے خط مستقیم کو نقطوں ب، د پر قطع کرتے ہیں۔ خطوط مستقیم ا د، ب ج کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر دے ہوئے خطوط کے نقطہ تقاطع پر اس خط کے عمادی جو ف اور ق کو ملاتا ہے ایک قائم زاویہ بنے تو طریق ایک قائم زاویہ ہوگا۔

(۲۸۱) ۳۳۔ ایک ناقص کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی پر اس نقطہ سے عمود کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس عمود کے پائین کا طریق ایک قائم زاویہ ہے اگر نقطہ ناقص کے ایک ثابت قطر پر واقع ہو۔

۳۴۔ دو ہم مرکز اور ہم محور مخروطیوں کے لحاظ سے ایک نقطہ ف کے قطبی نقطہ ق پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ف ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے تو ق ایک قائم زاویہ مرکز م پر رہے گا۔

۳۵۔ اگر دو دے ہوئے مخروطیوں کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی (۱) متوازی ہوں یا (۲) علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ ان میں سے کسی صورت میں نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے مرکز کا طریق جیکہ دو دے ہوئے نقطوں قطبی دے ہوئے خطوط مستقیم ہوں ایک ثابت خط مستقیم ہے۔

۳۷۔ نیم محوروں ا، ب کا ایک ناقص دو ثابت عمود و اضلوں کے درمیان پھلتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے ماسکوں کا طریق منحنی



چار نقطوں میں سے گزرتا ہے نصف قطر  $\frac{1}{2}$  کے ایک دائرہ پر واقع ہوں گے۔  
 ۴۵۔ اگر ایک قائم زاؤہ کے متقارب ایک مخروطی کے محوروں کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے چار نقاط تقاطع کے اوسط محل کا مرکز انہیں مرکزوں کے درمیان وسط میں ہے۔

۴۶۔ تین خطوط مستقیم علی الترتیب ایک مثلث کے تین ضلعوں کے متوازی کھینچ گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ چھ نقطے جہاں وہ مثلث کے اضلاع کو قطع کرتے ہیں ایک مخروطی پر واقع ہیں۔

۴۷۔ اگر ایک ناقص کے نقطہ ف پر کا عماد محوروں سے گ، گ پر

ملے اور اس پر ایک نقطہ و ایسا ہو کہ  $\frac{1}{ف} = \frac{1}{ف} + \frac{1}{ف}$  تو و میں سے گزرنے والا کوئی وتر ف پر ایک قائمہ زاویہ بنائے گا۔

۴۸۔ ایک ناقص کے ایک ثابت نقطہ و میں سے دو وتر و ف و ف کھینچ گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر و میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے و پر کا ماس مدودہ خطوں کو ایسے دو نقطوں ق، ق پر قطع کرے کہ مستطیل و ق x و ق مستقل ہو تو خط و ف خط و کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرے گا۔

۴۹۔ ایک مخروطی کے کسی نقطہ ف پر کے ماس کے متوازی وتر ل م کھینچا گیا ہے اور خط ف م جو زاویہ ل ف م کی تنصیف کرتا ہے ل م سے ماس پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ماس کا طریق ایک زاؤہ ہے جس کے متقارب ابتدائی مخروطی کے محوروں کے متوازی ہیں۔

۵۰۔ ایک دے ہوئے مرکز دار مخروطی کو ایک دوسرے مخروطی جو اول الذکر کے مرکز میں سے گزرتا ہے ایسے نقطوں پر مس کرتا ہے جو اول الذکر کے اس وتر کے سرے ہیں جو اس کے قاطع محور کے ایک دے ہوئے نقطہ میں سے کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرے مخروطی کے مرکز کا طریق بھی ایک مرکز دار مخروطی ہے۔

۵۱۔ ایک ناقص کا وتر ق، مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہے۔ ناقص کا مرکز ج ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ ق ج ق کا

مرکز 'ق' کے مختلف محلوں کے لیے ایک زائدہ قسم کرے گا۔

۵۲۔ ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ناقص  $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} =$  کو کسی (۲۸۳)

نقطہ پر بس کرتا ہے اور مرکز میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس عمود کے پائین کا طریق جو ناقص کے مرکز سے ناقص اور دائرہ کے وتر تقاطع پر کھینچا گیا ہے ناقص

$$لا + ب' ما = \frac{لا' ب'}{(لا - ب')}$$

۵۳۔ ج کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ زائدہ ۲ لا - ما - ج = ۰، ناقص

$$\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} =$$

مزدوج قطروں میں سے ایک کا ایک سر اہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ ان دو مختیوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی اس قطر پر بیٹے۔

۵۴۔ اگر دو دائروں کے متوازی وتر ج 'د'، ع 'ف' ہوں اور وہ

(دائرے) 'ا' اور ب' پر متقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ چھ نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'،

ع 'ف' میں سے ایک مخروطی کھینچا جاسکتا ہے۔ محور اعظم کے محل کے لیے عمل معلوم کرو۔

۵۵۔ اگر ایک دائرہ اور ایک مخروطی کے چار نقاط تقاطع میں سے دو پر

مخروطی کے مماس کھینچے جائیں اور ان مماسوں کا نقطہ تقاطع 'ف' دائرہ پر واقع

ہو تو دوسرے دو نقطوں پر کے مماسوں کا نقطہ تقاطع 'ف' بھی اسی دائرہ پر

واقع ہوگا۔ اس صورت میں وہ رشتہ معلوم کرو جو ایک مرکز دار مخروطی میں 'ف' اور

'ف' کے محلوں کو جوڑتا ہے اور نیز اس سے ایک مکانی کی صورت میں 'ف' اور 'ف' کے اضافی محل متعین کرو۔

۵۶۔ اگر ایک مکانی کے مرتب سے مساوی فاصلوں پر اور اس کی

مخالف سمتوں میں دو نقطے 'ت'، 'ت' ہوں اور 'ت' سے مماس 'ت' 'ف' اور

'ت' 'ق' ہوں اور 'ت' سے 'ت' 'ف' اور 'ت' 'ق' تو ثابت کرو کہ 'ت'، 'ف'،

'ق'، 'ت'، 'ف'، 'ق' سب کے سب ایک قائم زائدہ پر واقع ہوں گے۔

۵۷۔ اگر ایک دے ہوئے مکانی کے ماسوں کے دوزوج وف' وق اور وف' وق ہوں تو وف' ق' وف' ق' میں سے گزرنے والا مخروطی مکانی ہوگا اگر وہ کا وسطی نقطہ دے ہوئے مکانی پر ہو۔

۵۸۔ ایک ثابت نقطہ کو مرکز مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں جو ایک مخروطی کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ اور مخروطی کے مشترک وتروں کے نقاط وسطی کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

۵۹۔ ایک ثابت نقطہ کو مرکز مان کر کوئی دائرہ کھینچا گیا ہے جو ایک مخروطی کو چار حقیقی یا خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان چار نقطوں میں سے گزرنے والے تمام مخروطیوں کے مرکزدں کا طریق ایک قائم زائد ہے جو دائرہ کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہے۔

۶۰۔ کسی نقطہ سے  $\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} - 1 = 0$  کے تین عماد کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ اس مثلث کا مرکز ہندسی جس کے اس ان عمادوں کے پائین ہیں ناقص  $\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{a+b}$  پر ہے۔

۶۱۔ اگر کسی نقطہ سے ایک ناقص کے چار عماد کھینچے جائیں اور وہ ایک عماد سے نقطوں گ، گ، گ، گ پر ملیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ج گ} + \frac{1}{ج گ} + \frac{1}{ج گ} + \frac{1}{ج گ}$$

$$= \frac{1}{ج گ} + \frac{1}{ج گ} + \frac{1}{ج گ} + \frac{1}{ج گ}$$

۶۲۔ اگر ایک ناقص کے نقطوں (ا، ب، ج، د) پر کے عماد ویر ملیں تو

مخروطی ا، ب، ج، د کی مساوات معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ثابت نقطہ وکیلے اس مخروطی کے مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے بشرطیکہ ناقص ہم محور ناقصوں کے

ایک نظام سے متعلق ہو۔

۶۳۔ ایک ناقص کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد نقطہ و پر ملتے ہیں اور نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' سے خطوط کھینچے گئے ہیں جو ناقص کے محور کے ساتھ وہی زاوے بناتے ہیں جو علی الترتیب ج، ف، ج، ق، ج، س ج میں بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ چار خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۶۴۔ ایک ناقص کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد نقطہ و پر ملتے ہیں اور نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے خطوط کھینچے گئے ہیں جو ناقص کے محور کے ساتھ وہی زاوے بناتے ہیں جو علی الترتیب خطوط و، ف، وق، و، س میں بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ چار خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۶۵۔ 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور امادی دائرہ پر 'ف'، 'ق'، 'س' وہ نقطے ہیں جو علی الترتیب 'ق'، 'س'، 'س' کے متناظر ہیں۔ اگر 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے خطوط کھینچے جائیں جو علی الترتیب ج، ق، ج، س، ج، اور س، ج کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ ایک نقطہ پر ملیں گے۔

۶۶۔ اگر ایک مخروطی کے راس سے ان چار عمادوں پر عمود کھینچے جائیں جو ایک نقطہ و پر ملتے ہیں تو یہ خطوط مکرر مخروطی سے ایسے نقطوں پر ملیں گے جو ایک دائرہ واقع ہوں گے۔

$$۶۷۔ \text{مخروطی } \frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۴ \text{ پر کے کسی نقطہ سے مخروطی } \frac{لا}{ا}$$

$$+ \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ کے تماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط تماس پر کے عماد مخروطی}$$

$$لا + ب^۲ = ا^۲ \left( \frac{ب^۲}{ا^۲} - ۱ \right) \text{ پر ملیں گے۔}$$

۶۸۔ اگر ایک ناقص ایک مثلث 'ب ج کو محیط کرے اور مثلث کے راسوں پر کے تماس متقابلہ اضلاع کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ 'ب، ج پر کے



عماد کسی نقطہ و پر ملیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ مثلث کے مختلف محلوں کے لیے  
و کا طریق ناقص  $\frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ب} = \frac{1}{2} \text{ م} = (\frac{1}{2} \text{ ب} - \frac{1}{2} \text{ ل})$  ہے۔

۶۹۔ اگر  $\frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ب} = \frac{1}{2} \text{ م}$  کے ایک وتر کے سروں پر کے محاس

ناقص پر کے ایک نقطہ پر ملیں اور وتر خود عماد نہ ہو تو ثابت کرو کہ وہ ہم مرکز نا

$$\frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ب} = \frac{1}{2} \text{ م} = \frac{1}{2} \frac{\text{ل} + \text{ب}}{\text{ب} - \text{ل}} \text{ کو مس کرے گا۔}$$

۷۰۔ اس مثلث کا مرکز عمودی معلوم کرو جس کے راس (ا، ج، ع، ب، ج، ب، ع)

(ا، ج، ب، ب، ج، ب، ع) اور (ا، ج، ج، ب، ج، ب، ع) ثابت کرو کہ اگر مثلث کا  
مرکز ہندسی ایک ثابت نقطہ ہو تو مرکز عمودی کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۷۱۔ زائد  $\frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ب} = \frac{1}{2} \text{ م}$  کا کوئی محاس ناقص  $\frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ب} = \frac{1}{2} \text{ م}$  سے

نقطوں ف، ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطوں ف، ق پر ناقص کے عماد  
ناقص کے ایک ثابت قطر پر ملتے ہیں۔

۷۲۔ اگر ناقص  $\frac{1}{2} \text{ ل} + \frac{1}{2} \text{ ب} = \frac{1}{2} \text{ م}$  کے چار عماد نقطہ و سے کھینچے

جائیں اور اگر ع، ع، ع، ع، ع، ع، ع، ع وہ عمود ہوں جو مرکز سے ان محاسوں پر کھینچے  
گئے ہیں جو ان عمادوں کے پائین پر ناقص کے ہیں تو و کا طریق ایک زائد ہوگا  
اگر

$$\frac{1}{2} \text{ ج} = \frac{1}{2} \text{ ع} + \frac{1}{2} \text{ ع} + \frac{1}{2} \text{ ع} + \frac{1}{2} \text{ ع}$$

جہاں ج مستقل ہے۔

۷۳۔ ایک نقطہ سے ایک ناقص کے چار عماد کھینچے گئے ہیں اگر ان عمادوں کے

مربعوں کا مجموعہ مستقل ہو تو نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

۷۴۔ نقطہ (ف، گ) سے ایک ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں ثابت

کرکہ ان عمادوں کے پائین پر ناقص کے ماس ایک ایسا ذوا ربعتہ الاضلاع بناتے ہیں کہ اگر (لا، ما) اور (لا، ما) متقابلہ راسوں کا کوئی زون ہو تو

$$\frac{لا}{ب} = \frac{ما}{ب} = ۱ - ۱$$

نیز ثابت کرکہ ذوا ربعتہ الاضلاع کے وتروں کے

نقاط وسطیٰ کو ملانے والے خط مستقیم کی مسادات ف ل ل ل ل گ م ہے۔

۷۵۔ ایک ناقص کے چار نقطوں پر ماس کھینچے گئے ہیں جو ایسے ہیں کہ ان نقطوں پر کے عماد باہم متقاطع ہوتے ہیں۔ چار مستطیل بنائے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک کے دو متضاد اضلاع ناقص کے محوروں پر ہیں اور ایک وتر اوپر کے ماسوں میں سے ایک ماس ہے۔ ثابت کرکہ دوسرے وتروں کے بعید مبرے ایک خط مستقیم میں واقع ہوتے ہیں۔

۷۶۔ ایک نقطہ ن سے ایک ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں جو ناقص سے نقطوں ۱، ۲، ۳، ۴ پر ملے ہیں۔ اگر ایک ایسا مخروطی کھینچا جائے جو نقطوں ۱، ۲، ۳، ۴ میں سے اور ناقص کے ماسکے میں سے گزرے اور ناقص کے نظیری مرتب کو مس کرے تو ثابت کرکہ ن، دو ثابت خطوں میں سے ایک پر واقع ہوتا ہے۔

۷۷۔ اگر ۱، ۲، ۳، ۴ پر کے عماد ایک نقطہ و پر ملیں تو س ۱، ۲، ۳، ۴ میں سے ایک ماسکے ہے۔

۷۸۔ کسی نقطہ سے ایک قائم زائر کے چار عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کرکہ ان عمادوں پر کے مربعوں کا مجموعہ اس فاصلہ کے مربع کے تین گنے کے مساوی ہے جو قائم زائر کے مرکز سے نقطہ کا ہے۔

۷۹۔ ناقص  $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$  کا ایک وتر کھینچا گیا ہے جو محور اعظم

سے ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے جس کا فاصلہ مرکز سے ۱ ہے۔ اس وتر

کے سروں پر ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کرکہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۸۰۔ کسی نقطہ سے ایک مخروطی کے چار عماد کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمادوں کا حاصل ضرب، اس نقطہ سے مخروطی کے ماسوں اور نقطہ سے متقاربوں کے فاصلوں کے مسلسل حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۸۱۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جس کے مزدوج قطروں کے سروں پر کے ماس خطوط مستقیم (لا + لا) = ع<sup>۲</sup>۔ اور (لا + لا) = ق<sup>۲</sup>۔ ہیں۔

۸۲۔ دائرہ لا + لا = ج<sup>۲</sup> کے کسی نقطہ سے ناقص  $\frac{لا}{لا} + \frac{لا}{لا} = ۱$

کے ماس ت ف ت ق کھینچے گئے ہیں اور دائرہ ت ف ق ناقص کو مکمل ف ت ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خط ف ق ہمیشہ ناقص

$$\frac{لا}{لا} + \frac{لا}{لا} = \frac{ج^2}{(لا - لا)}$$

کو مس کرتا ہے۔

۸۳۔ ایک مخروطی کا ایک ماسکی وتر، محور اعظم کے سروں پر کے ماسوں کو نقطوں ا ب پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ا ب کو قطر مانکر دائرہ کھینچا جائے تو وہ مخروطی کے ساتھ دہرا ماس رکھتا ہے۔

۸۴۔ ا ب ج د کوئی مستطیل ہے جو ایک ناقص کو جس کے ماسے س اور ہ ہیں محیط کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ ا ب س یا ا ب ہ امدادی دائرہ کے مساوی ہے۔

۸۵۔ ایک دائرہ جس کا مرکز ایک مکانی کے اس پر کے ماس پر ہے کھینچا گیا ہے، (۲۸۴) اور دائرہ اور مکانی کے چار مشترک ماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان زاویوں کے ماسوں کا مجموعہ جو یہ خطوط مکانی کے محور کے ساتھ بناتے ہیں صفر ہے۔

۸۶۔ امدادی دائرہ کے کسی نقطہ سے ایک ناقص کے ماس کھینچے گئے ہیں جو مرتب کو چار نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان میں سے دو نقطے اس خط پر واقع ہوتے ہیں جو ناقص کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ نیز معلوم کرو کہ دوسرے

دو نقطوں میں سے گزرنے والا خط محورِ اعظم کو کہاں قطع کرتا ہے۔

۸۷۔ اگر دو مرکز دار مخروطیوں کی مساداتیں  $E =$  اور  $D =$  ہوں اور ان کے مرکزوں پر  $E$  اور  $D$  کی قیمتیں  $E$ ،  $D$  ہوں تو ثابت کرو کہ خطوط  $JN$ ،  $JN$  کے نقطہ تقاطع کے طریق کی مسادات  $E = D =$  وہ ہے جہاں  $N$  ایک منحنی پر اور  $N$  دوسرے منحنی پر ہے اور  $N$ ،  $J$ ،  $J$  کے متوازی ہے۔ اس صورت کا امتحان کرو جبکہ مخروطی متشابہ اور متشابہ واقع ہوں۔

۸۸۔ دو دائرے ایک ناقص کے ساتھ دو ہر اندرونی تماس رکھتے ہیں اور ایک تیسرا دائرہ چار نقاط تماس میں سے گزرتا ہے۔ اگر ناقص کے کسی نقطہ پر ان تین دائروں کے تماس  $T$ ،  $T$ ،  $T$  ہوں تو ثابت کرو کہ  $T = T = T$ ۔

۸۹۔ اس مخروطی کی عام مسادات معلوم کرو جو دو دائروں  $(L_1)$ ،  $(L_2)$  کے ساتھ دو ہر تماس رکھے۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے وتر خاص کے سرے کے طریق کی مسادات  $(L_1)$ ،  $(L_2)$  کے ساتھ  $J = J$  ہے جبکہ مخروطی دائروں  $(L_1)$ ،  $(L_2)$  کے ساتھ دو ہر تماس رکھے۔

۹۰۔ ثابت کرو کہ خطوط  $L_1$ ،  $L_2$ ،  $L_3$  اور  $L_4$  =  $L_1$ ،  $L_2$ ،  $L_3$ ،  $L_4$  جو دو مخروطیوں

$(L_1 - L_2)$ ،  $(L_2 - L_3)$ ،  $(L_3 - L_4)$ ،  $(L_4 - L_1)$  کے مرکزوں پر  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$  ہوں تو ثابت کرو کہ

اور  $(L_1 - L_2)$ ،  $(L_2 - L_3)$ ،  $(L_3 - L_4)$ ،  $(L_4 - L_1)$  کے مرکزوں پر  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$  ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں ایک مخروطی کے مزدوج قطر ہیں۔

۹۱۔ اگر ایک ثابت نقطہ میں سے ایک ناقص کے وتر کھینچے جائیں اور ان پر انہیں قطر مان کر دائرے مرتب کئے جائیں تو ثابت کرو کہ ناقص کے ساتھ ان دائروں کے دوسرے وتر تقاطع بھی ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

۹۲۔ ثابت کرو کہ مخروطی  $L_1$ ،  $L_2$ ،  $L_3$ ،  $L_4$  کے مرکزوں پر  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$  ہوں تو

لا انتہا تعداد بنائی جاسکتی ہے جبکہ اضلاع مخروطی  $L_1$ ،  $L_2$ ،  $L_3$ ،  $L_4$  کے مرکزوں پر

کرتے ہوں۔

۹۳۔ اگر ایک ذوا ربعة الاضلاع کے تین اضلاع جہاں ذوا ربعة الاضلاع ایک مخروطی میں بنایا گیا ہے تین ثابت نقطوں میں سے جو ایک ہی خط مستقیم میں واقع ہیں گزریں تو ثابت کرو کہ چوتھا ضلع بھی ایک ثابت نقطہ میں سے جو اسی خط مستقیم میں واقع ہو گا گزرے گا۔

۹۴۔ اگر ایک ناقص کا ایک وتر ق ق ایک دئے ہوئے ہم مرکز دائرہ کو مس کرے اور وہ دائرہ جس کا قطر ق ق ہے ناقص کو مرکز نقطوں ق ق پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ق ق ایک دوسرے ہم مرکز ثابت دائرہ کو لف کرے گا۔

۹۵۔ ایک خط جو ایک ناقص کے مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہے محور اعظم کے سروں پر کے ماسوں کو نقطوں ق ق پر قطع کرتا ہے اور نقطوں ق ق سے ناقص کے دوسرے ماس نقطہ و پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ و کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

۹۶۔ ایک قائم زائد پر چار ثابت نقطے ل، م، ن، س ہیں اور اس ن کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ ن (ل) پر عمود ہے اور وہ ن س سے ل پر ملتا ہے؛ ن ج، ل ن پر عمود ہے اور وہ م س سے ج پر ملتا ہے؛ ن ب، ل س پر عمود ہے اور وہ م ن سے ب پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن (ل) ن = ن ب x ن ب = ن ج x ن ج۔

۹۷۔ ایک مکانی کے ایک ثابت قطر پر ن کوئی نقطہ ہے۔ ن سے منحنی کے عماد منحنی کو (ب، ج) پر قطع کرتے ہیں۔ ن (ل) ن ب، ن ج کے متوازی ماس، (ب، ج) پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثوں (ب ج اور ب ج کے رقبوں میں نسبت مستقل ہے۔

۹۸۔ ایک دائرہ (مرکز ج) کے قطر (ب) پر نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ن اور ب ن کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ لیس دائرہ کے مرکز کا طریق جو ان تین دائروں کو مس کرتا ہے دو ناقصوں پر مشتمل ہے جن کا ایک اس کے ج ہے۔



# گیارہواں باب

## مخروطیوں کے نظام

۲۰۶۔ مخروطی کی عام سے عام مساوات

$$x^2 + y^2 = 2 + 2x + 2y + 2z = 0$$

میں چھ مستقل  $x, y, z$  ہوں گے۔ لیکن چونکہ ہم مساوات کو کسی مستقل مقدار سے ضرب دیکتے ہیں یا تقسیم کر سکتے ہیں اور اس سے لا اور اس کے درمیانی رشتہ میں جو مساوات سے بیان ہوتا ہے کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی اس لیے فی الحقیقت صرف پانچ مستقل کسی مخصوص مخروطی کی مساوات میں ہوا کرتے ہیں چنانچہ یہ مستقل مقداریں وہ پانچ نسبتیں ہیں جو چھ مقداریں  $x, y, z$  ہوں گے ایک دوسرے کے ساتھ رکھی ہیں ہیں ایک مخروطی سے پانچ شرطیں پوری کرائی جاسکتی ہیں اور اس سے زیادہ نہیں۔ مثلاً مخروطی کو پانچ مفروضہ نقطوں میں سے گزرا جاسکتا ہے یا اس طرح کھینچا جاسکتا ہے کہ وہ چار مفروضہ نقطوں میں سے گزرے اور ایک دے ہوئے خط کو مس کرے۔ ان پانچ شرطوں سے جن کو کوئی مخروطی پورا کرے مستقلاً کے درمیان پانچ مساواتیں پیدا ہوتی ہیں اور یہ پانچ غیر تالعی مساواتیں پانچ نسبتوں کو متعین کرنے کے لیے ضروری اور کافی دونوں ہیں یہ ہو سکتا ہے کہ دی ہوئی مساواتوں سے نسبتوں کی قیمتوں کا ایک

زیادہ جٹ حاصل ہوں اور اس لیے ایک سے زیادہ مخروطی دی ہوئی شرطوں کو پورا کریں لیکن ایسے مخروطیوں کی تعداد محدود ہوگی اگر شرطیں فی الحقیقت ایک دوسرے پر منحصر نہ ہوں۔  
اگر صرف چار شرطیں (یا چار سے کم) دی گئی ہوں تو مخروطیوں کی لامتناہی تعداد ان شرطوں کو پورا کرے گی۔

وہ پانچ شرطیں جن کو کوئی مخروطی پورا کر سکتا ہے ایسی ہونی چاہئیں کہ ہر ایک شرط سے مستقلوں کے درمیان ایک رشتہ حاصل ہو مثلاً ایک مفروضہ نقطہ میں سے گزرنے کی شرط یا ایک مفروضہ خط مستقیم کو مس کرنے کی شرط۔

(۲۹۰)

بعض شرطیں ایسی ہوتی ہیں کہ ان سے مستقلوں کے درمیان دو یا زیادہ رشتے حاصل ہوتے ہیں اور کسی ایسی شرط کو مذکورہ پانچ شرطوں میں سے دو یا زیادہ سمجھا ہوگا۔ مثلاً

اگر ایک دے ہوئے نقطہ کو مخروطی کا مرکز بنانا ہے تو دو شرطیں پوری ہونی چاہئیں (دفعہ ۱۶۸)۔

اگر ایک ماسک دیا گیا ہے تو یہ دو ماس دے جانے کے معادل ہے [دفعہ ۱۹۴]۔  
اگر یہ دیا گیا ہے کہ ایک خط ایک مخروطی کو ایک دے ہوئے نقطہ پر مس کرتا ہے تو یہ دو شرطوں کے ہیں کیونکہ دے ہوئے مخروطی پر دو متصل نقطے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ایک متقارب کی سمت دی گئی ہے تو یہ اس کے معادل ہے کہ ایک نقطہ (لاتناہی پر) دیا گیا ہے۔

اگر متقارب کا محل دیا گیا ہے تو یہ دو شرطوں کے معادل ہے کیونکہ دو نقطے (لاتناہی پر) معلوم ہوتے ہیں۔

اگر محوروں کے محل دے گئے ہیں تو یہ تین شرطوں کے معادل ہے۔  
اگر خروج المرکز دیا گیا ہے تو یہ بالعموم ایک شرط کے معادل ہے لیکن چونکہ

$$\frac{z^2}{1-z^2} = \frac{(1-b^2) + \frac{1}{2}b^2}{1-b^2} \quad \text{[دفعہ ۱۹۲] اس لیے اگر } z = 0 \text{ دیا گیا}$$



ہے تو دو شرطیں ۱ = ب اور ۲ = . حاصل ہوتی ہیں -

۲۰۷ - پانچ نقطوں میں سے نہیں کوئی چار ایک خط مستقیم میں نہ ہوں ایک اور صرف ایک مخروطی کھینچا جاسکتا ہے -

اگر ان میں سے تین نقطے ایک خط مستقیم میں ہوں تو ان پانچ نقطوں میں سے گزرنے والا مخروطی خطوط مستقیم کا ایک زوج ہونا چاہئے کیونکہ کوئی خط مستقیم کسی مکانی، ناقص، یا زائد کو تین نقطوں پر نہیں مل سکتا - ان پانچ نقطوں میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کا محمولہ بالا زوج یہ ہے (۱) وہ خط مستقیم جس پر تین نقطے واقع ہیں اور (۲) وہ خط مستقیم جو دوسرے دو نقطوں میں سے گزرتا ہے -

لیکن اگر پانچ نقطوں میں سے دو نقطوں سے زیادہ ایک خط مستقیم نہ ہوں تو فرض کرو کہ ان میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کو محور لا اور دوسرے دو نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کو محور مایا گیا ہے - فرض کرو کہ ان محوروں کے حوالے سے محمولہ بالا چار نقطوں کے محدود (۱، ۲، ۳، ۴) (۵، ۶، ۷، ۸) اور (۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲) ہیں -

(۲۹۱)

$$\left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 0 \text{ اور } 1 = 0$$

وہ مخروطی ہیں جو ان چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں - اس لیے وہ تمام مخروطی جو ان چار نقطوں میں سے گزریں گے مساوات

$$1 = 0 + \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 0$$

سے حاصل ہوں گے - یہ مخروطی پانچویں نقطہ میں سے جس کے محدود لا، ما ہیں گزرنے کا اگر لہ کو ایسا منتخب کیا جائے کہ

$$لہ لا مآ + (لا مآ + مآ) (۱ - مآ) = (لا مآ + مآ) (۱ - مآ) = ۰$$

لہ کی ایک اور صرف ایک قیمت ہے جو اس مساوات کو پورا کرتی ہے اور اس سے ایک اور صرف ایک مخروطی ہے جو ان پانچ نقطوں میں سے گزرے گا۔

اگر ان میں سے چار نقطے ایک خط مستقیم پر ہوں تو ایک سے زیادہ مخروطی ان پانچ نقطوں میں سے گزریں گے کیونکہ ایسا مخروطی دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہوگا جن میں سے ایک تو وہ خط مستقیم ہے جس پر چار نقطے واقع ہیں اور دوسرا کوئی خط مستقیم ہے جو پانچویں نقطے میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۱۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو پانچ نقطوں

$$(۱, ۲), (۰, ۱), (۱, -۲), (-۱, ۰), (۲, -۳)$$

میں سے گزرتا ہے۔

$$خطوں (لا - مآ) (۱ - لا + مآ) = ۰ اور (لا + مآ) (۲ - لا + مآ) = ۰ کے زوج$$

پہلے چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے مخروطی

$$(لا - مآ) (۱ - لا + مآ) - (لا + مآ) (۲ - لا + مآ) = ۰$$

بھی ان چار نقطوں میں سے گزرتا ہے۔ نقطہ (۲, -۳) اس مخروطی پر ہوگا اگر

$$لہ = ۰ اور اس لیے مطلوبہ مساوات$$

$$لا + ۱۹ لا + ۱۴ مآ - ۴ مآ - ۱ = ۰ ہے۔$$

مثال ۲۔ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطی

کی عام مساوات معلوم کرنا۔

ان میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط کو محور لا اور دوسرے دو نقطوں کو

ملانے والے خط کو محور ما قرار دو اور فرض کرو کہ وہ خطوط جن کی مساواتیں لا + ب ما = ۰

اور لا + ب ما = ۰ ہیں محوروں کو دے ہوئے نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔

اب لا ما = ۰ اور (لا + ب ما - ۱) (لا + ب ما - ۱) = ۰ دو مخروطی

(۲۹۲)

ہیں جو دئے ہوئے چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے وہ تمام مخروطی جوائن چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں مساوات

$$\begin{aligned} & \text{لا ماما} (1+1 \text{ ب ماما}) (1+1 \text{ لا ماما}) = 1 \dots (1) \\ & \text{یا} (1+1 \text{ لا ماما}) (1+1 \text{ ب ماما}) = 1 \dots (2) \end{aligned}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۲۰۹ — دفعہ ۲۰۸ کی مساوات (۲) مکانی کو تعبیر کرے گی اگر درجہ دوم کی رقمیں ایک کامل مربع ہوں یعنی اگر

$$۴ (1+1 \text{ ب ماما}) = 1 \dots$$

اس مساوات کی دو اصلیں ہیں اور اس لئے دو مکانی چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں گے۔ یہ مکانی حقیقی ہوں گے اگر مساوات کی اصلیں حقیقی ہوں اور یہ اس وقت ہوگا جبکہ  $1+1 \text{ ب ماما}$  مثبت ہو۔ یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر  $1+1 \text{ ب ماما}$  منفی ہو تو ذرا بعثۃ الاضلاع متداخلہ ہوگا۔ اس صورت میں مکانی خیالی ہوتے ہیں جیسا کہ ہندسی طور پر واضح ہے۔ جب مساوات (۲) دفعہ ۲۰۸ کی درجہ دوم کی رقمیں ایک کامل مربع

ہوں تو یہ مربع  $(1+1 \text{ لا ماما}) (1+1 \text{ ب ماما})$  ہونا چاہئے۔ پس [دفعہ ۱۷۲] مذکورہ بالا دو مکافیوں کے محاور ان خطوں کے متوازی ہیں جن کی مساواتیں

$$1+1 \text{ لا ماما} = 1 \dots \text{یا} 1+1 \text{ لا ماما} = 1 \dots$$

یہ دو خطوط مستقیم دئے ہوئے چار نقطوں میں سے گزرنے والے کسی مخروطی کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں [دفعہ ۱۸۴]

پس وہ تمام مخروطی جو مفروضہ چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں مزدوج قطروں کا ایک زوج رکھتے ہیں جو ان نقطوں میں سے

گزرنے والے دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں۔

۲۱۔ ان محروطیوں کے مرکوزوں کا طریق معلوم کرنا جو چار ثابت نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

اس نظام کے کسی محروطی کی مساوات حسب دفعہ ۲۰۸

$$لا + ما + (لا + ب - ما - ا) + (لا + ب - ما - ا) = ۰$$

ہے۔ اس محروطی کے مرکز کے محروم مساواتوں

$$لا + ما + (لا + ب - ما - ا) + (لا + ب - ما - ا) = ۰$$

اور  $لا + ب + (لا + ب - ما - ا) + (لا + ب - ما - ا) = ۰$  سے حاصل ہوتے ہیں۔

ان مساواتوں کو علی الترتیب لا اور ما سے ضرب دو اور تفریق کرو تو

(۲۹۳)

۱ کی تمام قیمتوں کے لیے حاصل ہوگا

$$(لا - ب + ما - ا) + (لا - ب + ما - ا) + (لا + ب - ما - ا) = ۰$$

$$یا ۲ لا - ۲ ب + ۲ ما - ۲ ا + (لا + ب - ما - ا) + (لا + ب - ما - ا) = ۰$$

اس لیے مرکز کا طریق ایک محروطی ہے جس کے مقارب خطوط لا و لا

- ب ب ما = کے متوازی ہیں۔ یعنی ان دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی

ہیں جو چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔ [یہ دو مکافی نظام کے محروطی ہیں

اور اس لیے ان کے مرکز مرکوزوں کے طریق پر لاتنا ہی پر کے نقطے ہیں]۔

ثبوت دیگر۔ اگر  $ف = ۰$  اور  $ف = ۰$  کوئی دو محروطی ہوں جو چار دل ہوں

نقطوں میں سے گزرتے ہیں تو ان چار نقطوں میں سے گزرنے والا کوئی اور محروطی مساوات

$$لا + ف + لا + ف = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ پس مرکز مساواتوں

$$لا + ف + لا + ف = ۰$$

$$\text{اور } \frac{L_1}{F_{Z1}} + \frac{L_2}{F_{Z2}} = 0$$

سے حاصل ہوگا۔ اس لیے مرکزوں کا طریق مخروطی

$$= \frac{F_{Z1}}{F_{Z2}} - \frac{F_{Z1}}{F_{Z2}} = 0$$

ہے -

۲۱۱۔ دفعہ ۲۱۰ میں حاصل شدہ مرکزوں کا طریق مبداء میں سے گزرتا ہے یعنی دے ہوئے چار نقطوں میں سے دو کو ملانے والے خط اور دیگر دو کو ملانے والے خط کے نقطہ تقاطع میں سے۔ پس تشاکل سے نتیجہ نکلتا ہے کہ اس طریق کو ان چار نقطوں میں سے گزرنے والے دو خطوں کے دیگر زوجوں کے نقاط تقاطع میں سے بھی گزرنا چاہئے۔ [یہ فوراً معلوم کیا جاسکتا تھا کیونکہ خطوں زوج نظام کے مخروطی ہیں اور ان کے تقاطع درج مخروطیوں کے مراکز ہیں اور اس لیے یہ نقاط تقاطع مرکزوں کے طریق پر واقع ہیں] -

مرکز طریق محور لا کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں لا = ۰ اور جہاں لا =  $\frac{1}{3}$  اور  $\frac{1}{3}$  -

اس لیے طریق نقطوں  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  اور  $(\frac{1}{3}, 0)$  کے درمیان وسطی میں سے گزرتا ہے یعنی اس خط کے نقطہ وسطی میں سے جو ان دو ثابت نقطوں کو ملاتا ہے اسی طرح یہ طریق اس خط کے نقطہ وسطی میں سے بھی گزرتا ہے جو چار نقطوں میں سے کسی اور دو کو ملاتا ہے۔

پس اگر 'ا' 'ب' 'ج' 'د' کوئی چار نقطے ہوں تو 'ا' 'ب' اور 'ج' 'د' 'ا' 'ج' اور 'ب' 'د' اور 'ا' 'د' اور 'ب' 'ج' کے تین نقاط تقاطع اور خطوط 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ا' 'د' 'ب' 'ج' 'د' کے تقاطع وسطی سب کے سب ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں (اس مخروطی کو 'ا' 'ب' 'ج' 'د' کا پہلے نو نقطی مخروطی کہہ سکتے ہیں) اور یہ مخروطی ان مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق

جو چار نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' میں سے گذرتے ہیں۔  
'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کے نو نقطی مخروطی کا مرکز

$$۴ = \frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ب} = ۴، \frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ب} = ۴$$

سے حاصل ہوتا ہے اور اس لیے وہ چار نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کا مرکز ہندسی ہے۔  
۲۱۲۔ اگر 'ا' اور 'ب' کی علامتیں ایک ہی ہوں تو ہم دفعہ ۲۱۰ سے یہ دیکھتے ہیں کہ مرکزوں کا طریق ایک زائد ہے۔ اگر 'ا' اور 'ب' کی علامتیں مختلف ہوں تو مرکزوں کا طریق ایک ناقص ہے۔ اگر 'ا' = 'ب' یعنی اگر چار نقطے ایک دائرہ پر ہوں تو مرکزوں کا طریق ایک قائم زائد ہے۔ اگر 'ا' = 'ب' اور محاور علی القوانیم ہوں تو نظام کے تمام مخروطی قائم زائد ہیں اور مرکزوں کا طریق ایک دائرہ ہے۔ اس صورت میں چار نقطوں میں سے کسی دو کو ملانی والا خط اس خط پر عمود ہوتا ہے جو دوسرے دو نقطوں کو ملاتا ہے، اس لیے 'د' مثلث 'ا'، 'ب'، 'ج' کا مرکز عمودی ہے۔

پس ایک دائرہ مثلث 'ا'، 'ب'، 'ج' کے عمودوں کے پائینوں میں سے اور 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'ا'، 'د'، 'ب'، 'ج'، 'د' کے نقاط وسطیٰ میں سے گذرے گا جہاں 'د' مثلث 'ا'، 'ب'، 'ج' کا مرکز عمودی ہے۔ یہ دائرہ ان تمام مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق ہے (جو سب کے سب قائم زائد ہیں) جو 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' میں سے گذرتے ہیں۔ اس دائرہ کو نو نقطی دائرہ کہتے ہیں۔  
۲۱۳۔ دفعہ ۲۰۸ میں جن چار نقطوں کی تعریف کی گئی ہے ان میں سے گذرنے والے کسی مخروطی کے متقارب خطوط

$$ل = لا + (ا + لا + ب + ما) = ۰$$

$$یا لا + (ا + لا + ب + ما) = ۰$$

کے متوازی ہوتے ہیں لیکن یہ خطوط (دفعہ ۱۸۴) مرکزوں کے طریق کے مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔ اس لیے چار نقطوں میں سے گذرنے والے کسی مخروطی کے متقارب مرکزوں کے طریق کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں چنانچہ

(۲۹۵)

اس قائم زائد کے متغایب جو چار نقطوں میں سے گزرتا ہے مرکزوں کے  
طریق کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ چار دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کے  
بیک نظام کے لحاظ سے ایک ثابت نقطہ کا قطبی ایک ثابت نقطہ میں سے گزریگا۔  
ثابت نقطہ کو مبدا قرار دو اور فرض کرو کہ مخروطیوں میں سے دو

$$س \equiv لا + ۲ لا + ب + ما + گ + لا + ف + ج = .$$

اور  $س \equiv لا + ۲ لا + ب + ما + گ + لا + ف + ج = .$   
ہیں۔ تب اس نظام کا کوئی مخروطی  $س = لا + س = .$  سے حاصل ہوتا ہے۔  
مبدا کا قطبی

گ + لا + ف + ج۔  $لا + گ + لا + ف + ج = .$   
ہے اور یہ،  $لا$  کی تمام قیمتوں کے لیے، خطوط

گ + لا + ف + ج = . اور گ + لا + ف + ج = .  
کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۲۔ چار دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کے  
نظام کے لحاظ سے کسی دیے ہوئے خط مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک مخروطی ہوگا۔  
ثابت خط مستقیم کو محور لا قرار دو اور فرض کرو کہ ایک مخروطی کی مساوات  
مثال اس کے نمونہ کی ہے۔  $(لا، ما)$  کا قطبی

$$لا (لا + ۲ لا + ب + ما + گ + لا + ف + ج) + (لا + ۲ لا + ب + ما + گ + لا + ف + ج) =$$

۔  $لا (لا + ۲ لا + ب + ما + گ + لا + ف + ج) + (لا + ۲ لا + ب + ما + گ + لا + ف + ج) =$   
ہے۔ اگر یہ وہی خط ہے جو  $ما = .$  ہے تو لا کا سر اور مستقل رقم صفر ہونی چاہئے۔ انکو  
صفر کے مساوی رکھو اور  $لا$  کو سا فہ کرو۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ کسی مخروطی کے لحاظ سے جو ایک دیے ہوئے مربع  
راہوں میں سے گزرتا ہے ایک دیے ہوئے خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک قائم زائد ہے۔





پر مخروطی کے کسی نقطہ سے کھینچے گئے ہیں۔

۲۱۵۔ اگر ایک مخروطی پر چار نقطے 'ف'، 'ق'، 'س'، 'س' ہوں اور 'ق'، 'ف'، 'س'، 'س' نقطہ 'ا' پر 'ق'، 'س'، 'ف'، 'س' نقطہ 'ب' پر، اور 'ف'، 'س'، 'ق'، 'س' نقطہ 'ج' پر ملیں تو تین نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج' میں سے ہر ایک، مخروطی کے لحاظ سے، اس خط کا قطب ہوگا جو دوسرے دو نقطوں کو ملاتا ہے۔

ا) کو مبدا، اور خطوط 'ا'، 'س'، 'س'، 'ا' کو علی الترتیب محور لا اور محور مقرر دو۔

فرض کرو کہ 'ف'، 'س' اور 'ق'، 'س' کی مساواتیں

$$(۱) \quad \text{ا} + \text{ب} - \text{ما} = ۱ \quad \text{اور} \quad \text{ا} + \text{ب} - \text{ما} = ۱$$

$$(۲) \quad \text{ا} + \text{ب} - \text{ما} = ۱ \quad \text{اور} \quad \text{ا} + \text{ب} - \text{ما} = ۱$$

ہیں۔ تب 'ف'، 'س' اور 'ق'، 'س' کی مساواتیں

$$(۳) \quad \text{ا} + \text{ب} - \text{ما} = ۱ \quad \text{اور} \quad \text{ا} + \text{ب} - \text{ما} = ۱$$

$$(۴) \quad \text{ا} + \text{ب} - \text{ما} = ۱ \quad \text{اور} \quad \text{ا} + \text{ب} - \text{ما} = ۱$$

ہوں گی۔

مخروطیوں 'لا'، 'ا' اور 'ا' + 'ب' - 'ما' = ۱ کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے کسی مخروطی کی مساوات

$$\text{لا} + \text{ا} + \text{ب} - \text{ما} = ۱ \quad \text{اور} \quad \text{ا} + \text{ب} - \text{ما} = ۱$$

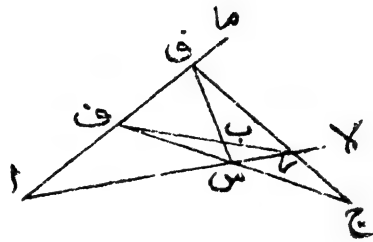
ہے۔ اس مخروطی کے مبدا کا قطبی [دفعہ ۱۸۰]

$$\text{ا} + \text{ب} - \text{ما} = ۲$$

ہے۔ اس کو شکلوں

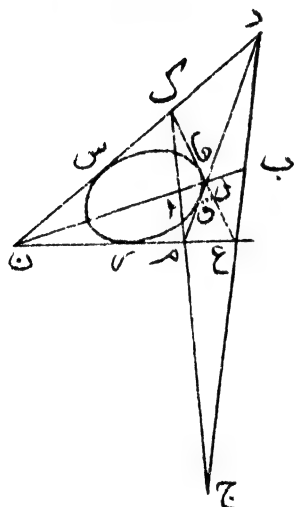
$$\text{ا} + \text{ب} - \text{ما} = ۱ \quad \text{اور} \quad \text{ا} + \text{ب} - \text{ما} = ۱$$

اور  
 میں لکھتے ہیں کہ ہم دیکھتے ہیں کہ مبداء کا قطبی خطوط (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع  
 اور نیز خطوط (۳) اور (۴) کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔ اس لیے  
 مخروطی کے لحاظ سے (۱) کا قطبی خط ج ہے۔  
 اسی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ج (۲) کا قطبی ہے اور  
 (۱) ج کا قطبی ہے۔



خود مزدوج یا خود قطبی مثلث : وہ مثلث ہوتا ہے جس کا ہر اس  
 ایک مخروطی کے لحاظ سے، مقابل کے ضلع کا قطب ہوتا ہے۔  
 ۲۱۶۔ اگر ایک مخروطی ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے ضلعوں کو  
 مس کرے اور (۱) ج وہ مثلث ہو جو ذوار بعتہ الاضلاع کے  
 وتروں سے بنتا ہے تو (۱) ج، مخروطی کے لحاظ سے، خود مزدوج  
 مثلث ہوگا۔  
 فرض کر لیں کہ 'ق'، 'س'، 'ن'، 'پ'، 'ف'، 'خ'، 'ا'، 'ب'، 'ج' کے نقاط تماس ہیں۔

تب مثل میں 'ل' ف ق کا قطب ہے اور 'ن' میں 'س' کا قطب ہے۔  
اس لیے 'ل' ن' ف ق اور 'س' کے نقطہ تقاطع کا قطبی ہے۔ اسی طرح  
'گ' م' 'س' ف اور 'ق' کے نقطہ تقاطع کا قطبی ہے۔  
پس 'ا' 'ج' 'ل' 'ن' اور 'گ' م' کا نقطہ تقاطع ہے اُس خط کا قطب ہے جو  
'ف' 'ق' 'س' کے نقطہ تقاطع اور 'س' 'ن'



۲۱۷۔ اُس مخروطی کی عام مساویہ معلوم کرنا جو محدود مخروطوں کو مس کرے۔

اگر نقاطِ تماس کو ملانے والے خط کی مساوات  
 ۱ + ۱ = ۱۔ ۱ ہو تو اس مخروطی کی مساوات جو مخروطی لا = ۱۔ ۱ کے ساتھ ان نقطوں  
 دو ہر تماس رکھے جہاں خط ۱ + ۱ = ۱۔ ۱ اس سے ملتا ہے بموجب فقرہ ۱۸۷  
 (۱ + ۱ = ۱۔ ۱) - ۲ = ۱ + ۱ = ۱۔ ۱

۲۱۸۔ اُس مخرومی کی عام مساوات معلوم کرنا جو چار دئے ہوئے خطوں کو مس کرے۔

ان میں سے دو خطوط مستقیم کو محاور قرار دو اور فرض کرو کہ دوسرے دو خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$ل + لا + م = ۱ - ۱ = ۰ \quad اور \quad ل + لا + م = ۱ - ۱ = ۰$$

ہیں۔ محوروں کو مس کرنے والے کسی مخروطی کی مساوات

$$(۱) (لا + ب - م - ۱) = ۲ - ل - لا + م = ۰ \quad \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔

وہ خطوط جو مبداء کو ان نقطوں سے ملاتے ہیں جہاں (۱) ل + لا + م = ۰ کو قطع کرتا ہے مساوات

$$(۲) (لا + ب - م - ۱) = ۲ - ل - لا + م = ۰ \quad \dots \dots \dots (۲)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

خط مخروطی کو مس کریگا اگر خطوط (۲) منطبق ہوں جس کے لیے شرط

$$(۱ - ل) (ب - م) = (۱ - ل) (ل - ب - م) - ل = ۰$$

ہے۔ اس لیے

$$ل = ۲ - (۱ - ل) (ب - م)$$

پس چار خطوط مستقیم

(۲۹۹)

$$لا = ۰، م = ۰، ل + لا + م = ۱ - ۱ = ۰، اور ل + لا + م = ۱ - ۱ = ۰$$

کو مس کرنے والے مخروطی کی عام مساوات

$$(۱) (لا + ب - م - ۱) = ۲ - ل - لا + م = ۰$$

ہے جہاں مبدلوں 'ب'، 'ل' میں ربط

$$ل = ۲ - (۱ - ل) (ب - م) = ۲ - (۱ - ل) (ل - ب - م)$$

ہیں۔

۲۱۹۔ ان مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرنا جو چار دے ہوئے

خطوط مستقیم کو مس کریں۔

اگر دے ہوئے خطوں میں سے دو کو محاور قرار دیا جائے اور دیگر دو کی

مساداتیں

ل لا + م م - ۱ = ۰ اور ل لا + م م - ۱ = ۰  
ہوں تو محفوظی کی مساوات  
(۱ لا + ب م - ۱) - ۲ ل لا م = ۰  
ہوگی بشرطیکہ

$$\begin{aligned} (۱) \quad & ۲ = (۱ - ل) (ب - م) \dots \dots \dots (۱) \\ (۲) \quad & ۲ = (۱ - ل) (ب - م) \dots \dots \dots (۲) \end{aligned}$$

محفوظی کا مرکز مساواتوں

(۱ لا + ب م - ۱) - ل لا م = ۰ اور ب (۱ لا + ب م - ۱) - ل لا م = ۰  
سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے

۱ لا = ب م، اور ۱ (۲ لا - ۱) = ل لا م، (۳)  
مطلوبہ طریق معلوم کرنے کے لیے مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳)  
سے 'ب' اور 'ل' کو ساقط کرنا چاہئے۔  
(۱) اور (۳) سے

$$(۱) \quad ۲ لا - ۱ = (ب - م) (۱ - ل) \quad (۲) \quad ۲ = (ب - م) (۱ - ل) \quad (۳) \quad ۱ لا = ب م$$

اس لیے

$$(۱) \quad ۲ لا + ۲ م - ۱ = ۲ ل م \quad (۲) \quad ۲ لا + ۲ م - ۱ = ۲ ل م$$

کیونکہ ۱ لا = ب م

اسی طرح (۲) اور (۳) سے

$$(۱) \quad ۲ لا + ۲ م - ۱ = ۲ ل م \quad (۲) \quad ۲ لا + ۲ م - ۱ = ۲ ل م$$

۱ کو ساقط کرنے پر مرکوزوں کے طریق کی مساوات

$$\frac{۲ لا + ۲ م - ۱}{ل م} = \frac{۲ لا + ۲ م - ۱}{ل م}$$

حاصل ہوتی ہے۔

پس مطلوبہ طریق وہ خط مستقیم ہے جس کی مساوات

$$۲ \text{ لا} = \left( \frac{1}{م} - \frac{1}{م} \right) + ۲ \left( \frac{1}{ن} - \frac{1}{ن} \right) - \frac{1}{ن} + \frac{1}{م} = ۰$$

ہے۔ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ خط مستقیم ذواربعتہ الاضلاع کے وتروں کے نقاط وسطیٰ میں سے گزرتا ہے، صریحاً یہ درست ہے کیونکہ کوئی وتر چار خطوط کو مس کرنے والے ایک بہت ہی پتلے ناقص کی انتہائی شکل ہے اور اس ناقص کا مرکز انتہا میں وتر کا نقطہ وسطیٰ ہے۔ پس ذواربعتہ الاضلاع کے تین وتروں کے نقاط وسطیٰ ان مخروطیوں کے مرکوزوں کے طریق پر واقع ہوتے ہیں جو ذواربعتہ الاضلاع کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔ [دیکھو صفحات ۲۴۴، ۲۸۶]

۲۲۔ وہ تمام مخروطی جو محوروں کو ان نقطوں پر مس کرتے ہیں جہاں خط ۱ لا + ب ما - ۱ = ۰ محوروں کو قطع کرتا ہے مساوات  
 $(۱ لا + ب ما - ۱) = ۲ لہ لا$   
 سے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ مخروطی مکانی ہوگا اگر لہ ایسا ہو کہ درجہ دوم کی ریشیں ایک کامل مربع بنائیں، اس کے لیے شرط  
 $(۱ ب - ۲ لہ) = ۰$

ہے۔

۲۳۔ لہ = ۰ یا لہ = ۲ ب  
 قیمت لہ = ۰ سے منطبق خطوط مستقیم کا ایک زوج  $(۱ لا + ب ما - ۱) = ۰$  حاصل ہوتا ہے۔

پس مکانی کے لیے لہ = ۲ ب چنانچہ منحنی کی مساوات

$$(۱ لا + ب ما - ۱) = ۲ ب لہ لا$$

حاصل ہوتی ہے جس کو شکل

$$۱ = \sqrt{۱ لا + ب ما}$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

۲۲۱۔ مکانی  $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 1$  کے کسی نقطہ پر تماس کی (۳۰۱)

مساوات معلوم کرنا۔

ہم منحنی کی مساوات کو منطبق بنا سکتے ہیں اور اس کے بعد دفعہ ۸، میں  
جمل شدہ ضابطہ کا استعمال کر سکتے ہیں۔ لیکن نتیجہ کو سادہ تر شکل میں حسب ذیل  
طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے:

منحنی پر کے دو نقطوں (لا، ما) اور (لا، ما) کو ملانے والے خطِ مستقیم  
کی مساوات

$$\frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{ما - ما}{ما - ما} \dots \dots \dots (۱)$$

ہے مع شرائط  $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 1$  اور  $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 1$  کے۔ (۲)  
ان شرطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 1 \dots \dots \dots (۳)$$

(۱) اور (۳) کی متناظر طرفوں کو ضرب دو تو

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 1 \dots \dots \dots (۳)$$

اس لیے (لا، ما) پر کے تماس کی مساوات

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 1 \dots \dots \dots (۳)$$

لیکن چونکہ  $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 1$  اس لیے تماس کی مساوات

$$لا + \frac{1}{لا} = \frac{ب}{م} = ۱$$

ہے۔ محروطی کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی کی مساوات معلوم کرنا ہو تو مکانی کی مساوات کی منطق شکل استعمال کرنی چاہئے۔

مثال ۱۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ خط لا + م = ۱۔ مکانی

$$لا + لا + ب = م = ا کو مس کرے۔$$

کسی نقطہ (لا، م) پر کے ماس کی مساوات

$$لا + \frac{1}{لا} = \frac{ب}{م} = ۱$$

۳۰۲) ہے۔ یہ مساوات خط کی مساوات کے حاصل ہوگی اگر ل =  $\frac{1}{لا}$  اور م =  $\frac{ب}{م}$

$$یا اگر \frac{1}{ل} = لا + لا اور \frac{ب}{م} = ب + ب$$

پس مطلوبہ شرط

$$۱ = \frac{ب}{م} + \frac{1}{ل}$$

۴۔

مثال ۲۔ مکانی لا + لا + ب = م اس کے معلوم کرنا۔

وہ دائرہ جو ت ق کو ت پر مس کرتا ہے اور جو ف میں سے گزرتا ہے ماسکہ میں سے [دیکھو دفعہ ۱۶۵ (۴) دو ماس منطبق ہوتے ہیں] بھی گزرتا ہے۔

یہ دو نقطے ف اور ق (۱/۲) اور (۱/۲) ہیں۔ اس لیے ماسکہ ان دونوں

دائرہوں پر ہے جن کی مساواتیں



$$لا + ۲ لا ما جم سہ + ما - ۲ - \frac{لا}{۱} = ۰$$

$$لا + ۲ لا ما جم سہ + ما - ۲ - \frac{ما}{ب} = ۰$$

اور

ہیں۔ پس ماسکہ مساواتوں

$$\frac{لا}{۱} + ما + ۲ لا ما جم سہ = \frac{لا}{۱} = \frac{ما}{ب}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{۱}{لا + ۲ لا ما جم سہ + ما - ۲} = \frac{ما}{ب} = \frac{لا}{۱}$$

مثال ۳۔ مکانی  $لا + لا + ما = ا$  کا مرتب معلوم کرنا۔

مرتب علی القوائم ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ہے۔ اب خط  $لا + ما$  =  $ا$  پر عمود ہوگا اگر  $م$ ۔  $ل$  جم سہ =  $۰$ ، اور خط مکانی کو مس کرے گا

اگر  $\frac{ل}{م} + \frac{ا}{ل} = ۱$ ۔ پس محور لاپکادہ مقطوعہ جو ماس سے جو محور لاپر عمود ہے

منقطع ہوتا ہے  $\frac{ا}{ل} (۱ + \frac{ب}{جم سہ}) = ۱$  سے حاصل ہوتا ہے۔

پس نقطہ  $(\frac{ب}{جم سہ}, \frac{ا}{ل})$  مرتب پر ہے۔

اسی طرح نقطہ  $(\frac{ا}{ل}, \frac{ب}{جم سہ})$  بھی مرتب پر ہے۔

اسی لیے مطلوبہ مساوات  $لا (ب + ل جم سہ) + ما (ل + ب جم سہ) = جم سہ$  ہے۔

مثال ۴۔ مکانی  $لا + لا + ما = ا$  کا محور معلوم کرنا۔

چونکہ  $(\lambda + \mu - \nu) = 0$ ۔  $\lambda + \mu - \nu = 0$ ۔  
 $\lambda + \mu - \nu = 0$ ۔  $\lambda + \mu - \nu = 0$ ۔  
 اب خطوط  $\lambda - \mu = 0$  اور  $\lambda + \mu - \nu = 0$ ۔  
 ہیں [دفعہ ۲۴] اگر

$$\lambda + \mu - \nu = 0 \quad \lambda + \mu - \nu = 0$$

پس محور کی مساوات

$$\lambda - \mu = 0 \quad \lambda + \mu - \nu = 0$$

ہے۔

[اس پر کے محاس کی مساوات

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu - \nu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu - \nu} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu - \nu}$$

حاصل ہوگی]۔

## ہم ماسکی مخروطی

۲۲۲۔ چونکہ کسی مخروطی کے ماسکے اس کے محور پر ہوتے ہیں اس لیے  
 اگر دو مخروطی ہم ماسکی ہوں تو ان کے محاور ایک ہی ہونے چاہئیں۔  
 مساوات

$$1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu - \nu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu - \nu}$$

۱۔ کی مختلف قیمتوں کے لیے ہم ماسکی نظام کے مختلف مخروطیوں کو تعبیر کریں گے  
 کیونکہ مرکز سے ماسکے کا فاصلہ

$$\left\{ (\lambda + \mu) - \nu \right\} \left\{ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \right\}$$

ہے۔

۲۲۳ — ہم ماسکی مخروطیوں کے نظام کی مساوات

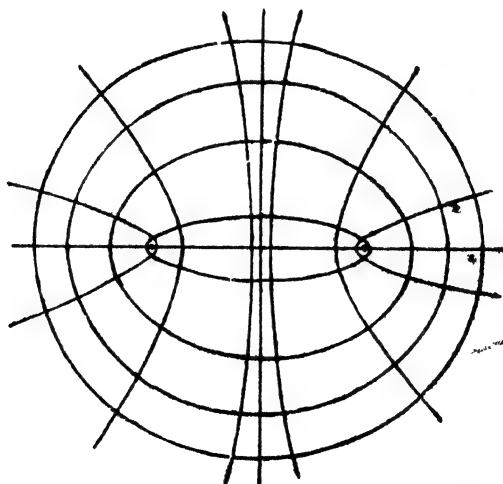
$$1 = \frac{a^2}{b^2 + l^2} + \frac{a^2}{l^2 + l^2}$$

ہے۔ اگر لہ مثبت ہو تو منحنی ایک ناقص ہے۔

منحنی کے صدر محور بڑھنے کے جبکہ لہ بڑھے، اور ان کی نسبت ایک سے قریب اور قریب تر ہوتی جائے گی جیسے لہ زیادہ اور زیادہ تر بڑھے گا چنانچہ انتہا میں ایک ہم ماسکی ناقص الاستہابی نصف قطر کا ایک دائرہ ہوگا۔

اگر لہ منفی ہے تو صدر محور گھٹنے کے جبکہ لہ بڑھے اور نسبت  $\frac{b^2 + l^2}{l^2 + l^2}$  بھی

گھٹنے کے جبکہ لہ بڑھے گا اور اس لیے ناقص چٹا اور زیادہ چٹا ہوتا جائے گا حتیٰ کہ لہ - ب کے مساوی ہو جائے اور اس انتہائی صورت میں محور (۳-۳) معدوم ہوگا اور محور اعظم ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کے مساوی ہوگا۔ پس ماسکوں کو ملانیو الاخطی ناقص ہم ماسکی مخروطیوں کی ایک انتہائی شکل ہے۔



اگر  $b^2 +$  لہ منفی ہو تو کسی ایک زائد ہے۔  
اگر  $b^2 +$  لہ ایک چھوٹی منفی مقدار ہو تو زائد کا قاطع محور ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کے تقریباً مساوی ہے چنانچہ اس خط کا تکملہ (Complement) جو ماسکوں کو ملاتا ہے زائد کی ایک انتہائی شکل ہے۔

زائد کے مقاربوں کا درمیانی زائد یہ کبیر اور کبیر تر ہوتا جائے گا جیسے۔  
لہ کبیر اور کبیر تر ہوگا، اور انتہا میں منحنی کی دونوں شاخیں محور پر منطبق ہوں گی۔  
اگر لہ منفی ہو اور  $b^2$  سے عدد بڑا ہو تو منحنی خیالی ہوگا۔

۴۲۴ (۲۰۵) ہم اسکی نظام کے دو محروطی کسی دے ہوئے نقطہ میں سے گذرتے ہیں ثابت کریں کہ ان میں سے ایک محروطی ناقص ہے اور دوسرا زائد۔  
فرض کریں کہ ابتدائی محروطی کی مساوات

$$1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{r^2}$$

ہے تو کسی ہم ماسکی محروطی کی مساوات

$$1 = \frac{a^2}{(b^2 + l^2)} + \frac{a^2}{(r^2 + l^2)}$$

ہوگی۔ یہ دے ہوئے نقطہ (لا، ما) میں سے گذرے گا اگر

$$1 = \frac{a^2}{b^2 + l^2} + \frac{a^2}{r^2 + l^2}$$

اس میں رکھو  $b^2 + l^2 = r^2 + l^2$  تو

$$l^2 + l^2 + a^2 = (l^2 + r^2 + a^2) - (l^2 + b^2 + a^2) = 0$$

$$یا \quad l^2 = (l^2 + a^2 - r^2) - (l^2 + a^2 - b^2) = 0$$

یہ مساوات کہ میں دو درجی ہے اور اس کی دونوں اصلیں حقیقی ہیں اور مختلف علامت ہیں۔ اس لیے دو محروطی ہیں جن میں سے ایک کے لیے  $b^2 +$  لہ مثبت ہے اور دوسرے کے لیے منفی ہے، اس لیے ایک محروطی

ناقص ہے اور دوسرا زائد۔

۲۲۵۔ ہم ماسکی نظام کا ایک مخروطی اور صرف ایک مخروطی

ایک دے ہوئے خط مستقیم کو مس کرے گا۔

فرض کرو کہ دے ہوئے خط کی مساوات

$$ل + م - ۱ = ۰$$

ہے۔ یہ خط مستقیم مخروطی

$$۱ = \frac{ل^۲}{ل + م} + \frac{م^۲}{ل + م}$$

کو مس کرے گا اگر

$$[۱۱۶] (ل + م) + (ل + م) = ۱$$

جس سے ل کی ایک اور صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔ پس ایک ہم ماسکی مخروطی دے ہوئے خط کو مس کرے گا۔

۲۲۶۔ دو ہم ماسکی مخروطی اپنے تمام مشترک نقطوں پر ایک

(۳۰۶)

دوسرے کو علی القوام قطع کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطیوں کی مساواتیں

$$۱ = \frac{ل^۲}{ل + م} + \frac{م^۲}{ل + م} \text{ اور } ۱ = \frac{ل^۲}{ل + م} + \frac{م^۲}{ل + م}$$

ہیں اور فرض کرو کہ (لا، ما) ایک مشترک نقطہ ہے۔ تب محدود لا، ما اوپر کی دونوں مساواتوں کو پورا کریں گے۔ اس لیے عمل تفریق سے

$$۰ = \frac{ل^۲}{ل + م} + \frac{م^۲}{ل + م} - \left( \frac{ل^۲}{ل + م} + \frac{م^۲}{ل + م} \right) \dots (۱)$$

اب (لا، ما) پر کے مماسوں کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{لا^۲}{ب^۲} + \frac{لا^۲}{ب^۲} = ۱$$
 اور  $\frac{لا^۲}{ب^۲} + \frac{لا^۲}{ب^۲} = ۱$   
 ہیں۔ پس شرط (۱) سے ظاہر ہے کہ یہ مماس ایک دوسرے سے علی التوا ہیں۔  
 ۲۲۷۔ دو دے ہوئے ہم ماسکی مخروطیوں کے کوئی دو متوازی  
 مماس کھینچے گئے ہیں اور ان مماسوں پر مرکز سے عمود نکالے گئے  
 ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہے۔

فرض کرو کہ مخروطیوں کی مساواتیں

$$\frac{لا^۲}{ب^۲} + \frac{لا^۲}{ب^۲} = ۱ \text{ اور } \frac{لا^۲}{ب^۲} + \frac{لا^۲}{ب^۲} = ۱$$

ہیں۔

فرض کرو کہ خطوط

لاجم عہ + مابج عہ = ع اور لاجم عہ + مابج عہ = ع  
 علی الترتیب ان مخروطیوں کو مس کرتے ہیں۔ تب [دفعہ ۱۶ نتیجہ صریح]  
 $ع^۲ = لاجم^۲ عہ + مابج^۲ عہ$

اور  $ع^۲ = (لا + لہ) لاجم عہ + (ب + بہ) مابج عہ$

$$ع^۲ - ع^۲ = لہ لاجم عہ - بہ مابج عہ$$

۲۲۸۔ اگر دو ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ایک کا مماس دوسرے  
 مخروطی کے ایک مماس پر عمود ہو تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریق  
 ایک دائرہ ہو گا۔

۳-۷

فرض کرو کہ ہم ماسکی مخروطیوں کی مساواتیں

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

ہیں۔

وہ خطوط جن کی مساواتیں

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (1)$$

اور  $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  لاجم  $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  (2) اور  $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  لاجم  $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  (3) ہیں مخروطیوں کو مس کرتے ہیں اور ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ مساواتوں (1) اور (2) کی طرفیں کا مربع لیکر جمع کرو تو مطلوبہ طریق کی مساوات

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

حاصل ہوگی۔

اگر ہم دوسرے ناقص کے محور اصغر کو لا اتہا چھوٹا فرض کریں تو اس کے تمام تماس ماسک کے بہت ہی قریب سے گزریں گے، اس لیے دفعہ ۱۲۶ (ع) اوپر کی مخصوص صورت ہے۔

مثال ۱۔ کوئی دو مکانی من کا ماسک مشترک اور محاور مخالف سمتوں میں ہوں علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ دو مکانیوں میں ماسک مشترک ہے اور ان کے محاور ایک ہی خط مستقیم میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ت ف ایک مکانی کا تماس اور ت ق دوسرے مکانی کا تماس ہو اور ت ف، ت ق علی القوائم ہوں تو ت کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

مثال ۳۔ دو ہم ماسکی مخروطیوں کا مرکز ج ہے، ان میں سے ایک کا تماس ت ق ہے اور دوسرے کا ت ف۔ ثابت کرو کہ اگر تماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو ج ت، ف ق کی تقصیف کرے گا۔

فرض کرو کہ ماس

$$\frac{لا\lambda}{\lambda} + \frac{ما\lambda}{\lambda} = 1 \quad \text{اور} \quad \frac{لا\lambda}{\lambda} + \frac{ما\lambda}{\lambda} = 1$$

ہیں تو ج ت کی مساوات

$$لا\lambda = \left(\frac{لا\lambda}{\lambda} - \frac{ما\lambda}{\lambda}\right) + \left(\frac{لا\lambda}{\lambda} - \frac{ما\lambda}{\lambda}\right) = 0$$

(۳۰۸) ہوگی۔ یہ خط، ف ق کے وسطی نقطہ میں سے گزرنے کا اگر

$$0 = (لا\lambda + لا\lambda) \left(\frac{لا\lambda}{\lambda} - \frac{ما\lambda}{\lambda}\right) + (ما\lambda + ما\lambda) \left(\frac{لا\lambda}{\lambda} - \frac{ما\lambda}{\lambda}\right) = 0$$

$$= 0 \quad \text{یعنی اگر} \quad لا\lambda \left(\frac{لا\lambda}{\lambda} - \frac{ما\lambda}{\lambda}\right) + (ما\lambda + ما\lambda) \left(\frac{لا\lambda}{\lambda} - \frac{ما\lambda}{\lambda}\right) = 0$$

$$یا اگر \quad لا\lambda \left(\frac{لا\lambda}{\lambda} - \frac{ما\lambda}{\lambda}\right) + (ما\lambda + ما\lambda) \left(\frac{لا\lambda}{\lambda} - \frac{ما\lambda}{\lambda}\right) = 0$$

کیونکہ مخروطی ہم ماسکی ہیں۔ یعنی اگر ماس علی القوائم ہوں۔

مثال ۴۔ دو مکانیوں میں ماسکے مشترک ہے اور ان کے محاور

ایک ہی خط مستقیم میں ہیں۔ ان میں سے ایک کا ماس ت ف اور دوسرے کا ت ق ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ت میں سے گزرنے والا وہ خط جو محور کے متوازی ہے ف ق کی تنصیف کرے تو ماس علی القوائم ہوں گے۔

مثال ۵۔ دو ہم ماسکی مخروطیوں پر کے وہ نقطے جن کے خارج المکز زاوے ایک ہی ہوں نظیری نقطوں سے موسوم کئے جائیں تو ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص پر کوئی دو نقطے ف ق ہوں اور اس کے ایک ہم ماسکی ناقص پر نظیری نقطے ف ق ہوں تو ف ق = ق ف۔

۲۲۹۔ ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک سلسلہ کے لحاظ سے

ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے



فرض کرو کہ ہم ماسکیوں کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا^۲}{ب^۲ + ل^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲ + ل^۲}$$

ہے اور دئے ہوئے خطِ مستقیم کی مساوات

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا + م}{ب^۲ + ل^۲}$$

ہے۔

نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات بلحاظ (۱)

$$(۳) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا لا}{ب^۲ + ل^۲} + \frac{ما ما}{ب^۲ + ل^۲}$$

ہے۔

اگر (۲) اور (۳) ایک ہی خطِ مستقیم کو تعبیر کریں تو

$$ل = \frac{لا^۲}{ب^۲ + ل^۲} \quad م = \frac{ما^۲}{ب^۲ + ل^۲}$$

حاصل ہونا چاہئے، اس لیے

$$\frac{لا}{ل} - \frac{لا^۲}{ب^۲ + ل^۲} = \frac{ما}{م} - \frac{ما^۲}{ب^۲ + ل^۲}$$

پس قطبوں کا طریق وہ خطِ مستقیم ہے جس کی مساوات

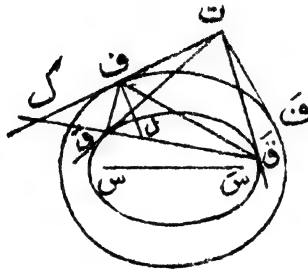
$$\frac{لا}{ل} - \frac{لا^۲}{ب^۲ + ل^۲} = \frac{ما}{م} - \frac{ما^۲}{ب^۲ + ل^۲}$$

ہے۔

یہ خطِ مستقیم خط (۲) پر عمود ہے۔ نظام کا ایک ہم ماسکی مخروطی خط (۲) کو مس کرے گا اور نقطہ تماس، اس ہم ماسکی کے لحاظ سے خط کا قطب ہوگا۔

اس لیے قطبوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو دئے ہوئے خط پر عمود ہے اور اس نقطہ میں سے گزرتا ہے جہاں وہ ایک ہم ماسکی کو مس کرتا ہے۔

۲۳۰۔ کسی نقطہ ت سے ایک مخروطی کے دو ماس ت ف،  
 ت ف کھینچے گئے ہیں اور نیز ایک ہم ماسکی مخروطی کے دو ماس  
 ت ق، ت ق کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم ق ف  
 اور ق ف، ف پر کے ماس سے مساوی زاوے بنائیں گے۔  
 فرض کرو کہ ت ف، اور ف پر کا عا د ق ق کو علی الترتیب  
 ک، ل پر قطع کرتے ہیں۔  
 تب ت ف کا قطب اُس مخروطی کے لحاظ سے جس پر ق اور  
 ق واقع ہیں خط ف ل پر ہے (دفعہ ۲۲۹)۔ نیز چونکہ ت اسی مخروطی کے  
 لحاظ سے ق ق کا قطب ہے اس لیے ت ف کا قطب، ق ق  
 پر ہے [دفعہ ۱۸۱]۔ اس لیے ت ف ک کا قطب، ل پر ہے جو  
 ق ق اور ف ل کا نقطہ تقاطع ہے۔



اس لیے [دفعہ ۱۸۲] سمت ک، ق، ل، ق اور پینل ف ک،  
 ف ق، ف ل، ف ق موسیقی ہیں۔  
 پس چونکہ زاویہ ک ف ل ایک قائمہ زاویہ ہے اس لیے

ف ق اور ف ق ' ف ل یا ف ک کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں [دفعہ ۵۶]۔

نتیجہ صریح ۱۔ فرض کرو کہ وہ مخروطی جس پر ق ' ق واقع ہیں اُس خطی ناقص میں تحویل ہوتا ہے جو ماسکوں کو ملاتا ہے، تب مسئلہ بالا ہو جاتا ہے؛ وہ خطوط جو ایک مخروطی کے ماسکوں کو منحنی کے کسی نقطہ

ف سے ملاتے ہیں ف پر کے ماس کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں۔  
نتیجہ صریح ۲۔ فرض کرو کہ وہ مخروطی جس پر ف ' ف واقع ہیں خطی ناقص میں تحویل ہوتا ہے، تب ایک مخروطی کے دو ماس ایک ماسک پر مساوی زاوے بناتے ہیں۔

نتیجہ صریح ۳۔ فرض کرو کہ وہ مخروطی جس پر ف ' ف واقع ہیں ت میں سے گذرتا ہے، تب وہ دو ماس جو کسی نقطہ ت سے ایک مخروطی کے کھینچے جائیں ت پر کے اُس ماس کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں جو ہم ماسکی مخروطیوں میں سے جو ت میں سے گذریں کسی ایک کا کھینچا گیا ہو۔

نتیجہ صریح ۴۔ خطوط مستقیم ف ق ' ف ق ' ف ق ' ف ق ایک ہی ہم ماسکی کو مس کرتے ہیں۔

۲۳۱۔ اگر ایک دے ہوئے مخروطی کا کوئی وتر ق ق ہو جو ایک ثابت ہم ماسکی مخروطی کو مس کرتا ہے تو ق ق ایسے بدلیگا جیسے متوازی قطر کا مربع۔ نیز اگر ج ع کو مرکز میں سے ق پر کے ماس کے

متوازی کھینچا جائے اور وہ ق ق سے ع پر ملے توق ع مستقل  
طول کا ہوگا۔ فرض کرو کہ ناقص

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} - 1 = 0$$

پر نقطے ق اور ق' ط اور طہ ہیں اور فرض کرو کہ ق ق مخروطی

$$1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}$$

کو مس کرتا ہے۔ تب

$$ق ق' = \{ (جم ط - جم طہ) + (ب ط - جب ط - جب طہ) \}$$

$$= 4 جب ط \frac{1}{4} (ط - طہ) \{ (ب ط - جب ط - جب طہ) \}$$

$$+ ب ط جم ط \frac{1}{4} (ط + طہ) \{$$

$$ج د = 2 جب ط \frac{1}{4} (ط + طہ) + ب ط جم ط \frac{1}{4} (ط + طہ) \}$$

لیکن چونکہ ق ق' دوسرے مخروطی کو مس کرتا ہے اسلئے

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \{ (ب ط - جب ط - جب طہ) \}$$

$$= 4 جب ط \frac{1}{4} (ط - طہ) \{$$

$$+ ب ط جم ط \frac{1}{4} (ط + طہ) \} \quad (1)$$

$$+ ب ط جم ط \frac{1}{4} (ط + طہ) \} \quad (1)$$

پس  $اُ ب ا ق ق^2 = ا^2 ل ج د^2$  ..... (۲)  
 پھر چونکہ ع، خطوط  
 $\frac{لا}{ا} جم \frac{ا}{ب} + (طه + طه) + \frac{ا}{ب} جب \frac{ا}{ب} (طه + طه) - جم \frac{ا}{ب} (طه - طه) =$   
 اور  $\frac{لا}{ا} جم طه + \frac{ا}{ب} جب طه =$   
 کا نقطہ تقاطع ہے اس لیے

$$\frac{جم \frac{ا}{ب} (طه - طه)}{جب \frac{ا}{ب} (طه - طه)} = \frac{ا - ا}{ب جم طه} = \frac{لا}{ا جب طه}$$

پس  $ق ع جب ا^2 \frac{ا}{ب} (طه - طه)$   
 $= \{ جب طه جم \frac{ا}{ب} (طه - طه) - جم طه جب \frac{ا}{ب} (طه - طه) \}^2$   
 $+ ب ا^2 \{ جم طه جم \frac{ا}{ب} (طه - طه) + جب طه جب \frac{ا}{ب} (طه - طه) \}^2$   
 $= اُ ب جب ا^2 \frac{ا}{ب} (طه + طه) + ب ا^2 جم \frac{ا}{ب} (طه + طه)$   
 $ق ع^2 = اُ ب ا^2$  ، (۱)

مثال۔ دو ثابت ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ایک کا  
 ماس تا ف اور دوسرے کا ت ق ہے۔ ثابت کرو کہ اگر  
 ماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو خط ف ق ہمیشہ  
 ایک تیسرے ہم ماسکی مخروطی کو مس کرے گا۔



خطوط (۱) میں سے ایک وہی ہے جو خطوط (۲) میں سے ایک ہے  
یہ خط خطوط

$$\left\{ \frac{a^2}{b^2(l^2 + a^2)} + \frac{a^2}{b^2(l^2 + a^2)} \right\} \left\{ l^2(l^2 + a^2) + l^2(b^2 + a^2) \right\}$$

میں سے جو (۱) اور (۲) کے بائیں ارکان کو جمع کرنے سے معلوم کئے  
گئے ہیں ایک ہے۔

لیکن ماسوں کی سمتیں، ل اور م پر غیر منحصر نہیں ہو سکتیں، اس لیے  
حاصل ہونا چاہئے

$$l^2(l^2 + a^2) + l^2(b^2 + a^2) = l^2(l^2 + a^2) + l^2(b^2 + a^2) = l^2(l^2 + a^2) + l^2(b^2 + a^2)$$

$$\frac{1}{l^2 + a^2} = \frac{a^2}{b^2(l^2 + a^2)} + \frac{a^2}{b^2(l^2 + a^2)}$$

ہے جو ایک ہم ماسکی مخروطی ہے کیونکہ

$$l^2(l^2 + a^2) + l^2(b^2 + a^2) = l^2(l^2 + a^2) + l^2(b^2 + a^2)$$

۲۳۲۔ جب کسی دو منحنیوں کے نقاط تقاطع میں سے دو منطبق ہوتے

ہیں یعنی جب دو منحنی مس کرتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ منحنی زیر بحث نقطہ پر

پہلے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں۔ جب تین نقاط تقاطع منطبق ہوتے ہیں

تو ہم کہتے ہیں کہ منحنی دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں، علیٰ ہذا القیاس

وہ منحنی جو ایک دے ہوئے منحنی کے ساتھ زیادہ سے زیادہ ممکن

رتبہ کا تماس رکھے تین منحنی کہلاتا ہے۔

ایک دائرہ کو صرف تین دے ہوئے نقطوں میں سے گزرا جا سکتا ہے

پس وہ دائرے جو کسی منحنی کے لمبی دائرے ہوتے ہیں اس کے ساتھ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں۔

وہ دائرہ جو ایک دئے ہوئے منحنی کے ساتھ دئے ہوئے نقطہ پر دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے اس نقطہ پر کا دائرہ انحناء کہلاتا ہے اور اس دائرہ کا نصف قطر نصف قطر انحناء کہلاتا ہے۔

دو مخروطی چار نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں۔ اس لیے دو مخروطی ایک دوسرے کے ساتھ تیسرے رتبہ سے بڑے رتبہ کا تماس نہیں رکھ سکتے۔ اگر وہ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہوں تو ان میں ایک اور نقطہ مشترک ہونا چاہئے۔

۲۳۳۔ ایک مخروطی کسی دئے ہوئے مخروطی کے ساتھ ایک دئے ہوئے نقطہ پر دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے۔ مخروطی کی عام مساوات معلوم کرو۔ (۳۱۲)

فرض کرو کہ دئے ہوئے مخروطی کی مساوات  $S = 0$  ہے اور فرض کرو کہ  $S = 0$  کے دئے ہوئے نقطہ (لا، ما) بہ کے تماس کی مساوات  $T = 0$  ہے۔  
(لا، ما) میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کی مساوات  
 $Ma - m(لا - لا) = 0$  ہے۔ پس مساوات

س۔ لہ ت { (ما - ما) - م (لا - لا) } = 0 ..... (۱)

ایک ایسے مخروطی کی مساوات ہے جو ان نقطوں میں سے گزرتا ہے جہاں خطوط مستقیم  $T = 0$  اور  $Ma - m(لا - لا) = 0$  مخروطی  $S = 0$  کو قطع کرتے ہیں۔



پس (۱) میں = کو تین منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے۔  
 چونکہ دو مستقل لہ اور م اختیاری ہیں اس لئے مخروطی (۱) سے  
 دوسری شرطیں پوری ہو سکتی ہیں۔ چنانچہ ایسا انتخاب اس طرح عمل میں  
 آ سکتا ہے کہ مساوات (۱) ایک دائرہ کو تعبیر کرے۔  
 اگر خط مایہ-م (لا-لا) = ماس پر منطبق ہو تو چاروں نقاط  
 تقاطع منطبق ہوئے ہیں۔ اس لئے مخروطی میں - ل ت = م = م =  
 کے ساتھ تیسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے یعنی وہ ایک لٹھی مخروطی ہے۔  
 مثال ۱۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو مخروطی ۱ لا  
 ۲ + ب لا + م ج م + ۲ دلا = کو مبداء پر لٹم کرے۔  
 مساوات

۱ لا + ۲ ب لا + م ج م + ۲ دلا = لہ لا (م-لا) =  
 میں جتنے مخروطی شامل ہیں سب کے سب دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں:  
 دائرہ کے لئے شرطیں ۲ ب = لہ = اور ۱ + لہ م = ج ہیں۔  
 اس لیے مطلوبہ دائرہ ج لا + م ج م + ۲ دلا = ہے۔  
 مثال ۲۔ اس مکانی کی مساوات معلوم کرو جو مخروطی ۱ لا  
 ۲ + ب لا + م ج م + ۲ دلا = کے ساتھ تیسرے رتبہ کا تماس رکھے۔  
 مخروطی ۱ لا + ۲ ب لا + م ج م + ۲ دلا = لہ لا = دے ہوئے  
 مخروطی کو چار منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

یہ منحنی مکانی ہے اگر (۱-لہ) ج = ب = اس لیے مطلوبہ مکانی کی مساوات (۳۱۴)  
 حسب ذیل ہے:

ب لا + ۲ ب ج لا + م ج م + ۲ دلا =  
 ۲۳۴ -  $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$  پر کے نقطہ عم پر دائرہ انحناء  
 کی مساوات معلوم کرنا۔  
 اس دائرہ کا مرکز جو نقطوں (ع، ب، ج) میں سے گذرتا ہے

$$\frac{۴}{۱-۲} \text{ ف ب } = \text{جم ع} + \text{جم ب} + \text{جم ج} + \text{جم د} + \text{جم ح} + \text{جم ط} + \text{جم ظ} + \text{جم ذ}$$

$$\frac{۴}{۱-۲} \text{ ف ب } = \text{جب ع} + \text{جب ب} + \text{جب ج} + \text{جب د} + \text{جب ح} + \text{جب ط} + \text{جب ظ} + \text{جب ذ} \quad (\text{دفعہ ۱۳۶})$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

پس اگر ع = ب = ج = د = ح = ط = ظ = ذ تو

$$\frac{۴}{۱-۲} \text{ ف ب } = ۳ \text{ جم ع} + \text{جم ب} = ۴ \text{ جم ع}$$

$$\text{اور } \frac{۴}{۱-۲} \text{ ف ب } = ۳ \text{ جب ع} - \text{جب ب} = ۴ \text{ جب ع}$$

پس نقطہ ع پر کے دائرہ انحناء کا مرکز

$$\text{و لا} = (۱-۲) \text{ ب } = \text{جم ع} \text{ ب} = (۱-۲) \text{ جب ع}$$

سے حاصل ہوگا۔

اس دائرہ کے نصف قطر کا مربع

$$\left( \frac{۱-۲}{۱} \text{ ب } - \text{جم ع} \right) + \left( \frac{۱-۲}{۱} \text{ ب } - \text{جب ع} + \text{ب جب ع} \right)$$

$$= \frac{\text{جم ع}}{۱} + \left( \text{ب جب ع} + \text{ب جم ع} \right) + \left( \text{ب جب ع} + \text{ب جم ع} \right)$$

$$= \frac{(\text{ب جب ع} + \text{ب جم ع})}{۱}$$

ہے۔ اس لیے مطلوبہ مساوات ہے

$$\text{لا} - \left( \frac{۱-۲}{۱} \text{ ب } - \text{جم ع} \right) + \left( \frac{۱-۲}{۱} \text{ ب } - \text{ب جب ع} \right)$$

$$= (\text{ب جب ع} + \text{ب جم ع}) \text{ و لا}$$

مرکز انخار کا طریق صریحاً (۱ لا) + (ب ۱) = (۱ - ب ۱) ہے۔

۲۳۵۔ اگر ایک ناقص پر چار نقطوں کے خارج المرکز زاویے کے بیچہ ضہ (۳۱۵) ہوں تو ان چار نقطوں میں سے ایک دائرہ گزرے گا اگر

ع + ب + جہ + ضہ =  $\pi$  ن ۲ [دفعہ ۱۳۶] س  
پس نقطہ ع پر کا دائرہ انخار، ناقص کو مکرر نقطہ ضہ پر قطع کرے گا جہاں

۳ ع + ضہ =  $\pi$  ن ۲، ..... (۱)  
(۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی مخصوص نقطہ ضہ میں سے انخار کے تین دائرے گزریں گے یعنی نقطوں  $\frac{1}{\pi}$  (۲۲ - ضہ)،  $\frac{1}{\pi}$  (۲۴ - ضہ)، اور  $\frac{1}{\pi}$  (۲۱ - ضہ) پر کے انخار کے دائرے یہ تین نقطے اس اعظم مثلث کے راس ہیں جو ناقص میں کھینچا جا سکتا ہے [دفعہ ۱۳۹ مثال ۱]۔ نیز چونکہ ضہ +  $\frac{1}{\pi}$  (۲۲ - ضہ)

+  $\frac{1}{\pi}$  (۲۴ - ضہ) +  $\frac{1}{\pi}$  (۲۶ - ضہ) =  $\pi$  ۴، اس لیے نقطہ ضہ اور وہ تین نقطے جن پر کے انخار کے دائرے ضہ میں سے گزرتے ہیں ایک دائرہ پر واقع ہیں۔

مثال ۱۔ اگر دو مخروطیوں میں سے ہر ایک، ایک تیسرے مخروطی کے ساتھ دو ہر اتماس رکھے تو اس مخروطی کے ساتھ ان کے وتر تماس اور ان کے مشترک نقطوں میں سے گزرنے والے خطوں میں سے دو خط، ایک نقطہ پر ملیں گے اور ایک موسیقی پنسل بنائیں گے۔

فرض کرو کہ تیسرے مخروطی کی مسادات س = ۰ ہے اور فرض کرو کہ دو وتر تماس کی مساواتیں ع = ۰، ب = ۰ ہیں تب۔ [دفعہ ۱۸۶] مخروطیوں کی مساواتیں

س - لہ ۲ × ع ۲ = ۰، ..... (۱)

س - مہ ۲ × ب ۲ = ۰، ..... (۲)

ہیں۔ اب خطوط مستقیم

لہ<sup>۲</sup> عہ<sup>۲</sup> - مہ<sup>۲</sup> بہ<sup>۲</sup> = ۰ ..... (۳)  
 (۱) اور (۲) کے مشترک نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔ نیز خطوط (س)  
 عہ = ۰ اور بہ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے بھی گزرتے ہیں اور [دفعہ ۵۶] چار  
 خطوط عہ = ۰، بہ = ۰، لہ عہ - مہ بہ = ۰ اور لہ عہ + مہ بہ = ۰ ایک موسیقی  
 پنسل بناتے ہیں۔

مثال ۲۔ دئے ہوئے نصف قطر کا ایک دائرہ ایک ناقص کو چار  
 نقطوں پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ مشترک دتروں کے متوازی ناقص کے جو قطر  
 ہیں ان کا مسلسل حاصل ضرب مستقل ہے۔

فرض کرو کہ ناقص کی مساوات  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ہے اور دائرہ کی مساوات  
 (لا-عہ) + (ما-بہ) - ک<sup>۲</sup> = ۰ ہے۔ تب مشترک دتروں کے کسی زوج کی  
 مساوات

$$(لا-عہ) + (ما-بہ) - ک^۲ = ۰ \text{ لہ } (لا-عہ) + (ما-بہ) - ک^۲ = ۰ \dots (۱)$$

ہے جہاں لہ مساوات (۳۱۶)

$$(۲) \dots ۰ = \begin{vmatrix} ۱ - \frac{لہ}{۲} & ۰ & عہ \\ ۰ & ۱ - \frac{بہ}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & لہ + عہ + مہ + ک^۲ \end{vmatrix}$$

سے حاصل ہوتا ہے چھ ناقص کے ان قطروں کی مساوات جو خطوط (۱) کے متوازی ہیں

$$لا + ما - لہ = ۰ \left( \frac{ما}{۲} + \frac{لا}{۲} \right) = ۰ \dots (۳)$$

ہے۔ (۳) سے حاصل شدہ دو نیم قطر صریحاً محور کے ساتھ مساوی زاوے بناتے  
 ہیں اور ان میں سے ایک کے طول کا مربع لہ کے مساوی ہے۔

پس چھ نیم قطروں کا مسلسل حاصل ضرب لے کی ان تین قیمتوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے جو (۳) سے حاصل ہوتی ہے اور یہ صریحاً ثابت ہے۔

مثال ۳۔ اگر ایک مخروطی کا مرکز چار دے ہوئے نقطوں میں سے کوئی ایک ہو اور وہ مثلث جو دوسرے تین نقطوں کو ملانے سے بنے خود قطبی مثلث ہو تو ثابت کرو کہ مخروطی کے متقارر ان دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی ہوں گے جو ان چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

فرض کرو کہ چار نقطے خطوط مستقیم

$$لا + م = ۰، \text{ اور } (ل + لا + م - ا) (ل - لا + م - ا) = ۰$$

کے نقاط تقاطع ہیں۔ وہ خط جو مخروطی کے مرکز کو خود قطبی مثلث کے کسی ایک راس سے ملاتا ہے اس خط کا مزدوج ہے جو دوسرے دو راسوں کو ملاتا ہے۔ اس لیے چاروں مخروطیوں کے لیے خطوں کے وہ تین زوج جو چار دے ہوئے نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتے ہیں مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔ فرض کرو کہ ایک مخروطی کی مساوات

$$لا + لا + ۲ھ لا + م + ۲ک لا + ۲ف م + ج = ۰ \dots (۱)$$

ہے۔

$$\text{خطوط } (ل + لا + م - ا) (ل - لا + م - ا) = ۰$$

مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔ اس لیے خطوط

$$ل - لا + (ل + م - ا) (لا + م - ا) = ۰$$

بھی مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔ پس [دفعہ ۱۸۴]

ا م م + ب ل ل = ه (ل م + ل م)  
خطوط لا ما = ۰، مزدوج قطروں کے متوازی ہیں، اس لیے ه = ۰ اور  
حاصل ہوتا ہے

ا م م + ب ل ل = ۰ ..... (۲)  
(۱) کے متقارب خطوط لا + ا + ب ما = ۰ کے متوازی ہیں یا (۲)  
کی رُو سے خطوط

(۳۱۷)

$$ل ل - م م = ما = ۰$$

کے متوازی ہیں اور اس سے مسئلہ ثابت ہے [دفعہ ۲۰۹]

مثال ۴۔ کسی ایسے مثلث کا حائط دائرہ جو ایک مخروطی  
کے لحاظ سے خود قطبی ہو مخروطی کے مرتب دائرہ کو علی القواہم  
قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات لا + ا + ب ما = ۰ ہے اور فرض کرو کہ  
کے رأس (لا، ما)، (لا، ما)، اور (لا، ما) ہیں۔  
چونکہ ان میں سے ہر نقطہ دوسرے کے قطبی پر ہے اس لیے

$$لا لا + ب ما = ا ..... (۱)$$

$$لا لا + ب ما = ا ..... (۲)$$

$$لا لا + ب ما = ا ..... (۳)$$

مثلث کے حائط دائرہ کی مساوات

$$(۴) ..... = \begin{vmatrix} لا + ا & لا & ما \\ لا + ا & لا & ما \\ لا + ا & لا & ما \end{vmatrix}$$

ہے۔

اب اگر ایک دائرہ کی مساوات

$$(لا + ز + ما + گ + لا + ف + ج = ۰)$$

ہو تو اس ماس کا مربع جو مبدا سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو نسبت ج کے مساوی

ہے۔

اس لیے دائرہ (۴) کے ماس کا مربع اس نسبت کے مساوی ہے جو

$$\begin{vmatrix} لا + ز + ما + گ + لا + ف + ج \\ لا + ز + ما + گ + لا + ف + ج \\ لا + ز + ما + گ + لا + ف + ج \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} لا + ز + ما + گ + لا + ف + ج \\ لا + ز + ما + گ + لا + ف + ج \\ لا + ز + ما + گ + لا + ف + ج \end{vmatrix} = ۰$$

پہلا متقطع

$$(لا - لا - ما - گ + لا - لا - ما - گ) + (لا - لا - ما - گ + لا - لا - ما - گ) + (لا - لا - ما - گ + لا - لا - ما - گ)$$

$$+ (لا - لا - ما - گ + لا - لا - ما - گ) + (لا - لا - ما - گ + لا - لا - ما - گ) + (لا - لا - ما - گ + لا - لا - ما - گ) \dots (ع)$$

کے مساوی ہے۔

اب مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1 - لا}{لا - لا} = \frac{ب - ما}{لا - لا} = \frac{لا}{لا - لا}$$

$$\frac{1 - لا}{لا - لا} = \frac{ب - ما}{لا - لا} = \frac{لا}{لا - لا}$$

$$\frac{1 - لا}{لا - لا} = \frac{ب - ما}{لا - لا} = \frac{لا}{لا - لا}$$

اور





مخروطیوں میں سے کسی دوسرے مخروطی کو ف، ف پر قطع کرتا ہے، ثابت کر دو کہ  $\frac{1}{\text{وقت}} + \frac{1}{\text{وقت}}$  مستقل ہے۔

۴۔ ایک دائرہ اور ایک قائم زائد چار نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں اور ان کے مشترک دتروں میں سے ایک 'زائد کا قطر ہے۔ ثابت کر دو کہ دوسرا وتر دائرہ کا قطر ہے۔

۵۔ ان تمام مخروطیوں میں سے جو چار دے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں کم سے کم خروج المرکز والے مخروطی کے مساوی مزدوج قطر ان دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں جو ان نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

۶۔ ان تمام مخروطیوں میں سے جو دو دے ہوئے خطوط مستقیم کو دے ہوئے نقطوں پر مس کرتے ہیں کم سے کم خروج المرکز کا مخروطی وہ ہوگا جس میں مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک دے ہوئے خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں سے گزرے گا۔

۷۔ ایک مخروطی کے دو ثابت ماس و، ب ہیں۔ ثابت کر دو کہ ان ماسوں کے درمیان مخروطی کے ایک متغیر ماس کے منقطعہ کے وسطی نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے جو ایک خط مستقیم میں تحویل ہوتا ہے اگر ابتدائی مخروطی مکافی ہو۔

۸۔ ایک مخروطی کے دو ماس و، ب کھینچے گئے ہیں یہ ماس ایک متغیر ماس سے نقطوں ف اور ق پر منقطع ہوتے ہیں۔ ثابت کر دو کہ مثلث و ف ق کے مائل دائرہ کا مرکز ایک زائد مرسم کرتا ہے۔

۹۔ ایک مخروطی کھینچا گیا ہے جو محدود کے محوروں و، ب، و ما کو 'ب' پر مس کرتا ہے اور نقطہ د میں سے گزرتا ہے جہاں و ا د ب ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ثابت کر دو کہ اگر مثلث و ا ب کا

رقبہ مستقل ہو تو مخروطی کے مرکز کا طریق ایک زائد ہے۔

۱۰۔ ایک ثابت نقطہ سے مخروطیوں کے ایک نظام کے تماس کھینچے گئے ہیں جو دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کو دے ہوئے نقطوں پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطہ تماس کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ ایک ہی ذراعتہ الاضلاع میں مرتسمہ مخروطیوں کے ایک سلسلہ کے لکاؤ سے ایک دے ہوئے خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۱۲۔ ایک ناقص کھینچا گیا ہے جو ایک زائد کے متقابلوں کو مس کرتا ہے اور زائد سے چار نقطوں پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مشترک وتروں میں دو اس خط کے متوازی ہیں جو متقابلوں اور ناقص کے نقاط تماس کو ملاتا ہے اور یہ وتر اس خط سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔

۱۳۔ مخروطیوں کے ایک نظام میں مرکز کا محل، محاور کی سمت اور محاور کا مجموعہ دے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک دے ہوئے خط مستقیم قطب کا طریق ایک مکانی ہے جو محوروں کو مس کرتا ہے۔

۱۴۔ ایک مکانی کھینچا گیا ہے جو تین دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے، ثابت کرو کہ نقاط تماس کو ملانے والے وتروں میں سے ایک ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

۱۵۔ اگر ایک مکانی دو دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے اور نقاط تماس کو ملانے والا خط ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ ماسکہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۱۶۔ اگر مکانی  $\sqrt{1+a^2} + b = a$  کا محور ایک ثابت نقطہ میں

(۳۲۰)

سے گزرے تو ماسکہ کا طریق ایک قائم زائد ہوگا۔

۱۷۔ ایک ثابت نقطہ و سے قاطعوں کا ایک زوج کھینچا گیا ہے جو ایک دے ہوئے مخروطی سے چار نقطوں پر ملتے ہیں جو ایک دائرہ پر واقع

ہیں۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق وہ عمود ہے جو د۔ سے و کے قطبی پر کھینچا گیا ہے۔

۱۸۔ ت ف اور ت ق، ایک محفوظی کے ماس ہیں اور منحنی پر کوئی دوسرا نقطہ س ہے۔ ت میں سے گزرتا ہوا کوئی خط کھینچا گیا ہے جو س ق اور س ف سے علی الترتیب گ اور ل پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق ل اور ف ق، منحنی پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۱۹۔ ایک ثابت خط مستقیم کے کسی نقطہ ف کو ایک محفوظی کے دو ثابت نقطوں ق، س سے ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ب ق اور س کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک محفوظی ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ ناقص  $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ا$  کے اس نقطہ میں سے

گذرنے والا ہم ماسکی زائد جس کا خارج المرکزہ زاویہ ع ہے حسب ذیل ہے:-

$$\frac{لا}{ج م ع} - \frac{ما}{ج ب ع} = ا - ب$$

۲۱۔ ایک دئے ہوئے نقطہ سے ہم ماسکی محفوظیوں کے ایک

سلسلہ کے ماس کھینچے گئے ہیں جہاں دیا ہوا نقطہ محور اعظم میں ہے۔ نقاط تماس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۲۔ اگر لہ، مہ، اُن ہم ماسکیوں کے مبدل ہوں جو ایک دئے ہوئے

ناقص کے دو نقطوں ف، ق میں سے گزرتے ہیں تو ثابت کرو کہ (۱)

اگر ف، ق مزدوج قطروں کے سرے ہوں تو لہ + مہ مستقل ہوگا اور

(۲) اگر ف اور ق پر کے ماس علی القوالم ہوں تو  $\frac{۱}{لہ} + \frac{۱}{مہ}$  مستقل ہوگا۔

۲۳۔ ثابت کرو کہ ہم ماسکی ناقصوں کے ایک سلسلہ کے مساوی

مزدوج قطروں کے سرے ایک ہم ماسکی قائم زائد پر واقع ہوتے ہیں۔

۲۴۔ کسی نقطہ سے ایک ناقص کے دو ماس کھینچے گئے ہیں۔

ان کا درمیانی زاویہ ان ہم ماسکیوں کے مبدلوں کی رقوم میں معلوم کرو جو اس نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور ثابت کرو کہ ان دو تماسوں کی سادات ہم ماسکیوں کے عمادوں کو مجاور قرار دینے سے

$$= \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۵۔ خطوط متقیم و ف ف و ق ق، ایک ناقص کو علی الترتیب ف ف اور ق ق پر قطع کرتے ہیں اور نیز ایک ہم ماسکی ناقص کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$و ف \times و ق \times ق ق = و ق \times ق ف \times ف ف$$

۲۶۔ ایک دے ہوئے نقطہ سے ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک نظام کے تماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط تماس کا طریق ایک کجی منحنی ہے جو دے ہوئے نقطہ میں سے اور نیز ماسکوں میں سے گزرتا ہے۔

۲۷۔ ثابت کرو کہ اگر ہم ماسکیوں کے ایک نظام کے متوازی تماس کھینچے جائیں تو نقاط تماس کا طریق ایک قائم زائد ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس تماس کی تمام ممکن سمتوں کے لیے ان زائدوں کے راسوں کا طریق وہ منحنی ہے جس کی سادات

$$r = (b - a) \cos \theta$$

ہے۔

۲۸۔ اگر ایک ناقص میں ایک مثلث کھینچا جائے اور وہ ایک ہم ماسکی ناقص کو لف کرے تو نقاط تماس مثلث کے باہمی دائروں پر واقع ہوں گے۔

۲۹۔ اگر ایک ناقص، دو ہم ماسکیوں میں سے ہر ایک کے ساتھ دوہرہ تماس رکھے تو نقاط تماس پر کے تماس ایک مستطیل بنائیں گے۔

۳۰۔ اگر ایک ثابت نقطہ سے ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ایک کے تماس کھینچے جائیں اور نقاط تماس پر کے عماد نقطہ ق پر ملیں تو ثابت کرو کہ ق

کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔  
 ۳۱۔ ایک ناقص کے گرد ایک مثلث کھینچا گیا ہے جس کے دورے  
 ایک ہم ماسکی ناقص پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرا اس دوسرے ہم ماسکی  
 ناقص پر واقع ہے۔  
 ۳۲۔ ایک ناقص اور ایک زائد ہم ماسکی ہیں اور زائد کے متقارب  
 ناقص کے مساوی مزدوج قطروں پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ زائد تمام  
 محفوظیوں کو علی القیاس قطع کرے گا جو ناقص کے محوروں کے بیروں میں سے  
 گذرتے ہیں۔

۳۳۔ ایک نقطہ ف سے ایک ناقص کے چار عماد کھینچے گئے ہیں  
 ثابت کرو کہ ان کا حاصل ضرب

$$\frac{(ل_۱ - ل_۲)(ل_۱ - ل_۳)}{ل_۱ - ل_۴}$$

ہے جہاں  $ل_۱, ل_۲, ل_۳, ل_۴$  ان ہم ماسکیوں کے تبدیل ہیں جو دے ہوئے ناقص کے  
 ہم ماسکے ہیں اور ف میں سے گذرتے ہیں اور دے ہوئے ناقص کے نیم محاورے  
 اور ب ہیں۔

۳۴۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے عمودوں کے پائیں کسی مساوی المی اور  
 زائد کے لحاظ سے جو مثلث کو حائل کرتا ہے ایک مزدوج ثلاثہ ہوتے ہیں۔

۳۵۔ ایک نقطہ ت سے ایک محفوظی کے محاسن ت و  
 ت ق ہیں اور زاویہ ف ت ق کا نصف، ف ق سے و پر ملتا ہے۔  
 ثابت کرو کہ اگر و میں سے گذرنے والا کوئی اور وترس و س ہو تو زاویہ  
 سات س و ت سے تنصیف ہوگا۔

۳۶۔ اگر دو مکانی گھنٹے جائیں جن میں سے ہر ایک ایک دائرہ کے  
 تین نقطوں میں سے گذرتا ہے اور ان میں سے ایک دائرہ سے مکرر پر ملتا ہے  
 اور دوسرا ع پر تو ثابت کرو کہ ان کے محوروں کا درمیانی زاویہ اس زاویہ کا ایک  
 چوتھائی ہے جو د ع کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔

۳۷۔ اگر  $\Delta$  جب ج وہ اعظم مثلث ہو جو ایک ناقص میں کھینچا گیا ہے اور  $\Delta$  ب ج کا حاطہ دائرہ ناقص کو مرکز د پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ اُن دو مکافیوں کے محوروں کے نقطہ تقاطع کا طریق جو  $\Delta$  ب ج د میں سے گذرتے ہیں ایک محروطی ہے جو ابتدائی محروطی کے مشابہ ہے۔

۳۸۔ اگر نصف قطر  $\Delta$  کے دائرہ پر کوئی نقطہ محدودوں  $\Delta$  ج م طہ  $\Delta$  جب طہ سے حاصل ہو تو ثابت کرو کہ چار نقطوں عہ، بہ، جہ، ضہ میں سے گذرنے والے دو مکافیوں کے محوروں کی مساواتیں

$$\begin{aligned} \text{لاجم مس} + \text{ماجب مس} &= \frac{1}{\pi} \{ \text{جم (مس) عہ} + \text{جم (مس) بہ} \} \\ &+ \text{جم (مس) جہ} + \text{جم (مس) ضہ} \} \\ \text{اور لاجب مس} - \text{ماجب مس} &= \frac{1}{\pi} \{ \text{جب (مس) عہ} + \text{جب (مس) بہ} \} \\ &+ \text{جب (مس) جہ} + \text{جب (مس) ضہ} \} \end{aligned}$$

ہیں جہاں

$$\pi = \text{مس} = \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}$$

۳۹۔ ایک محروطی کے اندرونی ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع  $\Delta$  ب ج د ہیں۔ محروطی کے کسی نقطہ ف سے ان اضلاع پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ  $\Delta$  اور ج پر کے عمودوں کے حاصل ضرب اور ج اور د پر کے عمودوں کے حاصل ضرب میں نسبت مستقل ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر محروطی کے اندرونی کثیر الاضلاع کے اضلاع  $\Delta$  ب ج د ع ف ہوں اور اضلاع کی تعداد جفت ہو تو محروطی کے کسی نقطہ سے اضلاع  $\Delta$  ب ج د ع ف پر کے عمودوں کا مسلسل حاصل ضرب اضلاع ب د ع ف پر کے عمودوں کے حاصل ضرب کے ساتھ مستقل نسبت میں ہوگا

۴۰۔ ناقص  $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = 1$  کے کسی نقطہ پر کا مرکز خنء وہ ہے۔

و سے ناقص کے دوسرے دو عمادوں کے پائین ق، س ہیں۔ اگر ق اور س پر کے تماس ت پر ملیں تو ثابت کرو کہ ت کے طریق کی مساوی

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} -$$

۲۱۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ ایک مکانی کو چار حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کر سکتا اگر اس کے مرکز کا فضلہ نیم وتر خاص سے کم ہو۔ ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ایک مکانی کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ مکانی کے اس میں سے خطوط ان چھ خطوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو نقاط تقاطع کے زوجوں کو ملاتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان نقطوں کے فضلوں کا مجموعہ جہاں یہ خطوط مکانی کو قطع کرتے ہیں مستقل ہے اگر دائرہ کے مرکز کا فضلہ مستقل ہو۔

۲۲۔ تین خطوط مستقیم ایک قائم زائد کے لحاظ سے ایک خود قطبی مثلث بناتے ہیں۔ اگر منحنی کو متغیر کیا جائے لیکن خطوط ثابت رہیں تو مرکز کا طریق معلوم کرو۔ ۲۳۔ اگر ایک ناقص کے ہم مرکز ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ناقص میں مثلثوں کی لا انتہا تعداد کھینچی جاسکتی ہے اور دائرہ کے گرد مثلثوں کی لا انتہا تعداد کھینچی جاسکتی ہے اگر  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$  جہاں ج دائرہ کا نصف قطر ہے اور ا، ب، ناقص کے نیم محاور۔

۲۴۔ ایک ناقص پر ایسے نقطے معلوم کرو کہ ف پر کالشی دائرہ ق میں سے گزرے اور ق پر کالشی دائرہ ف میں سے گزرے۔

۲۵۔ قائم زائد ایک دے ہوئے مکانی کے ساتھ تیسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان زائدوں کے مرکروں کا طریق ایک مساوی مکانی ہے۔

۲۶۔ ایک ناقص پر دو نقطے ف، ق ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر مثلث کا عماد اس زاویہ کی تفسیف کرے جو ق پر کے عماد کے محاذی ف پر

بنتا ہے تو ق پر کا عماد اُس زاویہ کی تنصیف کرے گا جو ف پر کے عماد کے محاذی ق پر بنتا ہے۔

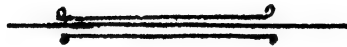
۴۷۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص کے کسی نقطہ ف پر کا مرکز انحناء ف پر کے مماس کا قطب بلحاظ اُس ہم ماسکی زائد کے ہے جو ف میں سے گذرتا ہے۔

(۳۲۲)

۴۸۔ ا ب ج ایک مثلث ہے جو ایک ناقص میں کھینچا گیا ہے۔ ایک ہم ماسکی ناقص ضلعوں کو (ا، ب، ج) پُرَس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا میں سے گذرتا ہوا ہم ماسکی زائد اندرونی ناقص سے ا پر ملتا ہے۔

۴۹۔ دو قائم زائدوں میں سے ایک کے متقارب دوسرے کے محوروں کے متوازی ہیں اور ہر ایک کا مرکز دوسرے پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ ایک محروطی کے مرکز میں سے دائروں کی لاتعداد کھینچی جاسکتی ہے جو دوسرے کو دیگر ایسے تین نقطوں ف، ق، س میں قطع کریں کہ مثلث ف ق س پہلے محروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہو۔

۵۰۔ ایک قائم زائد کے مرکز میں سے گذرتا ہوا ایک دائرہ منحنی کو نقطوں (ا، ب، ج، د) میں قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا حائِط دائرہ جو (ا، ب، ج) پر کے مماسوں سے بنتا ہے زائد کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور اس کا مرکز زائد کے اُس نقطہ پر ہے جو د کا متقاطع ہے۔





# بارہواں باب

## لفاف اور محاسی مساوتیں

۲۳۶۔ ہم ایک متحرک خط کا لفاف بعض سادہ صورتوں میں معلوم کر چکے ہیں (صفحہ ۱۰۸)۔  
اب ہم خط

ل لا + م ما - ا = ۰  
کا لفاف معلوم کریں گے جہاں ل اور م درجہ دوم کی کسی مساوات سے مربوط ہیں۔

۲۳۷۔ خط ل لا + م ما - ا = ۰ کا لفاف معلوم کرنا چاہیے

۱ ل + ۲ ل م + ب م + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰  
اگر خط کسی مخصوص نقطہ (لا م) میں سے گزرے تو ل لا + م ما - ا = ۰ - دہی ہوئی  
شرط کو ل اور م میں متجانس بنانے کے لیے اگر اسے استعمال کیا جائے تو

۱ ل + ۲ ل م + ب م - ۲ (گ ل + م ف) (ل لا + م ما)

+ ج (ل لا + م ما) = ۰

نسبت  $\frac{ل}{م}$  کی دو قیمتوں سے ان دو خطوط کی سمتیں حاصل

ہونگی جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔  
اگر (لا، ما) اس منحنی پر کا نقطہ ہو جس کو متحرک خط مس کرتا ہے تو  
اس سے کھینچے ہوئے ماس منطبق ہونے چاہئیں اور اس لیے اوپر کی  
مساوات کی اصلیں مساوی ہونی چاہئیں۔ اس کے لیے شرط ہے

$$(1-2) \text{ لا} + \text{ج لا} = (\text{ب} - 2 \text{ ف} + \text{ما} + \text{ج ما}) = (\text{ھ} - \text{گ ما} - \text{ف لا} + \text{ج لا ما})$$

$$\text{جو لا} = (\text{ب ج} - \text{ف}) + 2 \text{ لا ما} + (\text{ف گ} - \text{ج ھ}) + \text{ما} (\text{ج ل} - \text{گ}) \quad (324)$$

$$+ 2 \text{ لا} (\text{ف ھ} - \text{گ ب}) + 2 \text{ ما} (\text{گ ھ} - \text{ف ل}) + \text{ل ب} - \text{ھ} = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔  
اس لیے مطلوبہ لفاف مخروطی

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ ھ لا} + \text{ب ما} + 2 \text{ گ لا} + 2 \text{ ف ما} + \text{ج} = 0$$

ہے جہاں ۱، ب، ج، ف، گ، ھ کے وہی معنی ہیں جو دفعہ ۹ میں  
لئے گئے ہیں۔

وہ شرط کہ خط لا + م - ا = منحنی

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ ھ لا} + \text{ب ما} + 2 \text{ گ لا} + 2 \text{ ف ما} + \text{ج} = 0$$

کو مس کرے یہ ہے کہ

$$1 \text{ ل} + 2 \text{ ھ ل} + \text{م ب} + 2 \text{ گ ل} + 2 \text{ ف م} + \text{ج} = 0$$

پس دفعہ ۹ میں حاصل شدہ شرط کے ساتھ مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ۱، ب، ج،  
وغیرہ متعلق

۱	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

میں 'ا' 'ب' 'ج' وغیرہ کے صغیروں کے متناسب ہونے چاہئیں۔  
 اس کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو جاتی ہے کیونکہ (ا) کا صغیر  
 ب ج - ف 'ا' ہے یا  
 (ب ج - گ) (ا - ب - ط) - (گ - ح - ف) یعنی ا = ب ج - ف  
 اور اسی طرح دوسروں کے لیے -

یہی مشاہدہ طلب ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{vmatrix}$$

کیونکہ پہلا مقطع (ا) + (ب ج - ف) + (گ - ح - ف) = (گ - ح - ف) ہے۔

محزوطی فہ (ل' م) = . کامرکز معلوم کرنا۔

دو دو ماس جو محور ما کے متوازی ہیں مساوات

$$۱ل + ۲گ + ۳ح = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں -

اب اگر ما = . کے متوازی ماس ل، لا + ا = . اور ل، لا + ا = . ہوں تو

$$\frac{۱}{ل} + \frac{۱}{لا} = \frac{۱}{۲گ} - \frac{۱}{۳ح}$$

لیکن کسی محزوطی کامرکز ایسے خط پر ہوتا ہے جو متوازی ماسوں کے  
 کسی زوج کے درمیان وسط میں ہوتا ہے۔  
 اس لیے مرکز خط

$$۲لا + \frac{۱}{ل} + \frac{۱}{لا} = . یعنی ج - لا - گ = ۰ پر ہے۔$$

اسی طرح مرکز خط ج - م - ف = ۰ پر ہے۔

اس لیے مخروطی کا مرکز ہے

$$\left( \frac{گ}{ج}, \frac{ف}{ج} \right)$$

(۳۲۷) مثال ۱۔ خط ل لا + م ما + ا =۔ کا لفاف معلوم کرنا اس شرط کے ساتھ کہ

$$\frac{ف}{ل} + \frac{گ}{م} + \frac{ا}{ا} = ۰$$

اُن دو خطوں کی سمتیں جو (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں

$$ل م - (ف م + گ ل) (ل لا + م ما) = ۰$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔ یہ خطوط منطبق ہونے لگے اگر

$$گ ف لا ما = (ف لا + گ ما - ل م)$$

$$۰ = \sqrt{ا ف لا} + \sqrt{ا گ ما} + \sqrt{ل م}$$

کے مساوی ہے۔

مثال ۲۔ مخروطی س =  $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰$  میں مثلث

کھینچے گئے ہیں اور اضلاع میں سے دو مخروطی س =  $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰$

کو مس کرتے ہیں۔ تیسرے ضلع کا لفاف معلوم کرو۔

س کے نقطہ ۱ (لا، ما) سے مخروطی س = ۰ کے ماسوں کی مساوات

$$\left( \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} - ۱ \right) \left( \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} - ۱ \right) - \left( \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} + ۱ \right) \left( \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} - ۱ \right) = ۰ \dots (۱)$$

ہے۔

اب اگر ج ج ، ل لا + م ما + ن = ہو تو

$$\frac{ل}{۲} + \frac{م}{۲} - ۱ = ل ( \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱ ) ( ل لا + م ما + ن ) = ۰$$

(۲) . . . . .

کہ کسی خاص قیمت کے لیے وہی خطوط ہونگے جو (۱) سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{پس } \frac{ل}{۲} + \frac{م}{۲} = \frac{لا}{۲} = م$$

$$ل - ن = \frac{لا}{۲} = م$$

$$\text{اور } م - ن = \frac{ما}{۲} = م$$

۱،  $\frac{ما}{۲}$  ،  $\frac{لا}{۲}$  سے ترتیب وار ضرب دو تو

$$\frac{ل}{۲} = م لا = م ( \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱ ) = م لا$$

$$\frac{م}{۲} = م ما = م ( \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱ ) = م ما$$

$$\text{اور } \frac{ن}{۲} = م - ل = م ( \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱ ) = م ن$$

$$\text{لیکن } \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰ \text{ اس لیے}$$

(۲۸)

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{ن}{۲} = \frac{م}{۲} + \frac{ل}{۲}$$

اس لیے ل لا + م ما + ن = ۰ کا کاف شرط (۳) کے ساتھ

$$\frac{ل}{۲} + لا + \frac{م}{۲} = ما = ن$$

-۴-

یہ لفاف خود مخروطی میں ہوگا اگر

$$\frac{لا}{۲} = \frac{با}{۲} = \frac{ن}{۲}$$

اور یہ  $\frac{۱}{۲} \pm \frac{ب}{۲} \pm ۱ =$  میں تحویل ہوتا ہے [حسب دفعہ ۲۰۵]

۲۳۸۔ اگر ایک خط مستقیم کی مساوات

$$ل + لا + م + ما = ۱$$

ہو تو خط کا محل متعین ہوگا اگر ل، م معلوم ہوں۔ اور ل اور م کی قیمتوں کو بدلنے سے یہ مساوات کسی خط مستقیم کو تعبیر کر سکتی ہے۔ مقداروں ل اور م کو جو اس طرح ایک خط کے محل کو متعین کرتی ہیں خط کے محدود کہتے ہیں۔ خط ل + لا + م + ما = ۱ ثابت نقطہ (۱، ۰) میں سے گزرے گا اگر ل + م + ب + ۱ = ۱، اس لیے اس کو نقطہ کی مساوات کہتے ہیں۔

اگر ایک خط مستقیم کے محدود کسی رشتہ میں مربوط ہوں تو خط ایک منحنی کو لف کرے گا۔ اور وہ مساوات جو رشتہ کو بیان کرتی ہے منحنی کی حماسی مساوات کہلائی ہے۔

اگر منحنی کی مساوات ن ویں درجہ کی ہو تو منحنی کے ن حماس کسی نقطہ سے کھینچے جاسکتے ہیں۔

تعریف۔ منحنی کو ن ویں جماعت کا منحنی کہتے ہیں جبکہ اس کے ن حماس کسی نقطہ سے کھینچے جاسکیں۔

ہم دیکھ چکے ہیں [دفعہ ۲۳۷] کہ دوسرے درجہ کی حماسی مساوات



اب فرض کرو کہ  $ل، لا، م، ما، ا = ۱$ ۔ ماس نہیں ہے۔  
 فرض کرو کہ وتر  $ل، لا، م، ما، ا = ۱$ ۔ کے سروں پر کے ماس  $(ل، م)$   
 $(ل، م)$  ہیں۔ ان ماسوں کے نقاط ماس کی مساواتیں

$ل (۱، ۱ + م + م + گ) + م (۱ + ل + ب + م + ف) + گ ل$   
 $+ ف م + ج = ۰$ ، وغیرہ ہیں۔ وہ شرطیں کہ یہ دو نقطے خط  $ل، لا، م، ما، ا = ۱$  پر ہوں۔

$ل (۱، ۱ + م + م + گ) + م (۱ + ل + ب + م + ف) + گ ل + ف م$   
 $+ ج = ۰$  وغیرہ

یعنی  
 $ل (۱، ۱ + م + م + گ) + م (۱ + ل + ب + م + ف) + گ ل + ف م$   
 $+ ج = ۰$  وغیرہ ہیں۔ اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خطوط  $(ل، م)$  اور  
 $(ل، م)$  اس نقطہ میں سے گزرتے ہیں جس کی مساوات

$ل (۱، ۱ + م + م + گ) + م (۱ + ل + ب + م + ف) + گ ل + ف م + ج = ۰$   
 ہے۔ اس لیے یہ خط  $ل، لا، م، ما، ا = ۱$  کے قطب کی مساوات ہے۔

مثال۔ مخروطی کا مرکز لاتنا ہی پر کے خط کا قطب ہوتا ہے یعنی خط  $(۰، ۰)$  کا قطب۔ (۳۳۰)

اس لیے مرکز کی ماسی مساوات  $گ ل + ف م + ج = ۰$  ہے۔

۲۳۹۔ مخروطی کا مرتب دائرہ معلوم کرنا جبکہ مخروطی کی

ماسی مساوات دی گئی ہو۔

فرض کرو کہ مخروطی کی ماسی مساوات

$۱، ۱ + ل + م + ب + م + گ ل + ف م + ج = ۰$



ہے۔

حسب دفعہ ۲۳، مساوات

$$۱ل + ۲لھ + م + ب م - ۲(گ ل + ف م) (ل لا + م ما)$$

$$+ ج (ل لا + م ما) = ۰$$

سے ان دو ماسوں کی سمتیں حاصل ہوتی ہیں جو مخصوص نقطہ (لا، ما) میں گزرتے ہیں۔ یہ ماس ایک دوسرے کے علی القوم ہوں گے اگر

$$\frac{ل}{م} + \frac{ل}{م} = ۱ + ۲ = ۰ \text{ یعنی اگر } ل' \text{ اور } م' \text{ کے سروں کا مجموعہ صفر ہو۔}$$

پس اگر (لا، ما) محروطی کے مرتب دائرہ پر ہو تو حاصل ہونا چاہئے

$$۱- ۲گ لا + ج لا + ب - ۲ف ما + ج ما = ۰ \dots (۱)$$

محروطی کا مرکز جو مرتب دائرہ کے مرکز پر منطبق ہے نقطہ (گ، ف) ہے۔

اگر ج = ۰۔ تو مساوات (۱) ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

منحنی اس صورت میں ایک مکافی ہے اور اس کے مرتب کی مساوات

$$۲گ لا + ۲ف ما - ۱ - ب = ۰ \dots (۲)$$

ہے۔

اوپر ہم نے محوروں کو قائم فرض کیا ہے، لیکن اگر محمدوں کے محاور ایک دوسرے سے زاویہ سے پر مائل ہوں تو وہ شرط کہ خطوط مستقیم علی القوام ہوں

$$۱- ۲گ لا + ج لا + ب - ۲ف ما + ج ما + م - ۲(گ ل + ف م) (ل لا + م ما) + ج (ل لا + م ما) = ۰$$

ہے۔

اس دائرہ کا مرکز (گ، ف) ہے۔

(۳۳۱)

پس خواہ محاور قائم ہوں یا مائل، مخروطی کا مرکز جو مرتب دائرہ کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے (گ/ج، ف/ب) ہے حسب دفعہ ۱۳۔

۲۴۰۔ مخروطی کے ماسکے معلوم کرنا جبکہ مخروطی کی حماسی مساوات دی گئی ہو۔

فرنس کرو کہ ماسکوں کا زوج (لا، ما) اور (لا، ما) ہے خواہ یہ دونوں حقیقی ہوں یا دونوں خیالی۔ تب کسی حماس ل لا+م+ما+ا=۰ پر کے عمودوں کا حاصل ضرب ایک نیم محور کے مربع کے مساوی ہونا چاہئے۔ پس

$$(ل+لا+م+ما+ا) (ل+لا+م+ما+ا) - (ل+لا+م+ما+ا) (ل+لا+م+ما+ا) = ۰ \dots (۱)$$

چونکہ یہ ل اور م کی ان تمام قیمتوں کے لیے درست ہے جو دی گئی حماسی مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لیے مساوات (۱)

مساوات

$$(ل+لا+م+ما+ا) (ل+لا+م+ما+ا) - (ل+لا+م+ما+ا) (ل+لا+م+ما+ا) = ۰ \dots (۲)$$

کے معادل ہونی چاہئے۔ اس لیے

$$\frac{لا+لا-ر^۲}{ب} = \frac{لا+لا-ر^۲}{ب} = \frac{لا+لا-ر^۲}{ب} = \frac{لا+لا-ر^۲}{ب}$$

$$\frac{۱}{ج} = \frac{لا+لا}{ب} =$$

$$اس لیے ج لا+لا-ج ما+ما=۱-ب اور ج لا+لا+ج ما+ما=۲$$

$$نیز ج لا=۱-ب اور ج ما=۲-ب$$

ادپر کی مساواتوں سے لا اور با کو ساقط کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ  
ماسکہ (لا، با) دو مخروطیوں

$$ج لا - ج ما - رگ لا + ر ف + ما + د - ب =$$

$$ج لا - ج لا - ف لا - گ ما + د =$$

پر ہے۔

ادپر محوروں کو قائم فرض کیا گیا ہے۔ اگر محاور زاویہ سے پرمائل ہوں تو  
مساوات (۱) میں ل + م کی بجائے ل + م - ۲ ل م جم سے رکھنا چاہئے۔

(۳۳۲)

۲۴۱۔ اس مخروطی کے محوروں کے طول معلوم کرنا جبکی  
حماسی مساوات دی گئی ہو۔

دفعہ سابق کے بموجب، اگر (لا، با)، (لا، با)، ماسکوں کا زوج ہو تو

$$ج (ل لا + م با + ۱) (ل لا + م با + ۱) - ج ر (ل + م)$$

$$= د ل + ۲ ل م + م ب + م ر + ل ر + ف م + ج$$

پس (د ج ر) ل + ۲ ل م + م (ب ج ر) + م ر + ل ر + ف م + ج

خفی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے، اس کے لیے شرط

$$= \begin{vmatrix} 1 + ج ر & د & گ \\ ف & ب + ج ر & د \\ ج & ف & گ \end{vmatrix}$$

ہے۔ پس وہ مساوات جس سے نیم محوروں کے مربع حاصل ہوتے ہیں  
حسب ذیل ہے۔

$$ج ر + ج ر (ب ج - ف + ج - گ) + د =$$

۲۴۲۔ ہم ماسکی مخروطی۔ اگر (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما) ایک مخروطی کے ماسکے ہوں تو اس کی حماسی مساوات

$$(ل + لا + م + ا + ۱) (ل + لا + م + ا + ۱) - ر (ل + ا + م) = ۰$$

کے معادل ہے۔ پس اگر

$$۱ + ل + ۲ + م + ب + م + ۲ + گ + ل + ۲ + ف + م + ج = ۰$$

ایک مخروطی کی حماسی مساوات ہو تو کسی ہم ماسکی مخروطی کی حماسی مساوات

$$۱ + ل + ۲ + م + ب + م + ۲ + گ + ل + ۲ + ف + م + ج + ل + ل + م = ۰$$

ہوگی۔

پس ف (لا، ما) = کے ہم ماسکی مخروطیوں کی عام مساوات معلوم کرنے کے لیے ہم حسب ذیل طریقہ اختیار کرتے ہیں:

ف (لا، ما) = کی حماسی مساوات

$$۱ + ل + ۲ + م + ب + م + ۲ + گ + ل + ۲ + ف + م + ج = ۰$$

ہے۔ اس لیے کسی ہم ماسکی مخروطی کی حماسی مساوات

$$(ل + ل + ل + ل + ۲ + م + ب + ل + م + ۲ + گ + ل + ۲ + ف + م + ج) = ۰$$

ہے۔ اس لیے متناظر کارٹیزی مساوات

$$۱ + ل + ۲ + م + ب + ل + م + ۲ + گ + ل + ۲ + ف + م + ج = ۰$$

ہے جہاں ۱ و غیرہ (۲۴۳)

۱ + ل	۲	گ
۲	ب + ل	ف
۲	ف	ج

سے معلوم کرنے ہوں گے۔

پس اے ب ج۔ ف + ل ج۔ م = ف گ۔ ج = م = ۵  
ب = ب + ۵ ل ج۔ گ = گ۔ ل گ = ن = ف۔ ل ن

اور ج = ج + Δج + (ج + ج) + ج

اس لیے فہ (لا، ما) = کے ہم ماسکی مغز و ملی کی عام مساوات

$$\Delta f = (1, 1) + 2 + 1 = 4$$

جے جہاں  $d = j(a^2 + b^2) - 2ab$   $2 - 2ab - 2ab + 2ab + 2ab$

اسی طرح مرتب دائرہ کی مساوات د = ۰ ہے۔

۲۴۳۔ اگر دو مخروطیوں کی ماسی مساواتیں  $ms = m's$  اور  $ms' = m's$  ہوں تو میں  $ms = m's$ ۔ اس مخروطی کی عام ماسی مساوات ہوگی جو  $ms = m's$  اور  $ms' = m's$  کے مشترک ماسوں کو مس کرتا ہے۔

اگر میں =، مساوات اول + ۲ مل م + ب م + ۲ گ لا

۲+ ف م ا ج = کو اور سی = مست اول ۲+ ھ ل م + ب م ۲+ گ لا

۲ + ف + م + ج = کو تعبیر کرے تو میں۔ لہ میں =، ایک مخروطی کی  
 نما کسی مساوات ہے اور ل' م کی کوئی قیمتیں جو میں =، اور میں =،  
 دونوں کو پورا کریں میں۔ لہ میں =، کو بھی پورا کرینگے خواہ لہ کی قیمت  
 کچھ ہی ہو۔

اس لیے مخروطی س۔ لہ س۔، مخروطیوں س۔ = اور

میں :- کے مشترک ماسوں کو مس کرتا ہے ۔

۲۴۴۔ ان مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق معلوم کرنا جو چار  
ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ  $س =$ ۔ اور  $س =$ ۔ کسی دو مخروطیوں کی ماسی مساواتیں  
ہیں جو چار خطوں کو مس کرتے ہیں۔ تب  $س =$ ۔  $ل =$ ۔  $س =$ ۔ اُس مخروطی  
کی عام ماسی مساوات ہے جو ان خطوں کو مس کرتا ہے۔  
اب  $س =$ ۔  $ل =$ ۔  $س =$ ۔ کا مرکز مساواتوں  
(ج۔ لہ ج)۔ لا۔ (گ۔ لگ)۔ اور (ج۔ لہ ج)۔ ما۔ (ف۔ لہ ف)۔ =۔  
سے حاصل ہوتا ہے۔

لہ کو سا قط کرنے پر مطلوبہ مساوات  
لا (ج۔ ف۔ ج۔ ف)۔ + ما (ج۔ گ۔ ج۔ گ)۔ + ف۔ گ۔ ف۔ گ۔ =۔

حاصل ہوتی ہے۔ (۳۳۴)  
مثال۔ مخروطیوں کا ایک نظام ہے جن میں سے ہر مخروطی  
چار دے ہوئے خطوں کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں  
لحاظ سے ایک دے ہوئے خط مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک  
خط مستقیم ہے۔

مساوات  $س =$ ۔  $ل =$ ۔  $س =$ ۔ اُس مخروطی کی عام مساوات ہے جو ان  
دو مخروطیوں کے مشترک ماسوں کو مس کرتا ہے جن کی مساواتیں  $س =$ ۔  
اور  $س =$ ۔ ہیں۔

اب اُس خط کے قطب کی مساوات جس کے محدد مخروطی  $س =$ ۔  
سے  $ل$ ۔ (دفعہ ۲۳۸) ہیں

ل (ل۔ ل + م۔ م + گ)۔ + م (ل۔ ل + ب۔ ب + ف)۔ + گ (ل۔ ل + ف۔ ف + ج)۔

+ ل (ل۔ ل + ل۔ ل + م۔ م + گ)۔ + م (ل۔ ل + ب۔ ب + ف)۔ + ف (ل۔ ل + ف۔ ف + ج)۔

$$.= \{ گ + ل + ف + م + ج + ز \}$$

-4

اوپر کی مساوات سے ظاہر ہے کہ مخروطی میں  $1 + \frac{1}{2} = 1.5$  کے  
لحاظ سے خط (ل، م) کا قطب اُن نقطوں کو ملانے والے خط پر ہے جن کی  
مساواتیں

ل (ل + م + گ) + م (م + ل + ب + م + ف)

گ + ل + ف + م + ج = .

اور ل (ل + ل + م + گ) + م (م + ل + ب + م + ف)

گہل + فہم + جہ =

ہیں۔ پس مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۲۴۵۔ اُن تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو چار دے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کریں ہم محوّر ہوتے ہیں۔ چار دے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرنے والے مخروطی کی عام مساوات

۱۔ لہ میں رہا = ہے جہاں میں رہا = اور میں رہا = نظام کے کسی  
دو محرومیوں کی ماسی مساواتیں ہیں۔

اب س۔ ل س۔ = کا مرتب دائرہ

۱ + ب - ۲ گ - لا - ۲ ف - ۱ ج (لا + ما)

$$= \{ (1 + \beta - \beta^2)g - \beta^2 - \beta^2 f + \beta^2 (1 + \beta^2) \}$$

ہے جو سرکایا، محروم افراد کے ایک نظام کو تعمیر کرتا ہے جس کا بنیادی محور

$$۲\left(\frac{گ}{ج} - \frac{۱}{ج}\right) + ۱\left(\frac{ف}{ج} - \frac{۱}{ج}\right) - ۱\left(\frac{۱}{ج} + \frac{۱}{ج}\right) + \frac{۱}{ج} = ۰$$

ہے۔۔۔ نظام کے مخروطیوں میں سے ایک، مکافی ہے اور اس مکافی کا مرکز ہم محور نظام کا بنیادی محور ہے۔

۲۳۶۔ ان تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو تین دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کریں ایک ہی دائرہ سے علی القواہم منقطع ہوتے ہیں۔

اس مخروطی کی عام مساوات جو تین دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے

$$ل_۱س_۱ + ل_۲س_۲ + ل_۳س_۳ = ۰ \quad (۱)$$

ہے جہاں  $ل_۱$ ،  $ل_۲$ ،  $ل_۳$  کی کوئی قیمتیں ہو سکتی ہیں اور  $س_۱ = ۰$ ،  $س_۲ = ۰$ ،  $س_۳ = ۰$  (۳۳۵)

$س_۳ = ۰$  کوئی تین مخروطی ہیں جو خطوں کو مس کرتے ہیں۔

اب دفعہ ۲۳۹ سے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی مخروطی کے مرتب دائرہ کی مساوات،  $ل_۱$ ،  $ل_۲$ ،  $ل_۳$  وغیرہ کی رقوم میں، درجہ اول کی ہوتی ہے۔

اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر  $ج_۱ = ۰$ ،  $ج_۲ = ۰$ ،  $ج_۳ = ۰$ ، علی الترتیب

$$س_۱ = ۰، س_۲ = ۰، س_۳ = ۰ \text{ کے مرتب دائرے ہوں تو } ل_۱س_۱ + ل_۲س_۲ + ل_۳س_۳ = ۰ \text{ کے مرتب دائرہ کی مساوات}$$

$$ل_۱ج_۱ + ل_۲ج_۲ + ل_۳ج_۳ = ۰$$

ہوگی۔



اب ایک دائرہ ایسا ہوگا جو کسی تین دائروں ج، =، ج، =، ج، =۔  
 کو علی القوائم قطع کرے گا اور دفعہ ۸۱ میں معلوم شدہ شرط سے یہ ظاہر ہے کہ  
 اگر ایک دائرہ تین دائروں ج، =، ج، =، ج، =۔ کو علی القوائم  
 قطع کرے تو وہ نظام  

$$لہ، ج، + لہ، ج، + لہ، ج، =$$
 کے تمام دائروں کو علی القوائم قطع کرے گا۔

قطبی ایک مکانی کو لف کرتے ہیں۔

۵۔ مستقل نصف قطر کے دائروں کے مرکز ایک دے ہوئے دائرہ بڑیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں کے لحاظ سے ایک دے ہوئے نقطہ کے قطبیوں کا لغاف ایک مخروطی ہے۔

۶۔ ایک دے ہوئے خط مستقیم کے کسی نقطہ ف میں سے ایک خط ف ق کھینچا گیا ہے جو ف کے قطبی کے متوازی ہے جہاں یہ قطبی ایک دے ہوئے مخروطی کے لحاظ سے لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان خطوط مستقیم کا لغاف ایک مکانی ہے۔

(۳۳۶)

۷۔ اگر کتاب کے ایک ورق کو اس طرح موڑا جائے کہ اس کا ایک کونہ مقابل کے ضلع پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ سل کا خط ایک مکانی کو لس کرے گا۔

۸۔ ایک ناقص اپنے مرکز کے گرد گردش کرتا ہے۔ ابتدائی محل کے ساتھ تقاطع کے دتروں کا لغاف معلوم کرو۔

۹۔ مستقل مقدار کا ایک زاویہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ساق ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتی ہے اور اس کا سر ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دوسری ساق ایک مکانی کو لف کرتی ہے۔

۱۰۔ ناقص کے ایک دتروں کا وسطی نقطہ ایک دے ہوئے خط مستقیم پر ہے۔ ثابت کرو کہ دتروں کا ایک مکانی کو لف کرتا ہے۔

۱۱۔ ایک ناقص کے مزدوج قطروں کا کوئی زوج ایک ثابت دائرہ سے جو ناقص کے ہم مرکز ہے نقطوں ف، ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف، ق ایک متشابہ اور متشابہاً واقع ناقص کو لف کرے گا۔

۱۲۔ اگر ایک خط مستقیم پر متعدد ثابت نقطوں سے عمود کھینچے جائیں اور ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط مستقیم ایک مخروطی کو لف کرے گا۔

۱۳۔ ایک مثلث کے ضلع (ممدودہ بضرورت) ایک خط مستقیم سے نقطوں 'ل'، 'م'، 'ن' پر منقطع ہوتے ہیں۔ اگر ل م م ن مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط ایک مکافہ کو لف کرے گا۔

۱۷۔ ایک ثابت نقطہ میں سے جو ایک مکانی کے محور پر ہے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو منحنی کو 'ف' ق پر قطع کرتا ہے، اور وہ دائرہ جو 'ف' ق اور ماسکس میں سے گذرتا ہے مکانی کو مکرر 'ف' ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ف' ق دوسرے مکانی کو لف کرتا ہے جس کا ماسکس

۱۵۔ اگر کسی مثلث  $ABC$  کا کم از کم ایک زاویہ  $90^\circ$  ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کے ضلع اس مخروطی کو لف کرینگے جس کی مساوات

$${}^2(j - b - 9 - 6 - 3 + 11 - 3) = (3 - 6)(3 - 11) j$$

۱۸۔ اُن تمام مخروطیوں کے متقارب جو دو دئے ہوئے خطوط مستقیم کو دئے ہوئے نقطوں پر مس کریں ایک مکانی کو لف کرتے ہیں۔

۱۹۔ ایک مکانی دو ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے اور ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا مرتب ایک مخروطی کو لف کرتا ہے۔

۲۰۔ ایک ناقص کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر دو طرف 'ق' ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے تو وتر 'س' میں ایک مکانی کو لف کرے گا۔

۲۱۔ ایک قائم زائد کسی نصف قطر کے ایک دائرہ سے منقطع ہوتا ہے اور اس دائرہ کا مرکز زائد کے محوروں میں سے ایک پر ایک ثابت نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو نقاط تقاطع کو ملاتے ہیں یا تو زائد کے ایک محور کے متوازی ہیں یا ایک ثابت مکانی کے مماس ہیں۔

۲۲۔ ناقصوں کا ایک نظام ہے جن کے محور مقدار اور سمت میں دئے گئے ہیں اور مرکز ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبی کا لفا ایک مکانی ہے۔

۲۳۔ دو مساوی دائروں میں سے ایک ثابت ہے اور دوسرا ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان کا بنیادی محور ایک مخروطی کو جس کا ماسک ثابت نقطہ ہے لف کرتا ہے۔

۲۴۔ اگر ایک ناقص کے مرکز سے سمتی نصف قطروں کے زوج محور اعظم کے ساتھ ایسے زاوے بنائے ہوئے کھینچے جائیں جن کا مجموعہ ایک قائمہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ اُن وتروں کے قطبیوں کا طریق جو ان کے سروں کو ملاتے ہیں ایک ہم مرکز زائد ہے اور وتروں کا لفا ایک قائم زائد ہے۔

۲۵۔ ایک مخروطی کے مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے کسی نقطہ سے ایک محور کے سروں تک خطوط کھینچے گئے ہیں اور یہ خطوط

منحنی کو مکرر نقطوں 'ف' 'ق' پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' کا لغاف ایک قائم زاہد ہے۔

۲۶۔ ایک ناقص کا دو ہر اُصعین 'ف' 'ن' ہے جو مرکز 'ج' اور ایک 'راس' سے مساوی فاصلہ پر ہے۔ اگر 'ف' 'ق' 'ج' میں سے مکانی کھینچ جائیں تو ثابت کرو کہ مکانی اور ناقص کے دیگر نقاط قطب طبع کو ملانے والے وتر ایک دوسرے ناقص کو مس کریں گے جو ہر طرح دئے ہوئے ناقص کے مساوی ہو گا۔

۲۷۔ دو دئے ہوئے متوازی خطوط مستقیم ایک خط سے جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے نقطوں 'ف' 'ق' پر منقطع ہوتا ہے۔ اُس دائرہ کا لغاف معلوم کرو جو 'ف' 'ق' کو قطران کر کھینچا گیا ہو۔

۲۸۔ ایک مخروطی کے متوازی وتروں کے ایک نظام پر نہیں قطران کر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں کا لغاف دوسرا مخروطی ہے۔

۲۹۔ ایک مکانی کا ایک وتر ایسا ہے کہ وہ دائرہ جو اس وتر کو قطران کر کھینچا گیا ہو منحنی کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر ایک دوسرے مکانی کو لف کرتا ہے۔

۳۰۔ ایسے مکانی کھینچے گئے ہیں جن میں 'راس' ۱ مشترک ہے اور جو ایک ثابت نقطہ 'ف' میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان تمام مکانیوں کے مہیوں کا لغاف ایک مکانی ہے جس کے وتر خاص کا طول ۱ 'ف' ہے۔

۳۱۔ ایک مکانی کے دو ماس کھینچے گئے ہیں، اگر ان ماسوں کے درمیانی داخلی اور خارجی زاویوں کے ناصف مخروطی کے دو دئے ہوئے قطروں کے متوازی ہوں تو وتر تاس ایک زاہد کو لف کرے گا جس کے متقارب قطروں کے مزدوج ہوں گے۔

۳۲۔ ایک دئے ہوئے مخروطی 'س' کے لحاظ سے ایک نقطہ

ف کا قطبی دو ثابت خطوط مستقیم (ب، ج) کو ق، ق پر قطع کرتا ہے۔  
اگر ا، ق، ق کی تصنیف کرے تو ثابت کرو کہ ف کا طریق ایک مخروطی  
ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ق، ق کا لفاف دوسرا مخروطی ہے۔

۳۳۔ اگر ایک مخروطی پر دو نقطے ایسے لیے جائیں کہ ایک ماسکے  
میں سے ان کے فاصلوں کا اوسط موسیقی مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ان کو  
ملائے والا وتر ہمیشہ ایک مخروطی کو مس کرے گا جس کا ایک ماسکے میں ہوگا۔  
۳۴۔ ایک مکانی کے اس وتر کا لفاف جس کے محاذی ماسکے پر  
ایک قائمہ زاویہ بنے ناقص

$$(لا - ۱۳) + ۲ = ۲۸$$

ہوگا اگر مکانی کی مساوات ۲ - ۱۴ = ۰ ہو۔

۳۵۔ مخروطی کا ایک وتر منحنی کے ایک دے ہوئے نقطہ پر مستقل  
زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر ایک مخروطی کو جو دے ہوئے مخروطی سے  
ساتھ دو ہر اتماں رکھتا ہے لف کرتا ہے۔

(۳۳۹)

۳۶۔ ایک ثابت نقطہ میں سے ایک دائرہ کے دو وتر ایک  
دوسرے کے علی القوائم کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس چار ضلعی کا  
ہر ضلع جو ان وتروں کے سروں کو ملانے سے بنتا ہے ایک مخروطی کو  
لف کرتا ہے جس کے ماسکے ثابت نقطہ اور دائرہ کا مرکز ہیں۔

۳۷۔ ایک نقطہ میں سے اس کے قطبی (بلحاظ ایک مکانی کے)  
پر عمود کھینچا گیا ہے جو مکانی کے محور سے ج پڑتا ہے۔ ثابت کرو کہ  
مکانی کے وہ وتر جن کے محاذی میں پر قائمہ زاویہ بنے سب کے سب  
ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں جس کا مرکز ج ہے۔

۳۸۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے وتر جن کے محاذی ایک  
ثابت نقطہ پر قائمہ زاویہ بنے دوسرے مخروطی کو لف کرتے ہیں۔  
نیز ثابت کرو کہ لفاف کا ماسکے ہے اور کے متناظر مرتب  
و کا قطبی (بلحاظ ابتدائی مخروطی) ہے۔

ثابت کرو کہ متشابہ اور متشابہا واقع ہم مرکز محزوطیوں کے متناظر لفاف ہم ماسکی ہوتے ہیں۔

۳۹۔ ایک ثابت خط مستقیم ہم ماسکی محزوطیوں کے ایک نظام کے ایک محزوطی سے نقطوں 'ف' 'ق' پر ملتا ہے۔ 'ف' اور 'ق' پر عماد کھینچے گئے ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع سے کھینچے ہوئے دو دوسرے عمادوں کو ملانے والا خط 'س' میں ہے۔ ثابت کرو کہ 'س' میں کالاف ایک مکانی ہے جو محوروں کو مس کرتا ہے۔

۴۰۔ ایک خط دو دئے ہوئے دائروں کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ خط کے وہ حصے جو دائروں سے منقطع ہوتے ہیں مستقل نسبت میں ہیں ثابت کرو کہ خط ایک محزوطی کو لف کرے گا جو ایک مکانی ہوگا اگر نسبت ایک کے مساوی ہو۔

۴۱۔ ایک قائم زاؤہ کے وتر جو ایک دوسرے کے علی القوالم ہیں ایک ثابت نقطہ و پر اپنے محاذی قائمہ زاؤے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ و کے قطبی پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۴۲۔ مکانی ما<sup>۱</sup>۔ ۴۷ لا<sup>۱</sup> = ۰ کے دو وتر 'ف' 'ق' 'س' میں سے گزرتے ہوئے کھینچے گئے ہیں اور یہ وتر ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ  $\frac{\pi}{4}$  بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط 'ف' 'ق' ہمیشہ ناقص

$$(لا - ۱۱۲) + ۸ = ۱۲۸$$

کو مس کرے گا۔

۴۳۔ ایک محزوطی پر نقطوں کے ایسے زوج لیے گئے ہیں کہ (۳۴۰) وہ خطوط جو ان نقطوں کو ایک دئے ہوئے نقطہ سے ملاتے ہیں ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے ساتھ مساوی میلان رکھتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ وتر جو نقطوں کے کسی ایسے زوج کو ملاتا ہے ایک محزوطی کو لف کرتا ہے جس کا مرتب دائرہ ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

۴۴۔ مخروطی مس کے وتر جو ایک ثابت نقطہ پر اپنے محاذی قائمہ زاویہ بناتے ہیں مخروطی مس کو لف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر مس چار ثابت نقطوں میں سے گزرے تو مس چار ثابت خطوطِ مستقیم کو مس کرے گا۔  
 ۴۵۔ ایک مخروطی چار ثابت نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' میں سے گزرتا ہے اور 'ب' اور 'ج' پر اس کے حماس 'ج'، 'ا' اور 'ج'، 'ب' (مردودہ) سے نقطوں 'ف'، 'ق' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ف'، 'ق' ایک مخروطی کو لف کرتا ہے جو 'ب'، 'ج'، 'ا' کو مس کرتا ہے۔

۴۶۔ اگر ایک وتر ایک دائرہ کو دو ایسے نقطوں 'ا'، 'ب' پر قطع کرے کہ مستطیل 'و'، 'ا'، 'ب'، 'و' مستطیل ہو جہاں 'و' ایک ثابت نقطہ ہے تو ثابت کرو کہ وتر کا لفاف ایک مخروطی ہے جس کا مسکہ وہ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر 'و'، 'ا'، 'ب' مستطیل ہو تو وتر ایک مکانی کو لف کرے گا۔

۴۷۔ ایک دائرہ کے ایک قطر پر دو نقطے 'ا'، 'ب' مرکز سے مساوی فاصلہ پر لیے گئے ہیں اور وہ خطوط جو ان نقطوں کو دائرہ کے کسی نقطہ 'ف' سے ملاتے ہیں دائرہ کو مرکز 'ق' پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ق'، 'ا'، 'ب' ایک مخروطی کو لف کرتا ہے جس کا امدادی دائرہ دیا ہوا دائرہ ہے۔

۴۸۔ (ا + ب) = ۱۔ کے وتر جو نقطہ (ع، ب) پر اپنے محاذی قائمہ زاویہ بناتے ہیں ایک مخروطی کو لف کرتے ہیں جس کے اعظم امدادی دائرے کی مساوات (ا + ب) (لا + ما) = ۲، ب = ۱، لا = ۲، ب + ع = ۱، لا + ب = ۱۔ ہے۔

۴۹۔ دو دئے ہوئے دائروں میں سے ایک پر نقطہ 'ف' اور دوسرے پر نقطہ 'ق' لیے گئے ہیں ایسے کہ 'ف' اور 'ق' پر کے حماس عمود واریں ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ف'، 'ق' ایک مخروطی کو لف کرتا ہے۔

۵۰۔ ایک مخروطی کو ایک دئے ہوئے مثلث میں کھینچا گیا ہے اور مخروطی کے خوروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔



## تیرہواں باب

### سہ خطی محدود

۲۴۷۔ فرض کرو کہ کوئی تین خطوط مستقیم لیے گئے ہیں جو ایک نقطہ پر نہیں ملتے اور فرض کرو کہ ان خطوط مستقیم سے مثلث (ب ج ف) بنتا ہے۔ فرض کرو کہ اضلاع ب ج، ج ا، ا ب سے کسی نقطہ ف کے عمودی فاصلے علی الترتیب ع، ہ، جہ ہیں، تب ع، ہ، جہ کو مثلث (ب ج ف) کے حوالے سے نقطہ ف کے سہ خطی محدود کہا جاتا ہے۔ ہم ع، ہ، جہ کو مثبت سمجھیں گے جبکہ وہ اسی سمت میں کھینچے گئے ہوں جس میں حوالے کے مثلث کے راسوں سے مقابل کے فضلوں پر کے عمود کھینچے جاتے ہیں۔

ان عمودی فاصلوں میں سے دو کسی نقطہ کے محل کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں، اس لیے ان تین فاصلوں میں کوئی رشتہ موجود ہونا چاہئے۔ یہ رشتہ

$$ا ع + ب ہ + ج جہ = ۲ \Delta$$

ہے جہاں  $\Delta$  مثلث (ب ج ف) کا رقبہ ہے۔ یہ رشتہ مثلث کے اندر کسی نقطہ کے لیے صدقاً درست ہے کیونکہ مثلث (ب ج ف) کے ج ف ا، اور ا ف ب باہم ملکر مثلث (ب ج ف) کے مساوی ہیں۔ اگر عمودوں کی علامتوں کا لحاظ کیا جائے تو یہ بھی آسانی

معلوم ہو سکتا ہے کہ رشتہ بالا مثلث کے باہر یا ضلعوں کے اوپر کسی نقطہ کے لیے درست ہے اگر مختلف صورتوں کے لیے مختلف شکلیں کھینچ لی جائیں۔ پس ثابت ہوا کہ رشتہ  $1e + b + c = 52$  عام طور پر درست ہے۔

۲۴۸۔ رشتہ  $1e + b + c = 52$  کے ذریعہ کسی مساوات کو  $e$ ،  $b$ ،  $c$  میں متجانس بنایا جاسکتا ہے، اور جب یہ ہو جائے تو ہم نقطہ کے اصلی محدودوں کو استعمال کرنے کی بجائے ان کے متناسب کوئی مقداریں استعمال کر سکتے ہیں کیونکہ اگر کوئی قیمتیں  $e$ ،  $b$ ،  $c$  ایک متجانس مساوات کو پورا کریں تو قیمتیں  $k e$ ،  $k b$ ،  $k c$  بھی اس مساوات کو پورا کریں گی۔

۲۴۹۔ اگر مثلث کے اندر کسی مبداء کو لیا جائے تو اس نقطہ میں سے گزرنے والے کسی قائم محوروں کے حوالے سے مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں شکل (۳۴۲)

$$- \text{لاجم طم} - \text{ماجب طم} + \text{ع} = 0$$

$$- \text{لاجم طم} - \text{ماجب طم} + \text{ع} = 0$$

$$- \text{لاجم طم} - \text{ماجب طم} + \text{ع} = 0$$

میں لکھی جاسکتی ہیں جہاں  $\text{جم}(\text{طم} - \text{طم}) = \text{جم}(\text{ا}) - \text{جم}(\text{طم} - \text{طم}) = \text{جم}(\text{ب})$  اور  $\text{جم}(\text{طم} - \text{طم}) = \text{جم}(\text{ج})$

[ہم نے ان مساواتوں کو اس طرح لکھا ہے کہ مستقل رقمیں

مثبت ہیں، اس کی وجہ یہ ہے کہ مثلث کے اندر کسی نقطہ سے مقابل کے ضلعوں پر عمود سب کے سب مثبت ہوتے ہیں]۔ پس [دفعہ ۱] حاصل ہوتا ہے

عہ = ع - لاجم طہ - ماجب طہ ،

بہ = ع - لاجم طہ - ماجب طہ ،

جہ = ع - لاجم طہ - ماجب طہ ،

ان مساواتوں کی مدد سے ہم کسی مساوات کو جو سہ خطی محدود

میں ہو کارٹیزی محدودوں کی مساوات میں تحویل کر سکتے ہیں۔

۲۵۰۔ درجہ اول کی ہر مساوات ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

فرض کرو کہ مساوات

$$ل = ع + م + بہ + ن جہ = ۰$$

ہے۔ اگر ہم ع، بہ، جہ کی بجائے ان قیمتوں کو درج کریں جو دفعہ سابق میں حاصل ہوئی ہیں تو کارٹیزی محدودوں کی مساوات جو اس طرح حاصل ہوگی صرف درجہ اول کی ہوگی۔ اس لیے طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۲۵۱۔ ہر خط مستقیم کو درجہ اول کی ایک مساوات سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

یہ ثابت کرنا کافی ہو گا کہ ل، م، ن کی ایسی قیمتیں ہمیشہ معلوم ہو سکتی ہیں کہ مساوات ل = ع + م + بہ + ن جہ = ۰ جو ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے کسی دو نقطوں کے محدودوں سے پوری ہو۔

اگر نقطوں کے محدود (عہ، بہ، جہ) اور (عہ، بہ، جہ) ہوں تو

$$ل\text{ عہ} + م\text{ بہ} + ن\text{ جہ} = ۰$$

$$ل\text{ عہ} + م\text{ بہ} + ن\text{ جہ} = ۰$$

حاصل ہونا چاہئے اور صریحاً ل، م، ن کی قیمتیں ہمیشہ معلوم کیجا سکتی ہیں جو ان دو مساواتوں کو پورا کریں۔

۲۵۲۔ دو دے ہوئے نقطوں میں سے گزرنیوالے خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دے ہوئے نقطوں کے محدود (عہ، بہ، جہ) اور (عہ،

بہ، جہ) ہیں۔  
نکسی خط مستقیم کی مساوات

$$ل\text{ عہ} + م\text{ بہ} + ن\text{ جہ} = ۰$$

ہے۔ نقطے (عہ، بہ، جہ) اور (عہ، بہ، جہ) اس خط پر ہوں گے اگر

$$ل\text{ عہ} + م\text{ بہ} + ن\text{ جہ} = ۰$$

$$ل\text{ عہ} + م\text{ بہ} + ن\text{ جہ} = ۰$$

ان مساواتوں سے ل، م، ن کو سا قط کرنے پر مطلوبہ مساوات

$$۰ = \begin{vmatrix} عہ & بہ & جہ \\ عہ & بہ & جہ \\ عہ & بہ & جہ \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۵۳۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ تین دے ہوئے نقطے ایک خط مستقیم میں ہوں۔

فرض کرو کہ تین دے ہوئے نقطے (عہ، بہ، جہ) (عہ، بہ، جہ) اور

۱ عہ ۲ ب ۳ جہ ) ہیں۔ اگر یہ نقطے خط مستقیم

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰  
 ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰  
 ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰  
 ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰

پر ہیں تو

پس ل 'م' ن کو ساقط کرنے پر مطلوبہ شرط

$$= \begin{vmatrix} \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۵۴۔ دو دے ہوئے خطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع معلوم کرنا۔ (۳۴۳)

فرض کرو کہ دے ہوئے خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$\text{ل عہ} + \text{م بہ} + \text{ن جہ} = ۰$$

$$\text{ل عہ} + \text{م بہ} + \text{ن جہ} = ۰$$

اور

ہیں۔

اُس نقطہ پر جو دونوں خطوں میں مشترک ہے

$$\frac{\text{عہ}}{\text{م} - \text{ن}} = \frac{\text{بہ}}{\text{ن} - \text{ل}} = \frac{\text{جہ}}{\text{ل} - \text{م}} \dots (۱)$$

ان مساواتوں سے محدودوں کی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں۔

اگر اصلی قیمتیں مطلوب ہوں تو کسروں (۱) کے نسب نماؤں

اور شمار کنندوں کو علی الترتیب ۱، ۲، ۳ سے ضرب دیکر

جمع کرو، تب ہر کسر

۵۲

۱۔ ع + ب + ن + ج

ن	م	ل	و (م - ن - م) + ب (ن - ل - ن) + ج (ل - م - ل) م
ن	م	ل	
ن	م	ل	

کے مساوی ہے۔

یہ خطوط حوالے کے مثلث سے محدود فاصلہ پر ایک نقطہ میں نہیں ملیں گے یعنی وہ متوازی ہونگے اگر

$$= \begin{vmatrix} \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \end{vmatrix}$$

۲۵۵۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ تین خطوط مستقیم ایک نقطہ پر ملیں  
فرض کرو کہ خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$\text{ل} + \text{ع} + \text{م} + \text{ب} + \text{ن} + \text{ج} = ۰$$

$$\text{ل} + \text{ع} + \text{م} + \text{ب} + \text{ن} + \text{ج} = ۰$$

$$\text{ل} + \text{ع} + \text{م} + \text{ب} + \text{ن} + \text{ج} = ۰$$

ہیں۔ یہ خطوط ایک نقطہ پر ملیں گے اگر اوپر کی مساواتیں سب کی سب

ع + ب + جہ کی ان ہی قیمتوں سے پوری ہوں۔ پس ع + ب + جہ کو  
ساقط کرنے سے مطلوبہ شرط

$$= \begin{vmatrix} \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۵۶۔ اگر کارٹیزی محدودوں میں ایک خط مستقیم کی مساوات  
 $لا + ب + ج = ۰$  ہو تو وہ مقطوع جو خط محوروں پر قطع کرتا ہے  
 علی الترتیب  $\frac{ج}{ب}$ ،  $\frac{ج}{ب}$  ہیں۔ پس اگر  $لا$  اور  $ب$  بہت چھوٹے  
 ہوں تو خط مبدا سے بہت دور فاصلہ پر واقع ہوگا۔ انتہا میں خط کی مساوات  
 شکل

$$۰ = ج + لا \times ۰ + لا \times ۰$$

اختیار کریں گی۔ پس لا انتہاؤں اور اُس خط مستقیم کی مساوات جس کو بالعموم  
 لاتنا ہی پر کا خط کہتے ہیں

$$۰ = ج + لا \times ۰ + لا \times ۰$$

۴۔

جب لاتنا ہی پر کے خط کو دوسرے جلوں کے ساتھ جن میں لا اور  
 لا ہوں استعمال کرنا پڑتا ہے تو اس کو صرف ج = ۰ لکھتے ہیں۔  
 سہ خطی محدودوں میں لاتنا ہی پر کے خط کی مساوات

$$لا + ب + ج = ۰$$

ہے۔ کیونکہ اگر کسی نقطہ کے محدود  $لا$ ،  $ب$ ،  $ج$  ہو تو غیر متغیر  
 رشتہ سے  $ک (لا + ب + ج) = ۵۲$  حاصل ہوتا ہے یا

$$لا + ب + ج = \frac{۵۲}{ک}$$

پس اگر  $ک$  لا انتہا بڑا ہو جائے تو انتہا میں رشتہ  $لا + ب + ج = ۰$   
 حاصل ہوتا ہے۔ یہ ایک خطی رشتہ ہے جو محدود مقداروں سے جو کسی  
 لا انتہاؤں نقطہ کے محدودوں کے متناسب ہوں پورا ہوتا ہے لیکن وہ  
 ان محدودوں یا مقداروں سے پورا نہیں ہوتا جو حوالے کے مثلث سے محدود  
 فاصلہ پر کسی نقطہ کے محدودوں کے متناسب ہوں۔

۲۵۷۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو دے ہوئے خطوط مستقیم متوازی ہوں۔  
فرض کرو کہ خطوط کی مساواتیں

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

ہیں۔ اگر یہ خطوط متوازی ہیں تو ان کا نقطہ تقاطع مبدا سے لامتناہی فاصلہ پر ہوگا اور اس لیے اس کے محدود رشتہ

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

کو پورا کریں گے۔

اوپر کی تین مساواتوں سے ع، م، ب، جہ کو سا قفا کرنے پر مطلوبہ

مساوات

(۳۴۶)

$$۰ = \begin{vmatrix} ل & م & ن \\ ل & م & ن \\ ل & م & ن \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۵۸۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو ایک دے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دے ہوئے خط مستقیم کے متوازی ہو۔

فرض کرو کہ دے ہوئے خط کی مساوات

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

ہے۔ مطلوبہ خط اس خط سے وہاں ملتا ہے جہاں

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$



اس لیے مطلوبہ مساوات کی شکل

ل عہ + م بہ + ن جہ + لہ (ل عہ + ب بہ + ج جہ) = ۰ ہے۔ اگر دئے ہوئے نقطہ کے محدود ف، گ، ہ ہوں تو

ل ف + م گ + ن ہ + لہ (ل ف + ہ گ + ج ہ) = ۰ بھی حاصل ہونا چاہئے۔ اس لیے

$$\frac{\text{ل عہ} + \text{م بہ} + \text{ن جہ} + \text{لہ}}{\text{ل ف} + \text{م گ} + \text{ن ہ} + \text{لہ}} = \frac{\text{ل عہ} + \text{ب بہ} + \text{ج جہ}}{\text{ل ف} + \text{ب گ} + \text{ج ہ}}$$

اس کی ایک مخصوص اور مفید صورت اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا ہے جو والے کے مثلث کے ایک راس میں سے گزرے اور ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے متوازی ہو۔

اگر ل راس ہے تو اس کے محدود (ف، گ، ہ) ہیں اور مساوات (م ل - ل ب) بہ + (ن ل - ل ج) جہ = ۰

ہو جاتی ہے۔

۲۵۹۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو دئے ہوئے خطوط مستقیم

ایک دوسرے پر عمود ہوں۔  
فرض کرو کہ خطوط کی مساواتیں

$$\text{ل عہ} + \text{م بہ} + \text{ن جہ} + \text{لہ} = ۰$$

$$\text{ل عہ} + \text{م بہ} + \text{ن جہ} + \text{لہ} = ۰$$

ہیں۔ اگر ان مساواتوں کو دفعہ ۲۴۹ میں حاصل شدہ مساواتوں کے ذریعہ کارٹینی محدودوں میں بیان کیا جائے تو وہ

$$\text{لا} (\text{جم طہ} + \text{م جم طہ} + \text{ن جم طہ}) + \text{ما} (\text{ل جب طہ} + \text{م جب طہ} + \text{ن جب طہ})$$

$$- \text{ل ع} - \text{م ع} - \text{ن ع} = ۰$$

(۳۴۷) اور لا (ل جم طہ + م جم طہ + ن جم طہ) + ما (ل جب طہ + م جب طہ + ن جب طہ)

- ل ع - م ع - ن ع = ۰

ہو جاتی ہیں۔ اس لیے یہ خطوط ایک دوسرے پر عمود ہوں گے اگر

(ل جم طہ + م جم طہ + ن جم طہ) (ل جم طہ + م جم طہ + ن جم طہ)

+ (ل جب طہ + م جب طہ + ن جب طہ) (ل جب طہ + م جب طہ + ن جب طہ)

= ۰ (ن جب طہ)

یعنی اگر

ل ل + م م + ن ن + (ل م + ل م) جم (طہ ~ طہ) + (م م + م م) جم (طہ ~ طہ)

+ م م + م م + ن ن + (ن ل + ل ن) جم (طہ ~ طہ) = ۰

لیکن جم (طہ - طہ) = جم ۱، جم (طہ - طہ) = جم ۱

اور جم (طہ - طہ) = جم ج

اس لیے مطلوبہ شرط

ل ل + م م + ن ن - (م م + م م) جم ۱ - (ن ل + ل ن) جم ج

= ۰ (ل م + ل م) جم ج = ۰

ہے۔

اگر خطوط مستقیم مساوات

ع ع + و و + ط ط + ج ج + ح ح + و و + ج ج + ط ط = ۰

سے معلوم ہوں تو اوپر کی شرط سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عمود وار ہونی کی شرط

ع ع + و و + ط ط - ۱ ع ج - ۲ و ج - ۲ ط ج = ۰

-۴-

۲۶۰۔ ایک دے ہوئے خط مستقیم سے ایک دے ہوئے  
نقطہ کا عمودی فاصلہ معلوم کرنا۔  
فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات

ل ع + م ب + ن ج = ۰  
ہے۔ اس مساوات کو کارٹیزی محدودوں میں بیان کرنے سے مساوات  
لا (ل جم ط + م جم ط + ن جم ط) + ما (ل جب ط + م جب ط + ن جب ط)  
ل ع - م ع - ن ع = ۰

حاصل ہوتی ہے۔

اس خط سے کسی نقطہ کا عمودی فاصلہ اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ  
اس نقطہ کے محدودوں کو مساوات کی دائیں جانب کے جملہ میں درج  
کر کے لا اور ما کے سروں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر المربع سے  
تقسیم کیا جائے۔ اس کے بعد اگر اس کو پھر سہ خطی محدودوں میں بیان  
کیا جائے تو نقطہ (ف، گ، ہ) سے دے ہوئے خط پر عمود کا طول  
ل ف + م گ + ن ہ

(۳۴۸)

لا (ل جم ط + م جم ط + ن جم ط) + ۲ (ل جب ط + م جب ط + ن جب ط) ۲

حاصل ہوگا۔ اس کسر کا نسب نامہ

ل + م + ن ۲ + م ن جم (ط - ط) + ۲ ن ل جم (ط - ط) + ۲ ل م جم (ط - ط)

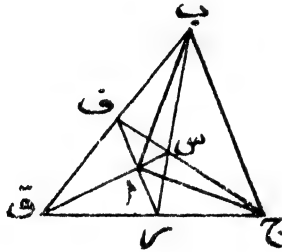
یا ل + م + ن ۲ + م ن جم ل - ۲ ن ل جم ب - ۲ ل م جم ج  
کا جذر المربع ہے۔

پس عمود کا طول

ل ف + م گ + ن ہ

۱۔ ل + م + ن - ۲۔ م + ن - ۳۔ ل + م - ۴۔ ل + ن - ۵۔ م + گ + ن ہ

۲۶۱۔ ثابت کرو کہ کسی چار نقطوں کے محدود شکل  $\pm$  ف  $\pm$  گ  $\pm$  ہ میں بیان کئے جاسکتے ہیں۔  
فرض کرو کہ چار نقطے 'ف'، 'ق'، 'س'، 'ج' ہیں۔



ان چار نقطوں میں سے دو نقطوں کو ملائے والے خط اور دوسرے دو نقطوں کو ملائے والے خط کے نقطہ تقاطع کو چار زاویوں کا وترتی نقطہ کہتے ہیں۔ اس طرح تین وترتی نقطے ہوتے ہیں، یعنی 'ا'، 'ب'، 'ج' (شکل)۔  
فرض کرو کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' کو حوالہ کا مثلث قرار دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ 'ف' کے محدود 'ف'، 'گ'، 'ہ' ہیں۔

تب 'ا' کی مساوات  $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج}$  ہوگی۔

پنل 'ا'، 'ب'، 'س'، 'ج'، 'ا'، 'ف' موسیقی ہے [دفعہ ۵۹] اور 'ا'، 'ب'، 'ج' کی مساواتیں جہ، ہ، ہیں اور 'ا' کی مساوات  $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج}$  معلوم

ہوئی ہے۔ اس لیے اس کی مساوات  $\frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج}$  ہوگی۔ [دفعہ ۵۶]

ج ف کی مساوات  $\frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج}$  ہے

اس لیے اس اور ج ف جس نقطہ پر تقاطع ہوتے ہیں وہاں یعنی

$$\frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج}$$

اس لیے اس کے محور د ف، گ، ہ کے متناسب ہیں۔

اسی طرح س کے محور د، ف، گ، ہ کے متناسب ہیں۔

اسی طرح ق کے محور د، ف، گ، ہ کے متناسب ہیں۔

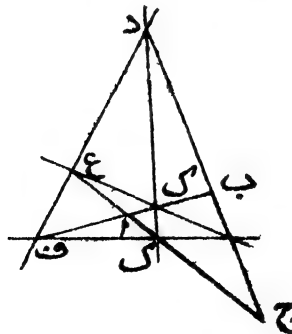
۲۶۲۔ ثابت کرو کہ کسی چار خطوط مستقیم کی مساواتیں

شکل ل ع ہ  $\pm$  م ہ  $\pm$  ن ج ہ = ۰ میں بیان ہو سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ د ع ف، د گ گ، ع گ گ، ہ ف گ، ہ چار خطوط ہیں

فرض کرو کہ ا ب ج وہ مثلث ہے جو چار ضلعی کے وتروں ف گ،

ع گ، اور د ہ سے بنا ہے۔ مثلث ا ب ج کو حوالے کا مثلث قرار دو۔



(۳۵۰)

فرض کرو کہ د ع ف کی مساوات ل ع + م + ب + ن جہ = ۰ ہے۔

تب ا د کی مساوات م ب + ن جہ = ۰ ہے۔

چونکہ پ ن س ل ا د ' ا ب ' ا ہ ' ا ج موسیقی ہے [دفعہ ۵۹] اور

ا د ' ا ب ' ا ج کی مساواتیں علی الترتیب م ب + ن جہ = ۰، جہ = ۰،

بہ = ۰ ہیں اس لیے ا ہ کی مساوات [دفعہ ۵۶] م ب + ن جہ = ۰ ہے۔

چونکہ ع وہ نقطہ ہے جو یہ = ۰، ل ع + ن جہ = ۰ سے حاصل

ہوتا ہے اور ہ وہ نقطہ ہے جو عہ = ۰، م ب + ن جہ = ۰ سے حاصل ہوتا

ہے اس لیے ہ ع کی مساوات

ل ع + م ب + ن جہ = ۰

ہے۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ د گ کی مساوات

ل ع + م ب + ن جہ = ۰

ہے اور ف ہ کی مساوات

ل ع + م ب + ن جہ = ۰

ہے۔

## مثالیں

۱۔ حوالے کے مثلث کے تین زاویوں کے ناصفوں کی مساواتیں

بہ - جہ = ۰، جہ - عہ = ۰، اور عہ - بہ = ۰ ہوتی ہیں۔

۲۔ حوالے کے مثلث کے خطوط وسطی کی مساواتیں ب بہ - ج جہ = ۰

ج جہ - ا عہ = ۰، ا عہ - ب بہ = ۰ ہوتی ہیں۔

۳۔ اگر حوالے کے مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی ا ب ' ج ہوں تو

ب ج ' ج ا ' ا ب کی مساواتیں ب بہ + ج جہ - ا عہ = ۰، ج جہ

+ ا عہ - ب بہ = ۰، اور ا عہ + ب بہ - ج جہ = ۰ ہوں گی۔

۴۔ اس خط کی مساوات جو ایک مثلث کے اندرونی اور بیرونی دائرو

مرکزوں کو ملاتا ہے

ع (جم ب - جم ج) + ح (جم ج - جم ا) + ج (جم ا - جم ب) = ۰  
ہوتی ہے۔

۵۔ ان چار دائروں کے مرکزوں کے محدود معلوم کرو جو حوالے کے مثلث کے ضلعوں کو ممس کرتے ہیں۔ نیز ان چھ خطوں کے نقاط وسطی کے محدود معلوم کرو جو ان چار مرکزوں کو ملاتے ہیں اور ثابت کرو کہ یہ چھ نقطے سب کے سب مساوی  
۱ ب ج + ج ب ج + ج ج ب = ۰

کو پورا کرتے ہیں۔

(۳۵۱)

۶۔ اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'و'، مثلث 'ا ب ج' کے ضلعوں سے  
'ا'، 'ب'، 'ج' پر ملیں اور اگر 'ب'، 'ج'، 'ب' سے 'ف' پر ملے، 'ج'، 'ا' سے 'ق' پر ملے، اور 'ا'، 'ب' سے 'ر' پر ملے تو ثابت کرو کہ 'ف'، 'ق'، 'ر' ایک  
خط مستقیم ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ 'ب'، 'ق'، 'ج'، 'ا'، 'ا'، ایک نقطہ 'ف' پر ملتے ہیں،  
ج، 'ر'، 'ا'، 'ف'، 'ب'، 'ب'، ایک نقطہ 'ق' پر ملتے ہیں، اور 'ا'، 'ف'، 'ب'، 'ق'،  
ج، 'ج'، ایک نقطہ 'ر' پر ملتے ہیں۔

۷۔ اگر ایک مثلث 'ا ب ج' کے ضلعوں کے نقاط وسطی 'ا'، 'ب'،  
'ج' میں سے خطوط 'ا'، 'ف'، 'ب'، 'ق'، 'ج'، 'ر'، 'ا'، 'ف'، 'ب'، 'ق'، 'ج'، 'ر'،  
عمود اور ان کے مساوی ہیں تو ثابت کرو کہ 'ا'، 'ف'، 'ب'، 'ق'، 'ج'، 'ر'،  
نقطہ پر ملتے ہیں۔

۸۔ اگر حوالے کے مثلث کے راسوں سے کسی خط مستقیم پر عمود 'ف'،  
'ق'، 'ر' ہوں تو ثابت کرو کہ اس خط مستقیم کی مساوات 'ا'، 'ف'، 'ب'، 'ق'، 'ج'،  
+ ج ر ج = ۰ ہے۔

۹۔ اگر دو مثلث ایسے ہوں کہ متناظر راسوں کو ملانے والے خطوط مستقیم  
ایک نقطہ پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ متناظر ضلعوں کے تین نقاط تقاطع ایک  
خط مستقیم پر واقع ہوں گے۔

[ذکر کردہ مثلثوں میں سے ایک مثلث (ب ج کے دوائے سے نقطہ کے محذوف، ف، گ، ہ ہیں۔ تب دوسرے مثلث (ب ج کے راستہ سے مدد سلی التبتیس، (ف، گ، ہ) (ف، گ، ہ) اور (ف، گ، ہ) لیے جاسکتے ہیں۔ تب ج، ب ج کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں ع = ۰ اور گ = ۰]

$$+ \frac{ج}{ب-ہ} = ۰ \text{ اس لیے منظر ضلعوں کے نقاط تقاطع خط } ع-ف \text{ و } گ-ب \text{ پر واقع ہیں۔}$$

۱۰۔ مساواتوں ع ج م + ب ج م + ج ج م = ۰ اور ع ج م + ب ج م + ج ج م = ۰ سے جو خطوط حاصل ہوتے ہیں متوازی ہوتے ہیں۔

۱۱۔ ایک مثلث کے زاویوں کے تین بیرونی ناصف مقابل کے ضلعوں سے تین ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جو ایک خط مستقیم میں ہوتے ہیں اور یہ خط حاملہ مرکز اور اندرونی مرکز کو ملانے والے خط پر عمود ہوتا ہے۔

۱۲۔ خطوط ل ع م + ب ع م + ج ع م = ۰ سے جو چار ضلعی بنتا ہے اسکے تین وتروں کے نقاط وسطی میں سے گزرنیوالے خط کی مساوات  $\frac{ل}{ب} + \frac{ع}{ج} + \frac{م}{ب} = ۰$

$$+ \frac{ن}{ج} = ۰ \text{ ہوتی ہے۔}$$

۱۳۔ اگر مثلث (ب ج کا حاملہ مرکز م، مرکز عمودی و، نقطہ مرکز ن، اور مرکز ہندسی ث ہو تو ثابت کرو کہ خط م و ن گ کی مساوات ع ج م + ج ج م + ب ج م + ج ج م + ب ج م + ج ج م = ۰

۲۶۳ (۳۵۲) - سہ خطی محدودوں میں درجہ دوم کی عام مساوات ہے۔



[illegible]

ایک مخروطی کی مساوات ہوگی کیونکہ اگر اس کو کارٹیزی میں بیان کیا جائے تو درجہ دوم کی مساوات حاصل ہوگی۔

نیز چونکہ مساوات میں پانچ غیر تابع مستقل ہیں اس لیے ان کو اس طرح متغین کیا جاسکتا ہے کہ مساوات سے تعبیر شدہ منحنی پانچ دے ہوئے نقطوں میں سے گزرے اور اس لیے وہ کسی دے ہوئے مخروطی پر منطبق ہوگا۔

۲۶۴۔ مخروطی کے کسی نقطہ پر حماس کی مساوات معلوم کرنا۔  
فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

فنه (عنه) = ع + و + ط + ج + ع + و + ج + ع + ط + ع = .

ہے اور فرض کرو کہ اس پر دو نقطوں کے محدد (عہدہ) اور (عہدہ) ہیں۔

## مساوات

ع (ع-ع) (ع-ع) + و (ب-ب) (ب-ب) + ط (ج-ج) (ج-ج) (ج-ج)

۶۲+ (یہ-یہ) (یہ-جہ) + ۲و (جہ-جہ) (عہ-عہ)

$$+2p = (e - e)(b - b) = f(e, b)$$

عہدہ، جب میں فی الحقیقت درجہ اول کی مساوات ہے اور اس لیے وہ کسی خاص خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔

یہ مساوات قیمتوں کے = عہدہ = یہ = یہ = جہ اور نیز قیمتوں

عہ = عہدہ = جہ = جہ سے پوری ہوتی ہے۔ اس لیے وہ اس

خط کی مساوات ہے جو نقطوں (عہ، یہ، جہ) (عہ، یہ، جہ) کو ملاتا ہے

اب فرض کرو کہ نقطہ (عہ، بیہ، جہ)، نقطہ (عہ، بیہ، جہ) کی جانب

حرکت کر کے بالآخر اس پر منطبق ہوتا ہے تو (عقبہ کعبہ) پر کے حماس

کی مساوات

$$۶ \text{ عہ عہ} + ۵ \text{ بہ بہ} + ۴ \text{ جہ جہ} + ۳ \text{ عہ عہ} + ۲ \text{ جہ جہ} + ۱ \text{ عہ عہ} = ۰$$

حاصل ہوتی ہے۔  
تفرقی انحصار کی ترقیم استعمال کر کے نقطہ (عہ، بہ، جہ) پر کے  
ماس کی مساوات کو حسب ذیل شکلوں میں سے کسی ایک میں لکھا  
جاسکتا ہے: (۲۵۳)

$$\begin{aligned} \text{عہ} \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} + \text{بہ} \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} + \text{جہ} \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} &= ۰ \\ \text{یا} \quad \text{عہ} \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} + \text{بہ} \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} + \text{جہ} \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرقہ}} &= ۰ \end{aligned}$$

۲۶۵۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک دیا ہوا خط مستقیم  
ایک مخروطی کو مس کرے۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے خط کی مساوات

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰ ..... (۱)  
ہے۔ اس خط اور مخروطی کے نقاط تقاطع کو اس ۱ سے ملانے والے  
خطوط مساوات

$$۶ \text{ (م بہ + ن جہ)} + ۵ \text{ ول} + ۴ \text{ طل} + ۳ \text{ عل} + ۲ \text{ عہ} + ۱ \text{ ول} = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر خط (۱) ماس ہے تو اوپر کی مساوات سے حاصل شدہ خطوط  
منطبق ہونے چاہئیں جس کے لیے شرط

$$\begin{aligned} \text{(عم} + \text{ول} - ۲ \text{ طل} - \text{م)} \text{(عن} + \text{طل} - ۲ \text{ ول} - \text{ن)} \\ \text{(عمن} + \text{عل} - \text{ول} - \text{م} - \text{طنل} - \text{ل)} &= ۰ \end{aligned}$$



۲۶۷۔ مخروطی کے مرکز کے محدود معلوم کرنا۔

چونکہ مخروطی کے مرکز کا قطبی لائننا ہی فاصلہ پر ہوتا ہے اس لیے اس کی مساوات

۱۔ لیکن [دفعہ ۲۶۶] مرکز کے قطبی کی مساوات

$$ع = \frac{فرق}{فرع} + ب = \frac{فرق}{فرع} + ج = ۰$$

ہے جہاں ع، ب، ج، مرکز کے محدود ہیں۔  
اس لیے مرکز کو معلوم کرنے کے لیے مساواتیں

$$\frac{فرق}{فرع} = \frac{فرق}{فرع} = \frac{فرق}{1}$$

حاصل ہوتی ہیں۔

۲۶۸۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ درجہ دوم کی عام مساوات سے

تعبیر شدہ منحنی مکانی ہو۔

منحنی کے مرکز کے محدود مساواتوں

$$\frac{ع + ط + ب + ج}{1} = \frac{ط + ع + ب + ج}{ب} = \frac{ط + ع + ب + ج}{ج}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

ان میں سے ہر کسر کو۔ ل کے مساوی رکھو تو

$$ع + ط + ب + ج = ۱ = ۰$$

$$ط + ع + ب + ج = ۱ = ۰$$

$$ع + ط + ب + ج = ۱ = ۰$$

(۳۵۵)

نیز چونکہ مکانی کام کرنا لاتنا ہی پر ہے اس لیے

$$۱ = ع + ب + ب + ج + ج = ۰$$

ان چار مساواتوں سے ع، ب، ج، کہ کو سا قی کر دو تو مطلوبہ شرط

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ مکانی لاتنا ہی پر کے خط کو مس کرتا ہے (دفعہ ۲۶۵)۔

۲۶۹۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ درجہ دوم کی عام مساوات  
تعبیر شدہ منحنی دو خطوط مستقیم ہو سکے۔

مطلوبہ شرط کو حسب دفعہ ۳ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ یہ شرط

$$۱ = ع + ۲ + ۲ + ۲ - ع - ط - ط - و = ۰$$

ہے یا مقطع کی شکل میں

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

۲۷۰۔ محروطی کے متقارب معلوم کرنا۔

منحنی کی مساوات اور متقاربوں کی مساوات میں صرف ایک  
مستقل مقدار کا فرق ہوتا ہے۔

پس اگر منحنی کی مساوات

$$۱ = ع + ۲ + ۲ + ۲ - ع - ط - ط - و = ۰$$



$$\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} \epsilon \quad \tau \quad \omega \\ \tau \quad \omega \quad \epsilon \\ \omega \quad \epsilon \quad \tau \end{array} & \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \epsilon \quad \tau \quad \omega \\ \tau \quad \omega \quad \epsilon \\ \omega \quad \epsilon \quad \tau \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \end{array} \end{array}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۷۱۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ مخروطی قائم زائد ہو سکے۔

کارٹیزی محدودوں میں تبدیل کرو۔ تب مخروطی ایک قائم زائد یا دو عمود وار خطوط مستقیم ہوگا اگر لاء اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہو۔ پس شرط

$$+ \epsilon + \omega + \tau - \epsilon - \tau - \omega = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۷۲۔ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جو حوالے کے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

اگر مثلث (ب ج کے) حائط دائرہ کے کسی نقطہ ف سے مثلث

(۳۵۷) کے ضلعوں پر تین عمود ف ل، ف م، ف ن کھینچے جائیں جو ان ضلعوں سے علی الترتیب ل، م، ن پر ملیں تو یہ معلوم ہے کہ یہ تین نقطے ل، م، ن ایک خط مستقیم میں ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ ف کے محدودے بہ، جہ ہیں۔

مثلثوں م ف ن، ن ف ل، ل ف م کے رقبے

علی الترتیب  $\frac{1}{2}$  بہ جہ جب ا،  $\frac{1}{2}$  جہ مہ جب ب،  $\frac{1}{2}$  مہ بہ جب ا ہیں۔

چونکہ 'ن'، 'د'، 'ع' ایک خط مستقیم میں ہیں اس لیے ان میں سے ایک مثلث دوسرے دو مثلثوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ اس لیے علامت کا لحاظ کرتے ہوئے

$$بہ جب + ا + جہ جب ب + عہ بہ جب ج = ۰$$

$$یا ۱ بہ جب + ب جب عہ + ج عہ بہ = ۰$$

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال۔ و سے ایک مثلث کے ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں

جو ضلعوں سے 'د'، 'ع'، 'ن' پر ملے ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر مثلث د ع و کا رقبہ مستقل ہو تو و کا طریق ایک دائرہ ہے جو حائل دائرہ کے ہم مرکز ہے۔

۳۷۲۔ چونکہ درجہ دوم کی رقبے تمام دائروں کی مساواتوں میں

وہی ہوتی ہیں اس لیے اگر کسی ایک دائرہ کی مساوات سے = ہو تو کسی دوسرے دائرہ کی مساوات کو شکل

$$س + ل عہ + مہ بہ + نہ جب = ۰$$

میں لکھا جاسکتا ہے، یا متجانس شکل

$$س + (ل عہ + مہ بہ + نہ جب) = (ا عہ + ب بہ + ج جب) = ۰$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

دائرہ کی عام مساوات کی اس شکل سے یہ واضح ہے کہ لاتناہی

پر کا خط تمام دائروں کو ان ہی دو نقطوں (خیالی) قطع کرتا ہے جیسا کہ ہم قبل ازیں دیکھ چکے ہیں [دفعہ ۱۹۴]۔

۳۷۴۔ وہ شرطیں معلوم کرنا کہ درجہ دوم کی عام مساوات سے

تعبیر شدہ منحنی ایک دائرہ ہو سکے۔

حوالے کے مثلث کے حائل دائرہ کی مساوات [دفعہ ۲۷۲]

$$ا بہ جب + ب جب عہ + ج عہ بہ = ۰$$





$$- ۲ \text{ و ج ع } (۱ \text{ ع } + ۲ \text{ ب ب } + ۲ \text{ ط ج } ۲ \text{ ع ب } = ۰$$

ہوگی۔

مخروطی ناقص، مکافی، یا زائد ہوگا بموجب اس کے کہ یہ خطوط خیالی، منطبق، یا حقیقی ہوں، اور یہ خطوط خیالی، منطبق، یا حقیقی ہونگے بموجب اس کے کہ

$$(ط ۱ ب - ۲ ج - ۲ ب ج + ط ج ۲) - (۲ ج + ط ج ۲) - (۲ ج + ط ۱ - ۲ و ج ۱)$$

$$\times (و ج ۲ + ط ب ۲ - ۲ ع ب ج)$$

منفی، صفر، یا مثبت ہو۔ یعنی بموجب اس کے کہ

$$ع ۱ + و ب ۱ + ط ج ۲ + ۲ ع ب ج + ۲ و ج ۱ + ۲ ط ۱ ب$$

مثبت، صفر، یا منفی ہو۔

۲۷۶۔ ماسوں کے اُس زوج کی مساوات جو کسی نقطہ سے مخروطی

کے کھینچے گئے ہوں دفعہ ۱۸۸ کے طریقہ سے معلوم کیا جاسکتی ہے، اور کسی وتر کے سروں پر کے ماسوں کی مساوات دفعہ ۱۸۹ کے طریقہ سے معلوم کیا جاسکتی ہے۔

مخروطی کے مرتب دائرہ کی مساوات کو دفعہ ۱۹۰ کے طریقہ سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

وہ مساواتیں جن سے ماسکے اور مرتب حاصل ہوتے ہیں دفعہ ۱۹۴ کے طریقہ سے معلوم کیا جاسکتی ہیں۔

(۳۵۹)

ماسکوں کے لیے مساواتیں حسب ذیل حاصل ہونگی:

$$۴ (ب ۱ ط + ج ۱ و - ۲ ب ج ۱ ع) - (ع ۱ ب + ج ۱ و) - (ب ۱ ج - ج ۱ ب) - (ج ۱ ب - ج ۱ ب) - (ج ۱ ب - ج ۱ ب)$$

$$= ۴ (ج ۱ ط + ج ۱ و - ۲ ج ۱ و) - (ع ۱ ب + ج ۱ و) - (ج ۱ ب - ج ۱ ب) - (ج ۱ ب - ج ۱ ب) - (ج ۱ ب - ج ۱ ب)$$

$$^4 = (1 + \omega + \omega^2 - \epsilon - \epsilon^2) f (e^{\frac{2\pi i}{3}})^2 - (1 - \frac{f}{\omega}) - \epsilon^2 \left( \frac{f}{\omega} \right)$$

ان سے فہ (عہدہ، جہ) کو سا قسط کیا جائے تو مخروطی کے محوروں کی مساوات حاصل ہوگی۔

۲۷۷ — مخروطی ۶ عه<sup>۱</sup> + و به<sup>۲</sup> + ط جه<sup>۳</sup> + ۲ ع<sup>۴</sup> به ج<sup>۵</sup> + ۲ وجه ع<sup>۶</sup> + ۲ ط ع<sup>۷</sup> به ج<sup>۸</sup>.

کے غوروں کے طول معلوم کرنا۔

## مخروطی کی حماسی مساوات

عِلْ + وُمْ + طَنْ + عَمَنْ + رَوْنَلْ + طَلَمْ = ... (١)

-4

اب فرض کرو کہ ماسکوں کا زوج (عہ، بہ، جہ) (عہ، بہ، جہ) ہے اور عمود وار محور کا طول ۲ رہے۔ پس اگر ل عہ + م بہ + ن جہ = مخروطی کا کوئی ماس ہو تو

$$r = (l\text{ عم} + م\text{ به} + ن\text{ جبه}) (ل\text{ عم} + م\text{ به} + ن\text{ جبه})$$

ل + م + ن - ۲ م ن جم ۱ - ۲ ن ل جم ب - ۲ ل م جم ج

پس (ل عم + م یہ + ن جہ) (ل عم + م یہ + ن جہ) - ر (ل + م + ن)

۲- من حجم ۱- ۲ ن ل حجم ب- ۲ ل م حجم ج)

٣٤ (عل + وِمْ + طَنْ + عَمَنْ + وَنْ + لْ + طَلَمْ)

اس مثالہ میں 'ل' م، 'ن' کی بجائے علی الترتیب 'ا'، 'ب'، 'ج' رکھو تب

$$m = (e_1 + o_1 + p_1 + e_2 + o_2 + p_2 + e_3 + o_3 + p_3 + e_4 + o_4 + p_4 + e_5 + o_5 + p_5 + e_6 + o_6 + p_6 + e_7 + o_7 + p_7 + e_8 + o_8 + p_8 + e_9 + o_9 + p_9 + e_{10} + o_{10} + p_{10})$$

(1) . . . . .

اور چونکہ  
 $(ل + ع + و + م + ..... + ر + ل + م + .....)$

(۳۶۰) خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے اس لیے

$$\begin{vmatrix} ل + ع + و + ر & ل + ط - ر & ج & ل + و - ر & ج + ب \\ ل + ط - ر & ج & ل + و + ر & ل + ع - ر & ج + ا \\ ل + و - ر & ج + ب & ل + ع - ر & ج + ا & ل + ط + ر \end{vmatrix} = ۰$$

جہاں ل (۲) سے معلوم ہوتا ہے۔  
 اوپر کی مساوات دو درجی ہے، کیونکہ ر کا سر صریحاً صفر ہے۔ اس سے  
 مخروطی کے محوروں کے مربع معلوم ہوں گے۔

### رقبہ محدود

۲۷۸۔ کسی نقطہ ف کا محل متعین ہو جائے گا اگر وہ نسبتیں معلوم

ہوں جو مثلث ف ب ج، ف ج ا، اور ف ا ب حوالے کے مثلث  
 ا ب ج کے ساتھ رکھتے ہیں۔ ان نسبتوں کو علی الترتیب لا، ما، ی سے  
 تعبیر کیا جاتا ہے اور ان کو نقطہ ف کے رقبہ محدود کہا جاتا ہے۔

کسی نقطہ کے رقبہ محدود رشتہ

$$لا + ما + ی = ۱$$

میں مربوط ہوتے ہیں۔

چونکہ  $لا = \frac{ل + ع}{\Delta ۲}$ ،  $ما = \frac{ب + و}{\Delta ۲}$  اور  $ی = \frac{ج}{\Delta ۲}$  اس لیے اگر

کوئی متجانس مساوات سہ خطی محدودوں میں دی گئی ہو تو ہم اس مساوات  
 کو ع، ب، ج کی بجائے علی الترتیب  $\frac{لا}{۱}$ ،  $\frac{ما}{ب}$ ،  $\frac{ی}{ج}$  رکھ کر رقبہ محدود

مساوات میں فوراً تبدیل کر سکتے ہیں، مثلاً لاتنا ہی پر کے خط کی مساوات رقبیٰ مجددوں میں لا + ما + ی = ۰ ہے۔ لیکن ہم حائط دائرہ کی رقبیٰ مساوات کو اس استحالہ کے بغیر ہی معلوم کریں گے۔

۲۷۹۔ اُس دائرہ کی مساوات رقبیٰ مجددوں میں معلوم کرنا جو حوالے کے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

اگر ف اُس دائرہ پر کوئی نقطہ ہو جو مثلث ا ب ج کے گرد

کھینچا گیا ہے تو ٹوٹلی کے مسئلہ (اتلیدس ششم) کی رُو سے

ف (ا ب ف ± ف ب ± ف ج ± ف ج) × (ا ب ± ف ج ± ف ج) = ۰۔ (۱)

لیکن چونکہ زاویے ب ف ج، ا ب ج یا تو مساوی ہیں یا متمم ہیں (۳۶۱)

$$\frac{ف ب \times ف ج}{ا ب \times ا ج} = ۰$$

اسی طرح ماوری کے لیے۔ پس لا، ما، ی کی علامتوں کا لحاظ رکھنے سے (۱)

$$ا \times ف \times ب \times ج \times ف \times ج + ب \times ف \times ج \times ا \times ف \times ج + ج \times ا \times ف \times ب \times ج \times ف$$

$$+ ف \times ا \times ب \times ج \times ج \times ف = ۰$$

حاصل ہوتا ہے یعنی

$$۰ = \frac{ا}{ب} + \frac{ب}{ا} + \frac{ج}{ی}$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔  
۲۸۰۔ اگر وہ خزوطی جو سہ خطی مجددوں میں درجہ دوم کی عام مساوات

$$عہ + و ب + ط ج + عہ + ج + ج + و ج + عہ + ط عہ + ب = ۰$$

سے تعبیر ہوتا ہے وہی ہو جو رقبی محدودوں میں مساوات

$$لہ لا + مہ ما + نہ ی + ۲ مای + ۲ مہ ی لا + ۲ نہ لا ما = ۰$$

سے تعبیر ہوتا ہے تو چونکہ  $\frac{لا}{۱عہ} = \frac{ط}{بہ} = \frac{ی}{جہ}$  اس لیے ہمیں

حاصل ہونا چاہئے

$$\frac{لا}{۱عہ} = \frac{و}{مہ بہ} = \frac{ط}{نہ ج} = \frac{ع}{رہ ب ج} = \frac{و}{مہ ج و} = \frac{ط}{نہ ج و}$$

پس اگر سہ خطی مساوات کے سروں میں کوئی رشتہ دیا گیا ہو تو اس کے جواب میں ہم وہ رشتہ معلوم کر سکتے ہیں جو رقبی مساوات کے سروں کے درمیان موجود ہوتا ہے۔

بہت سی صورتوں میں یہ بات کوئی اہمیت نہیں رکھتی کہ آیا مستعملہ محدود رقبی ہیں یا سہ خطی لیکن بعض ضابطے (ان دو قسم کے محدودوں میں مختلف ہوتے ہیں۔ سب سے زیادہ اہم ضابطے جو رقبی محدودوں میں قابل یادداشت ہیں حسب ذیل ہیں) ان ضابطوں کو سہ خطی محدودوں کے متناظر ضابطوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے یا انہیں بلا واسطہ بھی معلوم کیا جاسکتا ہے:

۱۔ دو خطوط مستقیم

$$لہ لا + مہ ما + نہ ی = ۰، اور لہ لا + مہ ما + نہ ی = ۰$$

علی القوا کم ہوں گے اگر

$$لہ لا + مہ ما + نہ ی + ۲ مہ ی لا + ۲ مہ ی لا + ۲ نہ لا ما = ۰$$

$$+ نہ لا، جم بہ - (لہ لا + مہ ما + نہ ی) جم ج = ۰$$

۲۔ وہ خطوط مستقیم جو

$$لا + و ما + ط ی + ۲ ع مای + ۲ و ی لا + ۲ ط لا ما = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں علی القوالم ہوں گے اگر

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ - ۲ع^۲ ب - ۲و^۲ ج - ۲ط^۲ ا = ۰$$

۳۔ نقطہ (لا، ما، ی) کا عمودی فاصلہ خط ل + م + ن ی = ۰ سے

$$\Delta ۲ (ل + م + ن ی)$$

$$\sqrt{۳ ل^۲ - ۲ م ن ب ج}$$

۴۔

۴۔ مخروطی  $ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ۲ع^۲ م + ۲و^۲ ی + ۲ط^۲ ا = ۰$   
تاقم زائد ہوگا (بشمول دو عمودی خطوں کی خاص صورت کے) اگر

$$۳ ع^۲ - ۲و^۲ ب - ۲ط^۲ ج = ۰$$

۵۔ دائرہ کے لیے شرطیں ہیں

$$\frac{د + ط - ۲ع}{ا} = \frac{ط + ۲و - ۲ع}{ب} = \frac{و + ۲ط - ۲ع}{ج}$$

۶۔ مخروطی کے مرکز کے مجدد

$$\frac{فرز}{فری} = \frac{فرز}{فرما} = \frac{فرز}{فرلا}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

## حائط مخروطی

۲۸۱۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو حوالے کے

مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

مخروطی کی عام مساوات

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ۲ع^۲ ب + ۲و^۲ ج + ۲ط^۲ ا = ۰$$

ہے۔ مثلث کے راسوں کے محدود

$$\left(\frac{\Delta 2}{\Delta 1}\right) \left(\frac{\Delta 2}{\Delta 1}\right) \left(\frac{\Delta 2}{\Delta 1}\right) \text{ اور } \left(\frac{\Delta 2}{\Delta 1}\right) \left(\frac{\Delta 2}{\Delta 1}\right) \left(\frac{\Delta 2}{\Delta 1}\right)$$

ہیں۔ اگر یہ نقطے منحنی پر ہیں تو  $\Delta 1 = \Delta 2 = \Delta 3$  اور  $\Delta 4 = \Delta 5$  حاصل ہونے چاہئیں اور یہ اندراج کرنے سے ظاہر ہے۔

پس حوائے کے مثلث کے حامل مخروطی کی مساوات

$$\Delta 1 = \Delta 2 + \Delta 3 + \Delta 4 + \Delta 5 = 0$$

ہے۔ اس مساوات کو ہم بالعموم

$$\Delta 1 = \Delta 2 + \Delta 3 + \Delta 4 + \Delta 5 = 0$$

لکھیں گے۔

۲۸۲۔ اس خط کی مساوات جو دو نقطوں  $(\Delta 1, \Delta 2)$   $(\Delta 3, \Delta 4)$  کو ملاتا ہے (۳۱۳)

$$\Delta 1 = \Delta 2 + \Delta 3 + \Delta 4 + \Delta 5 = 0$$

ہے۔ لیکن اگر یہ دو نقطے مخروطی

$$\Delta 1 = \Delta 2 + \Delta 3 + \Delta 4 + \Delta 5 = 0$$

پر ہوں تو

$$\Delta 1 = \Delta 2 + \Delta 3 + \Delta 4 + \Delta 5 = 0 \text{ اور } \Delta 1 = \Delta 2 + \Delta 3 + \Delta 4 + \Delta 5 = 0$$

اور اس لیے

$$\Delta 1 = \Delta 2 + \Delta 3 + \Delta 4 + \Delta 5 = 0$$

اس دتر کی مساوات جو مخروطی کے دو نقطوں  $(\Delta 1, \Delta 2)$   $(\Delta 3, \Delta 4)$



(عم، یم، جم) کو ملاتا ہے (۱) سے

$$(۲) \dots\dots\dots ۰ = \frac{ل}{عم} + \frac{م}{یم} + \frac{ن}{جم}$$

ہے۔ [ بلاشبہ یہ دافع ہے کہ خط (۲) دئے ہوئے دو نقطوں میں سے گزرے گا بشرطیکہ یہ نقطے محرومی پر ہوں ]

(۲) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ (عم، یم، جم) پر کے تماس کی مساوات

$$(۳) \dots\dots\dots ۰ = \frac{ل}{عم} + \frac{م}{یم} + \frac{ن}{جم}$$

ہے۔ اب ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ خط ل عم + م یم + ن جم = ۰ محرومی کو مس کرے۔ کیونکہ اگر یہ خط نقطہ (عم، یم، جم) پر تماس ہو تو (۳) سے

$$\frac{ل}{عم} = \frac{م}{یم} = \frac{ن}{جم}$$

لیکن  $۰ = \frac{ل}{عم} + \frac{م}{یم} + \frac{ن}{جم}$  اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$(۴) \dots\dots\dots ۰ = ل عم + م یم + ن جم$$

اندرونی محرومی

۲۸۳۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو حوالے کے  
مثلث کے ضلعوں کو مس کرے۔  
مخروطی کی عام مساوات

$$۶عہ + ۲وہ + ۲طجہ + ۲عہ + ۲جہ + ۲وہ + ۲طعہ = ۰$$

(۳۶۴) ہے۔ یہ مخروطی عہ = کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں

وہ + ۲طجہ + ۲عہ + ۲جہ = قطع کرے تو  
پس اگر مخروطی عہ = کو دو منطبق نقطوں پر قطع کرے تو

$$و ط = ع' یا ع = ا و ط$$

اسی طرح اگر مخروطی مثلث کے دوسرے ضلعوں کو بھی مس کرے تو

$$و ط = ع' اور ط = ع و$$

پس ع، و، ط کی بجائے علی الترتیب ل، م، نہ رکھنے سے  
ہمیں مساوات

$$ل۶عہ + م۲وہ + ن۲طجہ + م۲عہ + ن۲جہ + ل۲وہ = ۰$$

$$۰ = ۲ ل م نہ$$

حاصل ہوتی ہے۔

اس مساوات میں مبہم علامتوں میں سے یا تو ایک منفی ہونی  
چاہئے یا تینوں منفی ہونی چاہئیں، کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو مساوات کا  
دائیں جانبی رکن ایک کامل مربع ہوگا اور اس صورت میں مخروطی دو منطبق  
خطوط مستقیم ہوگا۔

مساوات کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے :-

$$ل۶عہ + م۲وہ + ن۲طجہ = ۰$$

۲۸۴ — نقطوں (عم، بیہ، جم، اور (عم، بیہ، جم) کو ملانے والے  
خط کی مساوات

عم (بیہ جم - بیہ جم) + بیہ (جم عم - جم عم) + جم (عم بیہ - عم بیہ) = (۱)  
ہے۔ لیکن اگر یہ دو نقطے مخروطی پر ہوں جس کی مساوات

$$\overline{ال عم} + \overline{امہ بیہ} + \overline{انہ جم} = ۰$$

ہے تو

$$\overline{ال عم} + \overline{امہ بیہ} + \overline{انہ جم} = ۰، \overline{ال عم} + \overline{امہ بیہ} + \overline{انہ جم} = ۰$$

اس لیے

$$\frac{\overline{انہ}}{\overline{الہ جم} - \overline{الہ جم}} = \frac{\overline{امہ}}{\overline{الہ عم} - \overline{الہ عم}} = \frac{\overline{ال عم}}{\overline{ال عم} - \overline{ال عم}}$$

پس (۱) سے اُس وتر کی مساوات جو مخروطی کے نقطوں

(عم، بیہ، جم)، (عم، بیہ، جم) کو ملاتا ہے

$$\overline{ال عم} + \overline{الہ جم} + \overline{الہ جم} + \overline{الہ عم} + \overline{الہ جم} + \overline{الہ عم} = ۰$$

$$+ \overline{جمہ انہ} + \overline{ال عم} + \overline{ال عم} = ۰ \dots (۲)$$

۴- (۲) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ (عم، بیہ، جم) پر چاروں کی مساوات (۳۱۵)

$$\overline{ال عم} + \overline{الہ جم} + \overline{الہ جم} + \overline{الہ عم} + \overline{الہ جم} + \overline{الہ عم} = ۰ \dots (۳)$$

۴-

اب ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ خط ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰۔  
مخروطی کو مس کر سکے۔ کیونکہ اگر وہ نقطہ (عہ، م بہ، ن جہ) پر تماس ہے تو  
(۳) سے

$$ل \text{ لہ عہ} = م \text{ مہ بہ} = ن \text{ نہ جہ}$$

$$\text{لیکن } ل \text{ لہ عہ} + م \text{ مہ بہ} + ن \text{ نہ جہ} = ۰$$

اس لیے مطلوبہ شرط

$$ل \text{ لہ عہ} + م \text{ مہ بہ} + ن \text{ نہ جہ} = ۰ \quad (۴)$$

ہے۔

دفعہ ۲۸۲ اور دفعہ ۲۸۴ سے یہ معلوم ہوگا کہ خط

$$ل \text{ لہ عہ} + م \text{ مہ بہ} + ن \text{ نہ جہ} = ۰ \quad (۱)$$

$$\text{حاطق مخروطی } ل \text{ لہ عہ} + م \text{ مہ بہ} + ن \text{ نہ جہ} = ۰ \quad (۲)$$

کو مس کرتا ہے اگر نقطہ (ل، م، ن) اندرونی دائرہ

$$ل \text{ لہ عہ} + م \text{ مہ بہ} + ن \text{ نہ جہ} = ۰ \quad (۳)$$

پر ہو۔

نیز خط (۱) اندرونی دائرہ (۳) کو مس کرتا ہے اگر نقطہ (ل، م، ن)

حاطق دائرہ (۲) پر ہو۔

وہ مخروطی جو چار دے ہوئے نقطوں میں گزریں

۲۸۵۔ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو چار دے ہوئے

## نقطوں میں سے گزرے۔

اگر چار زاویہ کے وتری نقطے حوالے کے مثلث کے راس ہوں تو چار نقطوں کے محدود  $\pm$  ف  $\pm$  گ  $\pm$  ح سے حاصل ہوتے ہیں [دفعہ

۲۶۱]۔

اگر یہ چار نقطے اس مخروطی پر ہوں جس کی مساوات

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ + ع^۲ + و^۲ + ح^۲ + ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ = ۰$$

ہے تو ہمیں مساواتیں

(۳۶۶)

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ + ع^۲ + و^۲ + ح^۲ + ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ = ۰$$

حاصل ہوتی ہیں۔ اس لیے

$$ع = و = ط = ح = ۰$$

اس لیے مخروطی کی مساوات  $ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ = ۰$  ہے مع اس

شرط کے کہ  $ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ = ۰$ ۔

مثال ۱۔ اُن تمام مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق معلوم کرو جو چار

دے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

فرض کرو کہ چار نقطے  $\pm$  ف  $\pm$  گ  $\pm$  ح ہیں۔

کسی مخروطی کی مساوات

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ = ۰$$

ہوگی مع اس شرط کے کہ

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ = ۰ \dots \dots (۱)$$

مخروطی کے مرکز کے محدود

$$\frac{ع}{۱} = \frac{و}{ب} = \frac{ط}{ج}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اب (۱) میں ع، و، ط کی بجائے اندراج کرو تو

مطلوبہ طریق کی مساوات

ا ف ب جہ + ب گ جہ + ج حہ = ۰ [دیکھو دفعہ ۲۱۰]  
ماصل ہوتی ہے۔

مثال ۳۔ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کے  
لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک مخروطی ہوتا ہے۔  
مثال ۳۔ مخروطیوں کے ایک ایسے نظام کے لحاظ سے  
جو چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں ایک دئے ہوئے نقطہ کے  
قطب ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں گے۔

مخروطی جو چار دئے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرتے ہیں  
۲۸۶۔ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو چار دئے ہوئے  
خطوط مستقیم کو مس کرے۔  
فرض کرو کہ اُس مثلث کو جو چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے  
حوالے کا مثلث قرار دیا گیا ہے، تب [دفعہ ۲۶۲] چار خطوں کی مساوات  
شکل

$$ل ع \pm م \pm ن جہ = ۰$$

کی ہونگی۔

مخروطی

عہ + دہ + طہ + جہ + ۲ + ۶ بہ جہ + ۲ + وجہ + ۲ + طہ + ۲ = ۰ ... (۱)  
خط (ل، م، ن) کو مس کریگا اگر  $ل + ۲ + م + ط + ن + ۲ + ۶ م + ن$   
 $۲ + ۲ + ل + ط + م = ۰$   
اس لیے اگر مخروطی چاروں خطوں کو مس کرتا ہے تو ہمیں حاصل  
ہونا چاہئے

(۲۶۷)

$$ع = و = ط = ۰$$

یعنی  $و ط - ع = ۰$

$$\text{ط}^{\circ} \text{ع} - \text{و}^{\circ} = \text{و}^{\circ} = \text{و}^{\circ}$$

$$\text{ع}^{\circ} \text{و} - \text{ط}^{\circ} \text{ط} = \text{ط}^{\circ} = \text{ط}^{\circ}$$

$$\text{ع}^{\circ} = \text{و}^{\circ} = \text{ط}^{\circ} = \text{ط}^{\circ}$$

اگر ایسا نہیں ہے تو (۱) ایک کامل مُرُج ہے اور اس لیے مخروطی منطبق  
خطوطِ مستقیم کا ایک زوج ہے۔

پس  $\text{ع}^{\circ} = \text{و}^{\circ} = \text{ط}^{\circ}$  حاصل ہونے چاہئیں اور تماس کی شرط

$$\text{ل}^{\circ} \text{و} + \text{م}^{\circ} \text{ط} + \text{ع}^{\circ} \text{ن} = \text{و}^{\circ} = \text{و}^{\circ}$$

ہے۔ اس لیے ہر مخروطی جو چاروں خطوں کو مس کرتا ہے مساوات

$$\text{ع}^{\circ} \text{ع}^{\circ} + \text{و}^{\circ} \text{ب}^{\circ} + \text{ط}^{\circ} \text{ج}^{\circ} = \text{و}^{\circ}$$

$$\text{میں شامل ہے بشرطیکہ } \frac{\text{ل}^{\circ}}{\text{ع}^{\circ}} + \frac{\text{م}^{\circ}}{\text{و}^{\circ}} + \frac{\text{ن}^{\circ}}{\text{ط}^{\circ}} = \text{و}^{\circ}$$

مثال ۱۔ ان مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو

چار دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرتے ہیں۔  
کوئی مخروطی مساوات

$$\text{ع}^{\circ} \text{ع}^{\circ} + \text{و}^{\circ} \text{ب}^{\circ} + \text{ط}^{\circ} \text{ج}^{\circ} = \text{و}^{\circ}$$

$$\text{سے حاصل ہوتا ہے بشرطیکہ } \frac{\text{ل}^{\circ}}{\text{ع}^{\circ}} + \frac{\text{م}^{\circ}}{\text{و}^{\circ}} + \frac{\text{ن}^{\circ}}{\text{ط}^{\circ}} = \text{و}^{\circ}$$

مخروطی کے مرکز کے محدود

$$\frac{\text{ع}^{\circ} \text{ع}^{\circ}}{\text{ا}} = \frac{\text{و}^{\circ} \text{ب}^{\circ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ط}^{\circ} \text{ج}^{\circ}}{\text{ج}}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس لیے مرکزوں کے طریق کی مساوات

$$\text{ل}^{\circ} \text{ع}^{\circ} + \text{م}^{\circ} \text{و}^{\circ} + \text{ن}^{\circ} \text{ط}^{\circ} = \text{و}^{\circ}$$

ہے جو ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

یہ خط مستقیم چار ضلعی کے تین وتروں کے تقاطع وسطی میں سے گزرتا ہے۔  
 [دیکھو دفعہ ۲۱۹]  
 مثال ۲۔ مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک دے ہو  
 خط کے قطب کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے جہاں مخروطیاں ایک ہی چار ضلعی  
 میں کھینچے گئے ہیں۔  
 مثال ۳۔ مخروطیوں کا ایک نظام چار ثابت خطوں یا مستقیم کو مس  
 کرتا ہے۔ اس نظام کے لحاظ سے ایک دے ہوئے نقطہ کے قطبیوں کا انصاف  
 ایک مخروطی ہوگا۔

## مخروطی بجوالہ خود قطبی مثلث

(۳۶۸)

۲۸۷۔ جب مخروطی کی مساوات شکل  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  کی  
 ہوتی ہے تو حوالے کے مثلث کا ہر اس مقابل کے ضلع کا قطب ہوتا  
 ہے۔ یہ بڑی آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے اگر ہم مثلث کے کسی راس  
 کے محدودوں کو  $(\alpha, \beta, \gamma)$  کے قطبی کی مساوات  
 $\alpha + \beta + \gamma = 0$

میں درج کریں۔  
 اس کے بالعکس اگر حوالے کا مثلث خود قطبی ہو تو مخروطی کی  
 مساوات کی شکل  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  ہوگی۔ کیونکہ نام مساوات سے تعبیر شدہ  
 مخروطی کے لحاظ سے  $(\frac{\Delta^2}{1}, \alpha, \beta)$  کے قطبی کی مساوات

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

ہے۔ اس لیے اگر  $\Delta$  کا قطبی  $\beta$  ج ہے تو  $\alpha = \gamma = 0$ ۔ اسی طرح  
 اگر  $\beta$  کا قطبی  $\gamma$  ہے تو  $\alpha = \beta = 0$ ۔ پس  $\alpha, \beta, \gamma$  سب صفر ہیں۔  
 ۲۸۸۔ اگر دو مخروطی چار حقیقی نقطوں پر متقاطع ہوں اور ان چار



نقطوں سے بنے ہوئے چار زاویوں کے وتری نقطوں کو حوالے کا مثلث قرار دیا جائے تو ان دو مخروطیوں کی مساواتیں [دفعہ ۲۸۵] شکل

$$e^2 + d^2 + c^2 = 0 \text{ اور } e^2 + d^2 + b^2 + c^2 = 0$$

کی ہونگی۔ پس بیساکہ ہم دفعہ ۲۱۵ میں دیکھ چکے ہیں کوئی دو مخروطی جو چار حقیقی نقطوں پر تقاطع ہوں ایک مشترک خود قطبی مثلث رکھتے ہیں۔ اگر دو مخروطیوں کے چار نقاط تقاطع میں سے دو حقیقی اور دوسرے دو خیالی ہوں تو مشترک خود قطبی مثلث کے دور اس خیالی ہوں گے۔ اگر دو مخروطیوں کے چاروں نقاط تقاطع خیالی ہوں تو ایک حقیقی خود قطبی مثلث ہوگا [اوکیو]

Ferrer's Trilinears, or  
[Solomon's Conic Sections, Art 82]

## دو حماس اور ان کا وتر تماس

(۳۶۹)

۲۸۹ — جب اس مثلث کو جو دو حماسوں اور ان کے وتر تماس سے بنتا ہے حوالے کے مثلث کے طور پر لیا جاتا ہے تو مخروطی کی مساوات شکل

$e^2 + d^2 + c^2 = 0$  ..... (۱)

کی ہوتی ہے۔  
یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (۲ ک ع، ۲ ک ع، ۱۰ ع) کی تمام قیمتوں کے لیے مخروطی پر ہے۔ اور حسب دفعہ ۱۰۷ (یا دفعہ ۱۵۵) اس نقطہ کو ہم نقطہ "ع" کہہ سکتے ہیں۔  
نقطوں ع، ع، ع کو ملانے والے وتر کی مساوات

$$= \begin{vmatrix} 2k & 2k & 10 \\ 2k & 2k & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix}$$

ہے، اس لیے پھیلانے اور ع۔ ع۔ سے تقسیم کرنے پر

$$(ع + ع) (ع - ع) = ۲ - ۲ = ۰ \quad (۲) \dots\dots$$

اسلئے 'ع' پر کے مماس کی مساوات

$$ع - ع - ۲ = ۰ \quad (۳) \dots\dots\dots$$

ہے۔

اب وہ خطوط جو ج کو ل عب + م بہ + ن جب = ۰ اور ع۔ ہم کہ بہ جب = کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں مساوات

$$ن عب + ہم کہ بہ (ل عب + م بہ) = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس لیے وہ شرط کہ ل عب + م بہ + ن جب = ۰ مخروطی کو مس کرے

یہ ہے کہ

$$ہم کہ م ن - ہم کہ ل ا = ۰ \quad (۴) \dots\dots\dots$$

یا ل عب + م بہ + ن جب = ۰ کا مقابلہ ع پر کے مماس کے ساتھ کرنے سے

$$\frac{ل}{ع} = م = - \frac{ن}{ع} \quad 'اس لیے کہ ل = م ن$$

مثال ۱۔ اگر ایک مثلث کو ایک مخروطی میں بنایا جائے اور اسکے

دو ضلع دیے ہوئے نقطوں میں سے گزریں تو تیسرا ضلع ایک مخروطی کو لف کرے گا۔  
دو نقطوں کو ملانے والے خط اور اس خط کے سروں پر کے مماسوں کو  
حوالے کے مثلث کے ضلع کو۔

تب مخروطی کی مساوات

$$ع - ہم کہ بہ جب = ۰ \quad (۱) \dots\dots\dots$$

(۳۷۰)

ہوگی اور ثابت نقطوں کو (، گ، ہ) (، گ، ہ) لے سکتے ہیں۔  
اگر مثلث کے اس مخروطی پر کے نقطے ع، ع، ع، ہ ہوں تو ضلعوں کی  
مساواتیں

$$(ع + ع) ع - ع - ۲ - ۲ ک ع ع ج = ۰$$

$$(ع + ع) ع - ع - ۲ - ۲ ک ع ع ج = ۰$$

اور (ع + ع) ع - ع - ۲ - ۲ ک ع ع ج = ۰  
ہوگی۔ چونکہ ان میں سے دو ضلع دئے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں اسلئے

$$گ + ک ع ع ج = ۰ \text{ اور } گ + ک ع ع ج = ۰$$

$$گ + ک ع ج = گ + ک ع ج$$

اس لیے باقی ضلع کی مساوات کو

$$(گ + گ) ع - ع - ۲ - ۲ ک گ ع ج = ۰$$

لکھا جاسکتا ہے جس کا لفافہ ع کی مختلف قیمتوں کے لیے

$$۱ ک گ گ ع ج = ۰ \text{ (گ + گ ع ج) ع}$$

ہے۔ مثال ۲۔ اگر دو مخروطی ایسے ہوں کہ ان کے مشترک  
نقطوں میں سے دو نقطوں پر ایک مخروطی کے حماس دوسرے  
مخروطی پر متقاطع ہوتے ہیں تو ثابت کرو کہ دوسرے مخروطی میں  
ایسے چار ضلعیوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے  
ضلع پہلے مخروطی کو مس کریں۔

دو ماسوں اور ان کے وتر تھاس کو حوالے کے مثلث کے ضلع قرار دو۔  
تب مخروطیوں کی مساواتوں کو

$$س = ع^۲ - م^۲ \quad ک = م^۲ - ج^۲$$

$$س = ل^۲ - م^۲ \quad ل = م^۲ + ج^۲ + ن^۲$$

لکھا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ س میں کھینچے ہوئے کسی چار ضلعی ف ق س کے  
ضلع ف ق ق س اور س س مخروطی میں کو مس کرتے ہیں اور چار  
ضلعی کے راس (ع م ج م) وغیرہ ہیں۔ تب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ  
س ف بھی س کو مس کرتا ہے  
اب ف ق ق س س س ف کی مساواتیں

$$ل = ع^۲ + م^۲ - ج^۲ = ع^۲ - ج^۲ + م^۲ = ۰ \quad \text{وغیرہ}$$

ہیں۔ اب چونکہ ف ق ق س اور س س مخروطی میں کو مس کرتے

ہیں اس لیے

$$\frac{ک}{ع} = \frac{ل}{ع} = \frac{م}{ج} \quad \text{اور} \quad \frac{م}{ج} = \frac{ل}{ع} = \frac{ک}{ع}$$

$$\frac{ک}{ع} = \frac{ل}{ع} = \frac{م}{ج}$$

پہلی اور تیسری مساواتوں کے نظیری ارکان کو ضرب دو اور دوسری  
مساوات کے نظیری ارکان سے تقسیم کرو تو

$$\frac{ک}{ع} = \frac{ل}{ع} = \frac{م}{ج}$$

اور یہ شرط ہے کہ س ف بھی س کو مس کرے۔

**مثال ۳-** اگر ایک چار ضلعی ایک مخروطی میں بنایا جائے اور اسکے ضلع دوسرے مخروطی کو مس کریں تو ثابت کرو کہ ایسے چار ضلعیوں کی لاتناہی تعداد کمپنی جاسکتی ہے۔

چار ضلعی کے ضلعوں کو  $ل$ ،  $م$ ،  $ن$ ،  $جہ$ ۔ کیا جاسکتا ہے یا  
 $ل = م = ن = جہ$  کی رکھنے سے ان خطوں کی مساواتیں  
 $لا \pm ما \pm ی = ۰$  ہو جاتی ہیں۔

مخروطی  $س \equiv ۰$   $لا + و + ما + ط ی = ۰$ ۔

ان چار خطوں کو مس کرے گا اگر  $و + ط + ع + ع + و = ۰$ ۔ (۱)  
 چار ضلعی کے راسوں میں سے چار (۱، ۱، ۱، ۱) اور (۱، ۱، ۱، ۱)  
 ہیں اور کوئی مخروطی جو ان چار نقطوں میں سے گزرے

$س \equiv ۰$   $لا - ما - ی + ۲ ع + ما ی = ۰$ ۔

سے حاصل ہوتا ہے۔

اب خطوط

(۱)  $ع + و + ما + (ط + ی) - ی - ۲ ع + ما ی = ۰$ ۔ (۲)

س اور س کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔

اگر خطوں (۲) میں سے ایک  $ما + ک ی = ۰$  ہو اور س کے لحاظ سے  
 اس کا قطب (۰، ۱، ۱، ۱) ہو تو  $و + ما + ط ی + ی = ۰$  وہی ہے جو  $ما + ک ی$

$= ۰$  ہے اور اس لیے  $ک = \frac{ط ی}{و + ما}$

اس لیے (۲) سے

(۳)  $ع + و + ط ی + (ع + ط) + و + ما + ۲ ع + و ط + ما ی = ۰$ ۔ (۳)

سے حاصل شدہ دو نقطے س پر ہوں گے اگر (۳) وہی ہو جو

$ما + ی - ۲ ع + ما ی = ۰$  ہے اس لیے شرطیں یہ ہیں کہ

$$(ع + و) ط^2 = (ط + و) و^2 = ع و ط$$

اور یہ شرطیں ضروریاً (۱) سے حاصل ہوتی ہیں۔

پس اگر ایک چار ضلعی مخروطی میں میں بنایا جائے اور اس کے ضلع مخروطی میں کو مس کریں تو اس کے وہ تماس جو اس اور اس کے تقاطع کے وتروں میں سے دو کے سروں پر کھینچے گئے ہوں اس پر ملیں گے۔

اس کے بعد مثال ۲ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اس میں ایسے چار ضلعیوں کی لا متناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع اس کو مس کریں۔ [نیز دیکھو دفعہ ۳۲۴ مثال ۷]

وہ دائرے جن کا تعلق ایک مثلث سے ہوتا ہے

۲۹۰۔ ہم اس دائرہ کی مساوات معلوم کر چکے ہیں جو حوالے کے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو یعنی

$$\frac{1}{ع} + \frac{ب}{ج} + \frac{ج}{ب} = ۰$$

اب ہم چند دوسرے دائروں کی مساواتیں معلوم کریں گے جو ایک مثلث سے متعلق ہوتے ہیں۔

۱۔ اُن دائروں کی مساواتیں معلوم کرنا جو حوالے کے

مثلث کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔

اگر وہ نقطہ ہو جہاں اندرونی دائرہ ضلع ب ج کو مس کرتا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ

$$د ج = س - ج \text{ اور } د ب = س - ب$$

اس لیے د کی مساوات

$$(1) \dots \frac{ج}{(س-ب)} = \frac{ب}{(س-ج)}$$

ہوگی۔  
اب کسی اندرونی مخروطی کی مساوات

$$(2) \dots \sqrt{ا-ع} + \sqrt{ا-ب} + \sqrt{ا-ج} = 0$$

ہوتی ہے۔  
اس خط کی مساوات جو ا کو ب ج اور مخروطی کے نقطہ تماس سے ملاتا ہے

$$\sqrt{ا-ب} + \sqrt{ا-ج} = 0$$

سے حاصل ہوگی۔

(3) ...  
پس اگر (2) اندرونی دائرہ ہے تو (1) اور (3) سے

$$\frac{ب}{(س-ب)} = \frac{ج}{(س-ج)}$$

اسی طرح ج ا پر کے نقطہ تماس پر غور کرنے سے

$$\frac{ا}{(س-ا)} = \frac{ج}{(س-ج)}$$

اس لیے اندرونی دائرہ کی مساوات

$$\sqrt{ا-ع} + \sqrt{ا-ب} + \sqrt{ا-ج} = 0$$

ہے۔

جانبی دائروں کی مساواتیں بھی اسکے مشابہ طریقہ سے معلوم کی جاسکتی ہیں۔

۲۔ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جس کے لحاظ سے  
حوالے کا مثلث خود قطبی ہوتا ہے۔  
اُن تمام مخروطیوں کی مساواتیں جن کے لحاظ سے حوالے کا  
مثلث خود قطبی ہے شکل  
ع = ا + و + ب + ط = ج = ۔

کی ہیں۔ کسی دائرہ کی مساوات کو شکل

ا = ب + ب + ب + ج + ع + ب + (ل + ع + م + ب + ن + ج) (ا =  
+ ب + ب + ج + ع + ب + ج) = ۔

میں لکھنا چاہ سکتا ہے۔  
اگر اوپر کی دو مساواتیں ایک ہی منہجی کو تعبیر کرتی ہیں تو  
ع = ل + ا + و = م + ب + ط = ن + ج

ا + ع + ج + ن + ب = ۔ ب + ن + ل + ج = ۔ اور ج + ل + ب  
+ م + ل = ۔

اس لیے ل = جم + م = جم + ب + ن = جم + ج  
اس لیے مطلوبہ مساوات

ا + جم + ع + ب + جم + ب + ج + جم + ج = ۔  
ہے۔

۳۔ نو نقطی دائرہ کی مساوات معلوم کرنا

فرض کرو کہ (۳) دائرہ کی مساوات

ا = ب + ب + ب + ج + ع + ب + (ل + ع + م + ب + ن + ج) (ا =  
+ ب + ب + ج + ع + ب + ج) = ۔

ہے۔ یہ دائرہ ع = ۔ کو دو ہاں قطع کرتا ہے جہاں ب + ب = ج + ج



$$نہ ۱ ب ج - ۲ (م ج + نہ ب) ب ج = ۰$$

$$یا \frac{نہ}{ب} = \frac{م}{ج} + \frac{۱}{۲ ب ج}$$

$$اسی طرح \frac{ب}{ج} = \frac{ل}{۱} + \frac{نہ}{۲ ب ج}$$

$$اور \frac{ج}{۱} = \frac{م}{ب} + \frac{ل}{۲ ب ج}$$

اس لیے  $۱۲ = جم ۱$ ،  $۲م = جم ب$ ،  $۲نہ = جم ج$   
اس لیے دائرہ کی مساوات

$$۱۲ بہ جہ + ۲ ب بہ جہ + ۲ جہ عہ بہ$$

$$- (جم ۱ + بہ جم ب + جہ جم ج) (۱ عہ + ب بہ + ج جہ) =$$

$$یا ۱ بہ جہ + ب جہ عہ + ج عہ بہ - عہ ۱ جم - بہ ۱ جم ب - جہ ۱ جم ج =$$

ہے -

اس مساوات کی شکل سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نو نقطہ دائرہ حائل  
دائرہ اور خود مخروط دائرہ مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں جس کی مساوات  
عہ جم ۱ + بہ جم ب + جہ جم ج = ۰

ہے -

## مثالیں

(۳۰۴)

۱۔ ثابت کرو کہ وہ مخروطی جس کی مساوات

$$۱۲ عہ + ۲ ب بہ + ۲ جہ = ۰$$

ہے حوالے کے مثلث کے ضلعوں کو ان کے نقاط وسطی پر مس کرتا ہے۔

۲۔ اگر ایک مثلث میں ایک مخروطی کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ

خطوط جو مثلث کے راسوں کو مقابل کے ضلعوں کے نقاطِ تماس سے ملاتے ہیں ہم نقطہ ہیں

- ۳۔ مثلث کے فود مزدوج دائرہ کا مرکز مثلث کا عمودی مرکز ہے۔  
 ۴۔ اگر ایک دے ہوئے مثلث کے گرد قائم زائد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ایسے تمام قائم زائدوں کے مرکزوں کا طریقی نو نقطہی دائرہ ہے۔  
 ۵۔ حسب ذیل مخروطیوں کے مرکز معلوم کرو:

$$(۱) \sqrt{اعجم ا} + \sqrt{بجم ب} + \sqrt{ججم ج} = ۰$$

$$(۲) \sqrt{لاجب ا} + \sqrt{ماجب ب} + \sqrt{یجب ج} = ۰$$

جواب: (۱) (ا'ب'ج) (۲) (ب'ج'د) (۳) (د'ج'ب)

۶۔ ایک مثلث ا ب ج کے گرد ایک مکافاتی کھینچا گیا ہے اور مکافاتی کے ا'ب'ج پر کے محاس مثلث ا ب ج بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا'د'ب'ج'د' ا'س ناقص پر ایک نقطہ میں ملتے ہیں جو مثلث ا ب ج کے ضلعوں کو ان کے نقاط وسطی پر مس کرتا ہے۔

۷۔ مثلث ا ب ج کے ہر ضلع پر مثلث کے مقابل مثلث متساوی الساقین کھینچا گیا ہے جس کے قاعدہ پر کاہر زاویہ طہ کے مساوی ہے اگر ان مثلثوں کے راس د'ع'ف ہوں تو ثابت کرو کہ د'ب'ج'ج'ف' ایک نقطہ پر ملیں گے اور نیز ثابت کرو کہ طہ کی مختلف قیمتوں کے لیے و کا طریقی ایک قائم زائد ہوگا۔

۸۔ اگر ایک مخروطی مثلث ا ب ج کے گرد کھینچا جائے اور اس کا ایک ماسکہ ا ب ج کے حاط مرکز پر ہو تو ثابت کرو کہ متناظر مرتب خطوط ا ع ± ب ± ج = ۰ میں سے ایک ہے۔

۹۔ اگر ایک دائرہ کی مساوات ا ع ± د ± ب ± ج = ۰ ہو تو ثابت کرو کہ اس کے لحاظ سے

## کسی نقطہ کی طاقت

فہ (ع، ب، ج)

و جب ج + ط جب اب - ۲ ع جب ب جب ج

ہے۔

۱۰۔ نقطہ (ف، گ، ھ) میں سے گزرنے والے خطوط (و، ب، ج، و، ضلعوں ب ج، ج، ا، اب کو علی الترتیب نقطوں ل، م، ن پر قطع کرتے ہیں۔ نیز م، ن، ب ج کو ف پر قطع کرتا ہے، ن، ل، ج، ا کو ق پر قطع کرتا ہے اور ل، م، اب کو س پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خطوط م، ن، ل، م اور ف، ق، س، دو محروطیوں

$$ف = \frac{ع}{(ا - ع)} + \frac{ب}{(ا - ب)} + \frac{ج}{(ا - ج)} = ۰$$

$$ن = \frac{ف}{(ا - ف)} + \frac{گ}{(ا - گ)} + \frac{ھ}{(ا - ھ)} = ۰$$

کو مس کرتے ہیں۔

۱۱۔ دائرہ (اب ج کے ا، ب، ج پر کے ماس ضلعوں ب ج، ج، ا، اب سے علی الترتیب نقطوں ا، ب، ج پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا، ب، ج کے وسطی نقطے حاطط دائرہ اور نو نقطی دائرہ کے بنیادی محور پر ہیں۔

۱۲۔ ایک مثلث کے گرد ایک مکافی کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ مکافی کے لحاظ سے مثلث کے اندرونی مرکز کا قطبی اس دائرہ کو لف کرتا ہے جو مثلث کے تین جانبی دائروں کے مرکوزوں میں سے گزرتا ہے۔

[کوئی محروطی لہ بہ جہ + مہ جہ ع + نہ عہ بہ = ۰ ہے مع اس شرط کے کہ

$$\sqrt{ل ل} + \sqrt{ب م} + \sqrt{ج نہ} = ۰ \dots (۱)$$

(۱'۱'۱) کا قطبی

(۲) لہ (بہ + جہ) + مہ (جہ + عہ) + نہ (عہ + بہ) = ۰ .... (۲)

- ہے

شرط (۱) کے ساتھ (۲) کا لفاف [دفعہ ۲۸۴]

$$۰ = \frac{ج}{بہ + عہ} + \frac{ب}{جہ + عہ} + \frac{۱}{بہ + جہ}$$

[۴]

۲۹۱۔ پیاسکل کا مسئلہ۔ اگر ایک مسدس کو ایک

مخروطی میں گھینچا جائے تو متقابلہ ضلعوں کے تین  
زوجوں کے تین نقاط تقاطع ایک خط مستقیم میں ہونگے۔فرض کرو کہ مسدس کے اس (ا، ب، ج، د، ع، ح)  
ہیں۔ ا، ب، ج کو حوالے کا مثلث قرار دو اور فرض کرو کہ نقطے  
د، ع، ح علی الترتیب (عہ، بہ، جہ) (عہ، بہ، جہ) (عہ، بہ، جہ)  
(عہ، بہ، جہ) ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots ۰ = \frac{لہ}{عہ} + \frac{مہ}{بہ} + \frac{نہ}{جہ}$$

- ہے

ب د اور ا ع کی مساواتیں  $\frac{عہ}{جہ} = \frac{جہ}{بہ}$  اور  $\frac{بہ}{جہ} = \frac{جہ}{بہ}$ 

ہونگی۔

اس لیے ان کے نقطہ تقاطع پر  $\frac{عہ}{جہ} = \frac{بہ}{جہ} = \frac{جہ}{بہ} = ۱$

اسی طرح ج د اور ا ف نقطہ (۱، ۱، ۱) پر ملتے ہیں،

اور ج ع اور ب ع نقطہ (۱، ۱، ۱) پر ملتے ہیں۔

یہ تین نقطے ایک خط مستقیم میں ہوں گے اگر

(۳۷۶)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{ج} & \frac{1}{ج} & \frac{1}{ج} \\ \frac{1}{ب} & \frac{1}{ب} & \frac{1}{ب} \\ \frac{1}{ع} & \frac{1}{ع} & \frac{1}{ع} \end{vmatrix} = 0 \text{ یا اگر } \begin{vmatrix} \frac{1}{ج} & \frac{1}{ج} & \frac{1}{ج} \\ \frac{1}{ب} & \frac{1}{ب} & \frac{1}{ب} \\ \frac{1}{ع} & \frac{1}{ع} & \frac{1}{ع} \end{vmatrix} = 0$$

(۲).....

لیکن چونکہ تین نقطے د، ع، ف، مخروطی (۱) پر ہیں ایسے

$$0 = \frac{1}{ج} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{ع}$$

$$0 = \frac{1}{ج} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{ع}$$

$$0 = \frac{1}{ج} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{ع} \text{ اور}$$

لہٰذا 'نہ' کو ساقط کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ شرط (۲) پوری ہوتی ہے۔ اور اس لئے اسے ثابت ہے۔ [نیز دیکھو دفعہ ۳۲۴ مثال ۳]۔  
چونکہ چھ نقطوں کو ترتیب میں ساٹھ مختلف طریقوں سے لیا جاسکتا ہے اس لیے مخروطی پر چھ نقطوں کے جواب میں ساٹھ مسدس ہوتے ہیں اور چونکہ ان میں سے ہر مسدس کے لیے پیا سکل کا مسئلہ درست ہے اس لیے مخروطی پر کے چھ نقطوں کے جواب میں ساٹھ پیا سکل خطوط

ہوتے ہیں۔  
 ۲۹۲۔ اگر ایک مسدس ایک مخروطی کے گرد کھینچا جائے تو اس کے ضلعوں کے نقاط تماس اس مسدس کے راس ہوں گے جو مخروطی میں کھینچا گیا ہو۔ حائل مسدس کا ہر راس، اندرونی مسدس کے متناظر ضلع کا قطب ہوگا، اس لیے حائل مسدس کا ایک وتر یعنی وہ خط جو دو متقابلہ راسوں کو ملاتا ہے اس نقطہ کا قطبی ہوگا جو اندرونی مسدس کے دو متقابلہ ضلعوں کا نقطہ تقاطع ہے۔ لیکن اندرونی مسدس کے متقابلہ ضلعوں کے زوجوں کے تین نقاط تقاطع پیا سکاں کے مسئلہ کی رو سے ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں، اس لیے ان کے تین قطبی یعنی حائل مسدس کے تین وتر ایک نقطہ پر ملیں گے۔ اس سے بریان کان (Brianchon) کا مسئلہ ثابت ہوتا ہے جو یہ ہے کہ اگر ایک مسدس کو ایک مخروطی کے گرد کھینچا جائے تو اس کے تین وتر ایک نقطہ پر ملیں گے۔

(۳۷۷)

۲۹۳۔ اگر ایک مخروطی کے پانچ تماس دے گئے ہوں تو ہم ان کے نقاط تماس کو بریان کان کے مسئلہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ دے ہوئے تماسوں سے جو خمیس بنتا ہے اس کے راس ا، ب، ج، د، ع ہیں۔ تب اگر ا، ب کا نقطہ تماس گ ہو تو ا، ب، ج، د، ع، ایک حائل مسدس کے راس ہیں جس کے دو ضلع منطبق ہیں۔ بریان کان کے مسئلہ کی رو سے د، گ، ا، ج اور ب، ع کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے، اس طرح کی معلوم ہو جاتا ہے۔ دوسرے نقاط تماس بھی اسی طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں اسی طرح پیا سکاں کے مسئلہ سے ہم پانچ دے ہوئے نقطوں پر کسی مخروطی کے تماس معلوم کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ پانچ

دے ہوئے نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ع' ہیں اور فرض کرو کہ مخروطی پر  
 ۱ سے لا انتہا قریب ایک نقطہ 'ف' ہے۔ تب یہ اسکاں کے مسئلہ  
 سے 'ا' 'ب' اور 'د' 'ع' 'ب' 'ج' اور 'ع' 'ف' 'ج' 'د' اور 'ف' 'ع'  
 کے تین نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہونے چاہئیں۔ پس  
 اگر 'ا' 'ب' اور 'د' 'ع' 'ب' 'ج' اور 'ع' 'ا' کے نقاط تقاطع کو ملائیو الاخط  
 'ج' 'د' سے ھ پر ملے تو 'ا' 'ھ' 'ا' پر کا ماس ہوگا۔ دوسرے ماس  
 بھی اسی طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں۔

## ماسی محدود

۲۹۴۔ اگر کسی خط مستقیم کی سہ خطی یا رقبی مساوات کے تین مستقل  
 'ل' 'م' 'ن' ہوں تو خط کا محل مستقیم ہو جائے گا جبکہ 'ل' 'م' اور 'ن'  
 دے گئے ہوں۔ اور 'ل' 'م' 'ن' کی قیمتوں کو بدلنے سے مساوات  
 کسی خط مستقیم کو تعبیر کر سکے گی۔

مقداروں 'ل' 'م' 'ن' کو جن سے اس طرح ایک خط مستقیم کا محل متعین  
 ہوتا ہے خط کے محدود کہتے ہیں۔

اگر ایک خط مستقیم کی مساوات رقبی محدودوں میں

ل + لا + م + ما + ن + نی = ۰  
 ہو تو حوالے کے مثلث کے راسوں سے اس خط مستقیم پر عمودوں کے  
 (۳۷۸) طول 'ل' 'م' 'ن' کے متناسب ہوں گے۔ یہ نتیجہ دفعہ ۲۶۰ سے ماخوذ  
 ہوتا ہے لیکن ہم اس کا علیحدہ ثبوت دیں گے۔

فرض کرو کہ حوالے کے مثلث کے راسوں 'ا' 'ب' 'ج' سے  
 خط مستقیم پر کھینچے ہوئے عمودوں کے طول علی الترتیب 'ف' 'ق' 'ر'  
 ہیں۔ فرض کرو کہ خط مستقیم ضلع 'ب' 'ج' کو 'ک' پر قطع کرتا ہے اور  
 فرض کرو کہ 'ک' کے محدود (۰، 'ما'، 'نی') ہیں۔

تب ق : ر = ب : ج ک = - ی : م  
لیکن چونکہ ک خط پر ہے اس لئے م مابن ی = . اور اسلئے

۲۹۵ - اگر حوالے کے مثلث کے راسوں سے ایک خط مستقیم پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے طولوں کو خط کے محدود کہا جاسکتا ہے۔ اگر ان میں سے کوئی دو عمود مختلف سمتوں میں ہوں تو یہ سمجھنا ہوگا کہ انکی علامتیں مختلف ہیں۔

دفعہ ماسبق سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک خط کی مساوات جبکہ خط کے محدود ق، ر ہوں ف لا ق مابن ی = . ہے۔

جب ایک خط مستقیم پر کھینچے ہوئے تین عمودوں میں سے دو کے طول دئے گئے ہوں تو خط کے دو اور صرف دو محل ہوتے ہیں اور اس لیے جب خط کے دو محدود دئے جاتے ہیں تو تیسرے محدود کی قیمت دو مخصوص قیمتوں میں سے ایک ہوتی ہے۔ پس ایک خط کے تین محدودوں میں کوئی خاص متماثلہ رشتہ ہونا چاہئے اور وہ دوسرے درجہ کا ہونا چاہئے۔

۲۹۶ - وہ متماثلہ رشتہ معلوم کرنا جو کسی خط مستقیم کے تین محدودوں کے درمیان موجود ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ طہ وہ زاویہ ہے جو خط ضلع ب (سے بنا تا ہے تب ق - ف = ج جب طہ اور ق - ر = ا جب (طہ + ب) - طہ کو ساتھ کرنے پر مطلوبہ رشتہ

ا (ق - ف) - ۲ ا ج جم ب (ق - ف) (ق - ر) + ج (ق - ر) = ۵۴

یعنی ح ف ا - ۲ ح ق ر ب ج جم ا = ۵۴





میں علی الترتیب ء، و، ط، ء، و، ط کے صغیر ہیں۔ چونکہ ء، و، ط،  
ء، و، ط کا مقطع

ء	ط	و
ط	و	ء
و	ء	ط

میں ء، و، ط، ء، و، ط کے صغیروں کے متناسب ہیں  
اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر سا (ل، م، ن) = اُس مخروطی  
کی حماسی مساوات ہو جس کی رقبئی مساوات فہ (لا، ما، ی) = ہے  
تو فہ (ل، م، ن) = اُس مخروطی کی حماسی مساوات ہوگی جس کی  
رقبئی مساوات سا (لا، ما، ی) = ہے۔

۲۹۹۔ کسی حماس کے نقطہ تماس کی مساوات کو دفعہ ۲۳۸ میں  
استعمال شدہ طریقہ کے مشابہ طریقہ سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ  
مساوات

$$ف = \frac{فرف}{فزن} + \frac{فرف}{فزن} + \frac{فرف}{فزن} =$$

$$یا \quad ف = \frac{فرف}{فزن} + \frac{فرف}{فزن} + \frac{فرف}{فزن} =$$

ہے جہاں فہ (ف، ق، ر) = مخروطی کی مساوات ہے اور ف، ق،  
ر، حماس کے محدود ہیں۔

اگر (ف، ق، ر) منحنی کا حماس نہ ہو تو اوپر کی مساوات  
(ف، ق، ر) کے قطب کی مساوات ہوگی۔

مرکز، لانتا ہی پر کے خط کا قطب ہے اور لانتا ہی پر کے خط کے  
محدود ا، ا، ا ہیں، اس لیے منحنی کے مرکز کی مساوات

$$= \frac{فرف}{فزن} + \frac{فرف}{فزن} + \frac{فرف}{فزن} =$$

۳۰۰۔ اگر ایک مثلث ایک مخروطی میں اور دوسرے مخروطی کے گرد کھینچا جاسکے تو ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے اور ایسے تمام مثلث ایک تیسرے ثابت مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہوتے ہیں۔  
فرض کرو کہ حوالے کا مثلث 'مخروطی

$$س_۱ = \frac{ل_۱}{ع_۱} + \frac{م_۱}{ب_۱} + \frac{ن_۱}{ج_۱} = ۰$$

میں اور مخروطی

$$س_۲ = \frac{ل_۲}{ع_۲} + \frac{م_۲}{ب_۲} + \frac{ن_۲}{ج_۲} = ۰$$

کے گرد کھینچا گیا ہے۔

اب س<sub>۱</sub> کے کسی نقطہ (ا) سے مخروطی س<sub>۲</sub> کے دو ماس 'آب'، 'آج'، 'کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ماس مخروطی س<sub>۱</sub> کو 'ب'، 'ج' پر مکرر قطع کرتے ہیں۔ تب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ 'ب'، 'ج'، 'مخروطی س<sub>۲</sub> کو مس کرتا ہے۔

فرض کرو کہ 'آ'، 'ب'، 'ج' کے مجدد (ع<sub>۱</sub>، ب<sub>۱</sub>، ج<sub>۱</sub>) وغیرہ ہیں۔ (۳۸۱)  
تب خطوط 'آب'، 'آج'، 'ماسداتوں

$$۰ = \frac{ل_۱}{ع_۱} + \frac{م_۱}{ب_۱} + \frac{ن_۱}{ج_۱}$$

$$۰ = \frac{ل_۲}{ع_۲} + \frac{م_۲}{ب_۲} + \frac{ن_۲}{ج_۲} \quad \text{اور}$$

سے تعبیر ہوتے ہیں۔

چونکہ یہ خطوط  $s$  کو مس کرتے ہیں اسلئے [دفعہ ۲۸۴]

$$\frac{L}{r} عم عم + \frac{M}{r} م م + \frac{N}{r} ن ن = ۰$$

$$+ \frac{M}{r} م م + \frac{N}{r} ن ن = ۰$$

$$\frac{\frac{L}{r} عم عم}{م م - م م - عم عم} = \frac{\frac{M}{r} م م}{م م - م م - عم عم} = \frac{\frac{N}{r} ن ن}{م م - م م - عم عم}$$

اس لیے  $\frac{L}{r} عم عم$  کو

$$\frac{L}{r} عم عم + \frac{M}{r} م م + \frac{N}{r} ن ن = ۰ \dots \dots (۱)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اور یہ  $s$  کو مس کرتا ہے کیونکہ

$$\frac{L}{r} عم عم + \frac{M}{r} م م + \frac{N}{r} ن ن = ۰$$

اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ  $s$  میں ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد چھپی جاسکتی ہے جن کے ضلع  $s$  کو مس کریں۔

اب  $\frac{L}{r} عم عم$  کی مساوات کو شکل

$$\frac{L}{r} عم عم + \frac{M}{r} م م + \frac{N}{r} ن ن = ۰ \dots \dots (۲)$$

میں بھی لکھا جاسکتا ہے اس لیے

$$(3) \dots \frac{ل عم عم عم}{۲} = \frac{م بر بر بر بر}{۲} = \frac{ن جم جم جم جم}{۲}$$

مخروطی  $س = ل + ع + م + ن$  جہاں  $=$   
 کے لحاظ سے نقطہ (ع، م، ن، جہاں) کا قلبی

ل عم عه + ص بر به + ن جم به = .

-4-

یہ وہی خط ہے جو ب ج ہے جس کی مساوات

$$= \frac{ل ج ب}{ج م ب} + \frac{م ب ج}{ب م ج} + \frac{ل ع م}{ع م ل}$$

ہے اگر  $\frac{ل عم اع عم}{م} = \frac{م ب ا ب ا ب م}{ن} = \frac{ن ج ح ج ح ج ن}{ز}$

یعنی (۲) سے اگر  $\frac{ل}{ل} = \frac{م}{م} = \frac{ن}{ن}$

پس وہ تمام مثلث جو مخروطی

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.5$$

میں اور محرومی

$$\text{س} = \sqrt{\text{ا}} + \sqrt{\text{م}} + \sqrt{\text{ن}} = .$$

کے گرد کھینچے گئے ہوں محرومی

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

کے لحاظ سے خود قطبی ہوتے ہیں۔  
فرض کرو کہ  $\rho$  میں، پر کوئی نقطہ (عہ، بیہ، جہ) ہے۔ تب  $\rho$  کے  
لحاظ سے اس کا قطبی

$$\frac{\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} = 0 \quad (۴)$$

ہے۔ وہ شرط کہ (۴)، مخروطی میں  $\rho$  کو س کرے یہ ہے کہ

$$0 = \frac{\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}$$

$$0 = \frac{\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}$$

جو  $\rho$  میں، پر کے کسی نقطہ کے لیے درست ہے۔

اس طرح میں، اور میں،  $\rho$  کے لحاظ سے، ایک  
دوسرے کے متکافی ہیں۔

مثال۔ اگر ایک مثلث جو  $\rho$  کے لحاظ سے خود قطبی  
ہو مخروطی میں، کے گرد کھینچا جاسکے تو میں، میں ایسے مثلثوں کی  
لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو  $\rho$  کے لحاظ سے خود قطبی

ہوں۔

مخروطیوں کی مساواتوں کو

$$\rho = \rho + \rho + \rho = 0$$

$$\rho = \rho + \rho + \rho = 0$$

لیا جاسکتا ہے۔

مخروطی میں  $m$ ،  $n$  اور  $p$  کو ان نقطوں پر مس کرتا ہے جو خط

$$- \text{لہ } عم + مہ + نہ جم = ۰ \dots (۱)$$

پر واقع ہیں۔

فرض کرو کہ ایک نقطہ  $F$  جہاں خط (۱) مخروطی میں کو قطع کرتا ہے

(عم،  $m$ ،  $n$ ،  $p$ ) ہے تو

$$- \text{لہ } عم + مہ + نہ جم = ۰ \dots (۲)$$

$$\text{اور } عم + مہ + نہ جم = ۰ \dots (۳)$$

میں  $m$  کے لحاظ سے (عم،  $m$ ،  $n$ ،  $p$ ) کا قطبی

$$\text{لہ } عم - مہ - نہ جم + مہ - نہ جم + مہ - نہ جم = ۰$$

$$\text{ہے یا (۲) کی رُو سے } مہ + نہ جم = ۰ \dots (۴)$$

$$\text{اب خط (۴) (۳) کی رُو سے میں کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں } \frac{مہ}{عم} = \frac{نہ}{جم}$$

پس اگر  $F$  کا قطبی میں کو نقطوں  $Q$ ،  $R$  پر قطع کرے تو یہ نقطے

( $\pm$  عم،  $m$ ،  $n$ ،  $p$ ) ہیں۔

اب میں  $m$  کے لحاظ سے  $Q$ ،  $R$  مزدوج ہیں اگر

$$\text{لہ } عم - مہ - نہ جم + مہ - نہ جم + مہ - نہ جم = ۰$$

$$- \text{لہ } عم + مہ + نہ جم + مہ + نہ جم + مہ + نہ جم = ۰$$

اور یہ (۳) سے حاصل ہوتا ہے۔

پس مثلث  $QFR$  میں  $m$  ہے اور میں  $m$  کے لحاظ سے

خود قطبی ہے۔

اب دفعہ ۳۰ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ میں  $m$  ایسے مثلثوں کی لاتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو میں  $m$  کے لحاظ سے خود قطبی ہوں۔

۳۰۱۔ فرض کرو کہ ایک مخروطی میں پر کوئی چار نقطے (ا، ب، ج، د) ہیں۔ چار زاویوں (ا، ب، ج، د) کے وتری مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دو۔ اب چار نقطوں (ا، ب، ج، د) کو (۱±۱، ۱±۱) لیا جاسکتا ہے ان کو ملانے والے خطوں کے تین زوج

$$\begin{aligned} & \text{ب}^۲ - \text{ج}^۲ = ۰, \text{ج}^۲ - \text{د}^۲ = ۰, \text{د}^۲ - \text{ا}^۲ = ۰, \text{ا}^۲ - \text{ب}^۲ = ۰. \end{aligned}$$

ہیں۔ نیز میں کی مساوات شرط  $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۰$  کے ساتھ  $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۰$  ہے۔ پس میں، مساواتوں

$$\frac{\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲}{\text{ا} - \text{ب}} = \frac{\text{ج}^۲ - \text{د}^۲}{\text{ج} - \text{د}} = \frac{\text{د}^۲ - \text{ا}^۲}{\text{د} - \text{ا}}$$

میں سے کسی ایک سے حاصل ہوتا ہے۔

اب حسب ذیل تین مخروطیوں پر غور کرو:

$$\text{س} \equiv \text{ل} (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د}) - (\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲) \mid \text{ا} = ۰,$$

$$\text{س} \equiv \text{ل} (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د}) - (\text{ج}^۲ - \text{د}^۲) \mid \text{ا} = ۰,$$

$$\text{س} \equiv \text{ل} (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د}) - (\text{د}^۲ - \text{ا}^۲) \mid \text{ا} = ۰,$$

جہاں  $\text{ل} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د}$  کوئی خط مستقیم ہے۔ (۱) سے یہ صاف ظاہر ہے کہ یہ تمام مخروطی، میں پر کے اسی چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں، پس میں پر کے اسی چار نقطوں میں سے گزرتے ہوئے تین مخروطیوں کو ٹھینچنا ممکن ہے انہیں سے ہر مخروطی خطوں کے زوج (ا، ب، ج، د)، (ا، ج، ب، د)، (ا، د، ب، ج) میں سے



ایک کے ساتھ دوسرا تماس رکھتا ہے اور دوسرا تماس کسی دے ہوئے خط  $ل ع + م + ن + ج = ۰$  پر ہوتے ہیں۔

اگر لہ کو ایسا منتخب کیا جائے کہ  $س$  کوئی دیا ہوا مخروطی ہو

جو  $ا ب$ ،  $ج$ ،  $د$  کو  $ف$ ،  $ق$  پر  $س$  کرے تو  $س$  اور  $س$  معلوم ہو جاتے ہیں اور یہ وہ مخروطی ہیں جو  $س$  اور  $س$  کے چار نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں اور علی الترتیب خطوں کے  $ز$  و  $ج$ وں ( $ا$ ،  $ج$ ،  $ب$ ،  $د$ ) ( $ا$ ،  $د$ ،  $ب$ ،  $ج$ ) کو  $س$  کرتے ہیں، ہر صورت میں  $ف$ ،  $ق$  دوسرا تماس ہے۔

۳۰۲۔ اب فرض کرو کہ مخروطی  $س$  میں کھینچے ہوئے دو مثلث  $ا ب ج$ ،  $ا ب ج$  ایسے ہیں کہ ضلع  $ا ب$ ،  $ب ج$ ،  $ا ب$ ،  $ب ج$ ، مخروطی  $س$  کو علی الترتیب نقطوں  $ف$ ،  $ق$ ،  $ف$ ،  $ق$  پر  $س$  کرتے ہیں۔

(۸۴) اب دفعہ ۳۰۱ کی رو سے ( $ا$  اور  $ب$ ،  $ب$ ،  $س$  اور  $س$ ) کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے ایک مخروطی کو  $س$  کریں گے اور نقاط تماس وہ نقطے ہوں گے جہاں  $ف$ ،  $ق$  علی الترتیب ( $ا$ ،  $ب$ ) کو قطع کرتا ہے۔

نیز  $ب$ ،  $ا$  اور  $ج$ ،  $ج$ ،  $س$  اور  $س$  کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے ایک مخروطی کو  $س$  کریں گے اور نقاط تماس وہ نقطے ہوں گے جہاں  $ق$ ،  $ق$  علی الترتیب  $ب$ ،  $ا$  اور  $ج$ ،  $ج$  کو قطع کرتا ہے۔

اب  $س$  کے لحاظ سے  $ف$ ،  $ق$  کا قطب  $ب$  ہے اور  $ف$ ،  $ق$  کا  $ب$ ۔ اس لئے  $ب$ ،  $ب$ ،  $و$  کا قطبی ہے جہاں  $و$ ،  $ف$ ،  $ق$  اور  $ف$ ،  $ق$  کا نقطہ تقاطع ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ  $ف$ ،  $ق$  اور  $ق$ ،  $و$

کے قطبی پر ملتے ہیں۔  
اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  $\alpha$  اور  $\beta$  کے نقاط تقاطع میں  
گزرنے والا ایک ہی مخروطی  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  کو مس کرے گا۔  
اب چونکہ  $\alpha$  اور  $\gamma$   $\beta$  کے نقاط تقاطع میں  
سے گزرنے والے مخروطی کو مس کرتے ہیں اس لیے یہ مستط ہوتا ہے  
کہ  $\alpha$  اور  $\gamma$  بھی نظام کے ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

پس اگر ایک مخروطی  $\alpha$  میں ایک مثلث کھینچا جائے  
اور اس کے دو ضلع ایک مخروطی  $\beta$  کو مس کریں تو تیسرا ضلع  
ایک مخروطی  $\gamma$  کو مس کرے گا، ان تینوں مخروطیوں کے  
نقاط تقاطع وہی ہوں گے۔ اگر تیسرا ضلع  $\alpha$  کو اس کے  
ایک محل میں  $\beta$  کو مس کرے تو تیسرا ضلع ہمیشہ  $\gamma$  کو مس کریگا  
[دفعہ ۳۰۰]۔

۳۰۳۔ پھر فرض کرو کہ مخروطی  $\alpha$  میں ایک مثلث  $\alpha\beta\gamma$   
کھینچا گیا ہے اور فرض کرو کہ  $\alpha$  مخروطی  $\beta$  کو مس کرتا ہے اور  
 $\beta$  مخروطی  $\gamma$  کو مس کرتا ہے جہاں یہ تینوں مخروطی  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$   
سے اسی چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔  
فرض کرو کہ مثلث  $\alpha\beta\gamma$  کا دوسرا محل  $\alpha\beta$   $\gamma$  ہے اور فرض  
کرو کہ  $\beta$  سے  $\gamma$  کے دوسرے تماس  $\beta\gamma$   $\alpha$  ہے جہاں  
نقاط  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  مخروطی  $\alpha$  پر ہیں۔

تب دفعہ ۳۰۱ سے  $\alpha$  اور  $\beta$  دونوں اس چار نقطہ نظام  
کے ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں کیونکہ  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  مخروطی  $\alpha$   
کو مس کرتے ہیں۔

(۲۸۵) اسی طرح ب ب اور ج ج، نظام کے ایک مخروطی کوس کرتے ہیں، علیٰ ہذا ب ب اور لا لا بھی۔  
چار نقطہ نظام کے صرف دو مخروطی ب، ب کو س کریں گے اور اگر ان کے نقاط تماس ک، ک ہوں تو سمت {ب ک ب ک} موسیقی ہے کیونکہ ک، ک اُس درپچ کے دو ہرے نقطے ہیں جس کا ایک مزدوج زوج ب، ب ہے [دفعہ ۲۱۳ مثال ۵]۔ پس نظام کا صرف ایک مخروطی، ب ب کو ب اور ب کے درمیان ایک نقطہ پرس کرے گا لیکن اگر ا اور ا، ب اور ب، ج اور ج، لا اور لا باہم قریب ہوں تو متناظر و تر تماس، ب ب کو ب اور ب کے درمیان قطع کریں گے۔

اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر مثلث ا ب ج کو بتدریج اس طرح گھمایا جائے کہ وہ محل ا ب ج اختیار کرے اور اس ابتداء میں ضلعوں کی سمتوں میں کوئی اچانک تبدیلیاں نہ ہوں تو خطوط ا ا، ب ب، ج ج سب کے سب نظام کے ایک ہی مخروطی کوس کریں گے۔ [یہ ا ا، ب ب اور لا لا کے لیے بھی درست ہے] اب چونکہ ا اور ج ج، نظام کے اسی مخروطی کوس کرتے ہیں اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ ا ج اور ا ج اس چار نقطہ نظام کے اسی مخروطی کوس کرتے ہیں، اس لیے ا ج کا لفاف ایک ثابت مخروطی ہے۔ [اسی طرح لا لا کا لفاف بھی دو سر ثابت مخروطی ہے]۔

پس اگر ا ب ج کو مخروطی س میں اس طرح کھینچا جائے کہ ا ب، مخروطی س، کوس کرے اور ب ج، مخروطی س، کوس کرے اور مخروطیوں س، س کے نقاط تقاطع ایک ہی ہوں تو ضلع ج ا، اں ہی چار نقطوں میں سے گزرنیوالے

ایک یا دوسرے ثابت مخروطی کو مس کرے گا۔

۳۰۴۔ اب کثیر ضلعی (ج د) کی صورت پر غور کرو جو ایک مخروطی میں (اس طرح کھینچا گیا ہے کہ اس کے تمام ضلع سوائے ایک کے ایک مخروطی میں) کو مس کرتے ہیں۔ چونکہ (ج د) مخروطی میں کو مس کرتے ہیں اس لیے (ج د) ایک ایسے مخروطی میں کو مس کرتا ہے جو اس کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے۔ پھر چونکہ (ج د) اور (ج د) اس چار نقطی نظام کے مخروطیوں کو مس کرتے ہیں اس لیے (ج د) نظام کے دوسرے مخروطی کو مس کرتا ہے، علیٰ ہذا القیاس۔ پس کثیر ضلعی کا باقی ضلع ایک ایسے ثابت مخروطی (ج) کو لف کرے گا جو اس کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے، اور اگر باقی ضلع مخروطی میں کو اس کے کسی محل میں مس کرے تو وہ ہمیشہ میں کو مس کرے گا۔ کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک مثلث کے لیے (دفعہ ۳۰۰) اور ایک چار ضلعی کے لیے (دفعہ ۲۸۹) مثال (۳) درست ہے، اور جب (ج د) .... کے تمام ضلع میں کو مس کرتے ہیں تو کسی ضلع کو بھی باقی (آزاد) ضلع تصور کیا جاسکتا ہے اور اس اور دوسرے مخروطی (ج) کے چار سے زیادہ مشترک تماس نہیں ہو سکتے۔

(۳۸۶)

یہ اندرونی اور حائل کثیر ضلعیوں کا (Porism) ہے یعنی

اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک مخروطی میں اس طرح کھینچا جاسکے کہ اس کے ضلع ایک دوسرے مخروطی کو مس کریں تو ایسے کثیر ضلعی تعداد میں لامتناہی ہوں گے۔ [نیز دیکھو دفعہ ۳۰۳ اور دفعہ ۳۰۴]

مثال ۱۔ ایک نقطہ سے دو دائرے ہوئے مخروطیوں کے تماسوں کے  
زوج کھینچے گئے ہیں جو موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق  
ایک مخروطی ہے۔  
مخروطیوں کے مشترک خود قطبی مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دو اور  
فرض کرو کہ ان کی مساواتیں

$$e + l + d + m + p + y = 0 \text{ اور } e + l + d + m + p + y = 0$$

ہیں۔

نقطہ (ف، گ، ہ) سے پہلے مخروطی کے تماس مساوات

$$(e + l + d + m + p + y) (e + f + g + h) - (e + f + g + h) (e + l + d + m + p + y) = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ تماس خط  $e = 0$  کو ایسے نقطوں پر قطع کرتے ہیں جن کو نقطہ (ا، ب) سے  
ملایا جائے تو خطوط

$$d + (e + f + g + h) m + 2 + d + g + h + m + p + y = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اسی طرح دوسرے مخروطی کے لیے

$$d + (e + f + g + h) m + 2 + d + g + h + m + p + y = 0$$

چونکہ خطوں کے یہ ازواج موسیقی طور پر مزدوج ہیں اس لیے حاصل ہونا

$$d + (e + f + g + h) m + 2 + d + g + h + m + p + y = 0$$

$$d + (e + f + g + h) m + 2 + d + g + h + m + p + y = 0$$

$$۶۶ (۱ط + ۱ط) ف + ۱و (۱ط + ۱ط) گ + ۱ط (۱ط + ۱ط) و$$

$$۰ = ۱و (۱ط + ۱ط)$$

میں تحویل پذیر ہے۔ پس مطلوبہ طریق مخروطی

$$۳ ۶۶ (۱ط + ۱ط) لا = ۰$$

ہے۔

اس مخروطی کو اکثر فا = سے تعبیر کیا جائے گا۔

چونکہ ایک نقطہ میں سے گزرنے والے تین منطبق خطوط اور کوئی دوسرا خط ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں اس لیے مخروطی فادے ہوئے مخروطیوں کے مشترک مماسوں کے آٹھ تقاطعات اس میں سے گزرتا ہے، اس کی تصدیق بڑی آسانی سے اس مساوات سے کیجا سکتی ہے جو مخروطی فا کی ہے۔

مثال ۲۔ ایک خط مستقیم دو دے ہوئے مخروطیوں کو نقطوں کے ایسے زوجوں میں قطع کرتا ہے جو موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم کا لفافہ ایک مخروطی ہے۔ ہم مخروطیوں کی مساواتوں کو

(۳۸۴)

$$۶ لا + ۱و + ۱ط ی = ۰ \text{ اور } ۶ لا + ۱و + ۱ط ی = ۰$$

لے سکتے ہیں۔

خط لا + م + ن ی = ۰ پہلے مخروطی کو ان نقطوں پر قطع کرتا ہے جن کو نقطہ (۱، ۰) کے ساتھ ملایا جائے تو خطوط

$$۶ (م + ن ی) + ۱و + ۱ط ی = ۰$$

$$یا (۶م + ۱و) + ۱ط ی + ۱و + ۱ط ی = ۰$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اسی طرح دوسرے مخروطی کے لیے خطوط

$$(\epsilon_1^2 + \omega_1^2) \text{ ما } + \epsilon_2^2 \text{ م ن ما } + (\omega_1^2 + \epsilon_1^2) \text{ ن ا } = 0$$

حاصل ہوں گے۔

چونکہ خطوں کے یہ زوج موسیقی طور پر مزدوج ہیں اس لیے

$$(\epsilon_1^2 + \omega_1^2) \text{ ل ا } + (\omega_1^2 + \epsilon_1^2) \text{ ن ا } + (\epsilon_1^2 + \omega_1^2) \text{ م ا } + (\epsilon_1^2 + \omega_1^2) \text{ ن ا } = 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

پس ل لا + م ما + ن ن ا = کالاف اوپر کی شرط کے ساتھ مخروطی

$$= 0$$

ہے۔

اس مخروطی کو اکثر فا = سے تعبیر کیا جائے گا۔

چونکہ ایک خط مستقیم پر تین منطبق نقطے اور کوئی دوسرا نقطہ ایک موسیقی سعت بناتے ہیں اس لیے مخروطی فا دے ہوئے مخروطیوں کے مشترک نقطوں پر کے ماسوں کو مس کرتا ہے، اس کی تصدیق اسکی مساوات سے بخوبی ہو سکتی ہے۔

مثال ۳۔ چار دائرے اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ

چار دے ہوئے خطوں میں سے تین تین سے جو چار مثلث بنتے ہیں انہیں سے ہر ایک دائروں میں سے ایک کے لحاظ سے

خود قطبی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر چار ضلعی کے وتروں سے بنے ہوئے مثلث کے گرد ایک دائرہ کھینچا جائے تو یہ دائرہ اور مذکورہ بالا چار دائرے ایک مشترک بنیادی محور رکھیں گے۔

وتروں سے بنے ہوئے مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دو تو چار خطوط مستقیم کی مساواتیں ل  $\pm$  ع  $\pm$  م  $\pm$  ب  $\pm$  ن جہ = ۰ ہونگی۔ وہ تمام مخروطی جن کے لحاظ سے خطوط ل  $\pm$  ع  $\pm$  م  $\pm$  ب  $\pm$  ن جہ = ۰، ل  $\pm$  ع  $\pm$  م  $\pm$  ب  $\pm$  ن جہ = ۰ اور ل  $\pm$  ع  $\pm$  م  $\pm$  ب  $\pm$  ن جہ = ۰۔

ایک خود قطبی مثلث بناتے ہیں مساوات ل (ل  $\pm$  ع  $\pm$  م  $\pm$  ب  $\pm$  ن جہ) + م (ل  $\pm$  ع  $\pm$  م  $\pm$  ب  $\pm$  ن جہ) + ن (ل  $\pm$  ع  $\pm$  م  $\pm$  ب  $\pm$  ن جہ) = ۰۔ (۱) میں شامل ہیں۔ اگر یہ مخروطی ایک دائرہ ہے تو اس کی مساوات کو شکل ۱ ب جہ + ب جہ ع + ج ع بہ + (ل ع  $\pm$  م  $\pm$  بہ) = ۰

+ ن جہ (ل ع  $\pm$  م  $\pm$  بہ + ج ع بہ) = ۰۔ (۲) میں رکھا جاسکتا ہے اور اس کا اور حائط دائرہ کا بنیادی محور ل ع  $\pm$  م  $\pm$  بہ + ن جہ = ۰ ہے۔ (۱) اور (۲) میں عہ، بہ اور جہ کے سروں کا مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ل}{ل} = \frac{م}{ب} = \frac{ن}{ج}$$

اس لئے بنیادی محور کی مساوات

$$\frac{ل}{ل} + \frac{م}{ب} + \frac{ن}{ج} = ۰$$

ہے۔ صریحاً تمام دائروں کے لئے یہ مساوات وہی ہے۔



مثال ۴۔ اُن تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو ایک ہی چار ضلعی میں کھینچے گئے ہوں ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

فرض کرو کہ اُس مثلث کو جو چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے حوالے کا مثلث قرار دیا گیا ہے۔ تب چار ضلعی کے ضلعوں کی مساواتیں ل  $\pm$  م  $\pm$  ن  $\pm$  ج = ۰ ہونگی۔ [دفعہ ۲۶۲]

مخروطیوں میں سے کسی ایک کی مساوات  $\epsilon$   $\epsilon^2$  +  $\omega^2$  +  $\phi^2$  جہ = ۰ ہوگی

[دفعہ ۲۸۶] اُن دو مماسوں کی مساوات جو نقطہ ( $\epsilon$   $\epsilon^2$  جہ) سے کھینچے گئے ہوں  $(\epsilon \epsilon^2 + \omega^2 + \phi^2$  جہ) ( $\epsilon \epsilon^2 + \omega^2 + \phi^2$  جہ) - ( $\epsilon \epsilon^2 \epsilon + \omega^2 + \phi^2$  جہ)

$$+ \phi^2$$

ہے۔ دو شرط کہ یہ خطوط عمود ہوں یہ ہے [دفعہ ۲۵۹] کہ

$$\epsilon (\omega^2 + \phi^2$$

$$+ \phi^2$$

پس مخروطی  $\epsilon$   $\epsilon^2$  +  $\omega^2$  +  $\phi^2$  جہ = ۰ کے مرتب دائرہ کی مساوات

$$\frac{\epsilon^2 + \omega^2 + \phi^2$$

$$+ \frac{\epsilon^2 + \omega^2 + \phi^2}{\phi} = ۰ \dots (۱)$$

ہوگی لیکن چونکہ مخروطی چار خطوں ل  $\pm$  م  $\pm$  ن جہ = ۰ کو مس کرتا ہے اسلئے

$$(r) \dots \dots = \frac{r_0}{b} + \frac{r_2}{c} + \frac{r_1}{e}$$

(۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ تمام مرتب دائرے ان نقطوں میں سے گزرتے ہیں جو

$$\frac{\text{ج}^2 + \text{ع}^2 + \text{ب}^2 + \text{ع}^2 + \text{ج}^2}{\text{م}} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ع}^2 + \text{ب}^2 + \text{ع}^2 + \text{ج}^2}{\text{ن}}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

مثال ۵۔ ایک خروٹی کی مسادات رقبیٰ محدود میں دی گئی ہے۔  
اگر اس کے لحاظ سے حوالہ کا مثلث خود قطبی ہو تو ثابت کرو کہ اُس کے محور مساوی

$$r + r' = (r \text{ جای } + b \text{ ای } + ج \text{ ای } + ا \text{ ای}) + \Delta n \text{ ای } =$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں اُس کے مرکز کے محدد (لابا، با، ی) ہیں۔

محفوظی علاء و اما ط ی = کا مرکز علاء و با = ط ی سے حاصل

ہوتا ہے۔ اس لیے مخروطی کی حماسی مساوات

$$L^2 \mathcal{B} + M^2 \mathcal{B} + N^2 \mathcal{B} = \dots$$

(۳۸۹) ہے۔ اس لیے اگر (لا، ما، ی)، (لام، ما، ی)، (ما، ی، ماسکے ہوں تو حذف ۲،

$$\Delta^2 (l + m + n) - (l + m + n) \Delta^2 (l + m + n)$$

۳۔ من ب ج جم ا) = ل (ل لا م با و ن ی)

مسادات

$$= \begin{vmatrix} \frac{\Delta^2}{r} + \frac{\Delta^2}{r} & - \text{ا ب ج ج} & - \text{ا ب ج ج} \\ - \text{ا ب ج ج} & \frac{\Delta^2}{r} + \frac{\Delta^2}{r} & - \text{ب ج ج ا} \\ - \text{ا ب ج ج} & - \text{ب ج ج ا} & \frac{\Delta^2}{r} + \frac{\Delta^2}{r} \end{vmatrix}$$

سے حاصل ہوتے ہیں جو

$$\Delta^2 \text{ لا با ی} + \Delta^2 \text{ ج ا ب ی} + \Delta^2 \text{ ا ب ی} = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

## تیرہویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کو ایک دے ہوئے مثلث میں کھینچا جائے تو اس کا محور اصغر مثلث کے اندرونی دائرہ کے قطر سے متجاوز نہیں ہو سکتا۔

۲۔ ایک مثلث کا رقبہ اس کے راسوں کے سہ خطی محدودوں یا رقبئی محدودوں کی رقوم میں معلوم کرو۔

۳۔ اگر چار مخروطی ایک مشترک خود مزدوج مثلث رکھتے ہوں تو کسی دو کے چار نقاط تقاطع اور دوسرے دو کے چار نقاط تقاطع ایک مخروطی پر واقع ہوں گے۔

۴۔ ثابت کرو کہ دو مخروطیوں کے مشترک تماسوں کے آٹھ نقاط تماس ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں۔

۵۔ ثابت کرو کہ دو مخروطیوں کے مشترک نقطوں پر کے آٹھ تماس

ایک مخروطی کو سس کرتے ہیں۔  
 ۶۔ نقطوں کے کوئی تین زوج جو ایک چار ضلعی کے تین تروں کے  
 موسیقی طور پر تقسیم کرتے ہیں ایک مخروطی پر ہوتے ہیں۔  
 ۷۔ دو نقطہ دائرہ کی مساوات یہ سمجھ کر معلوم کرو کہ وہ اس  
 مثلث کا حائل دائرہ ہے جو خطوں

$$ا ع - ب ب - ج ج = ۰, ب ب - ج ج - ا ع = ۰, ج ج - ا ع - ب ب = ۰$$

ب ب = ۰

سے بنا ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کی مساوات جو ا ب ج + ب ج ع  
 + ج ع ب = ۰ کے ہم مرکز ہے اور جس کا نصف قطر ہے

$$ا ب ج + ب ج ع + ج ع ب = ۰ \quad (ا ع + ب ب + ج ج) \frac{ا - ب}{ا ب ج} = ۰$$

ہے جہاں حوالے کے مثلث کے حائل دائرہ کا نصف قطر ہے۔  
 ۹۔ حائل مخروطی کے وہ قطر جو حوالے کے مثلث کے ضلعوں کے

(۳۹۰)

متوازی ہیں، یہ، یہ، یہ ہیں۔ ثابت کرو کہ اس مخروطی کی مساوات

$$\frac{ا}{ا ع} + \frac{ب}{ب ج} + \frac{ج}{ج ع} = ۰$$

ہے۔

۱۰۔ ایک مخروطی میں کھینچا ہوا مثلث ا ب ج ہے اور ا،

ب، ج پر مخروطی کے مماس علی الترتیب ب ج، ج ا، ا ب ہیں۔  
 ثابت کرو کہ ا، ب، ج ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ  
 اگر ب ج اور ب ج کا نقطہ تقاطع د ہو، ج ا اور ج ا کا نقطہ تقاطع  
 ع ہو، اور ا ب اور ا ب کا نقطہ تقاطع ف ہو تو د، ع، ف

ایک خط مستقیم میں ہوں گے۔  
 ۱۱۔ ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج سے خطوط مستقیم کھینچے

گئے ہیں جو ایک نقطہ ف میں سے گذرتے ہیں اور مقابل کے ضلعوں  
'ا' ب' ج پر ملتے ہیں۔ نیز ب' ج' ب' ج سے ک پر ملتا ہے،  
ج' ا' ج' ا سے ل پر ملتا ہے، اور ا' ب' ا' ب سے م پر ملتا ہے۔  
ثابت کرو کہ ک' ل' م ایک خط مستقیم پر ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ (۱) اگر  
ف ایک خط مستقیم پر حرکت کرے تو ک' ل' م ایک مخروطی کو جو مثلث  
ا' ب' ج میں کھینچا گیا ہو مس کرے گا، (۲) اگر ف ایک ثابت مخروطی  
جو مثلث ا' ب' ج کے گرد کھینچا گیا ہو حرکت کرے تو ک' ل' م ایک  
ثابت نقطہ میں سے گذرے گا، (۳) اگر ف ایک ثابت مخروطی پر حرکت  
کرے جو مثلث کے دو ضلعوں کو ان نقطوں پر مس کرتا ہے جہاں تیسرا ضلع  
ان سے ملتا ہے تو ک' ل' م ایک مخروطی کو لف کرے گا۔

۱۲۔ ایک مثلث کے راسوں 'ا'، 'ب'، 'ج' سے خطوط کھینچے گئے ہیں جو ایک نقطہ 'و' میں سے گزرتے ہیں اور مقابل کے ضلعوں سے 'ا'، 'ب'، 'ج' پر ملتے ہیں۔ اسی طرح نقطہ 'و' میں سے گزرتے ہوئے خطوط مقابل کے ضلعوں سے 'ا'، 'ب'، 'ج' پر ملتے ہیں۔ اگر 'ب' 'ج' اور 'ب' 'ج' کا نقطہ تقاطع 'ف' 'ج' 'ا' اور 'ج' 'ا' کا نقطہ تقاطع 'ق' 'ا' 'ب' اور 'ا' 'ب' کا نقطہ تقاطع 'س' ہو تو ثابت کرو کہ 'ا' 'ف' 'ب' 'ق' 'ج' 'س' ایک نقطہ سے پر ملیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر 'ا'، 'ب'، 'ج' میں سے گزرنے والے ایک ثابت مخروطی پر 'و' کو کوئی دو نقطے ہوں تو نقطہ 'س' ثابت ہوگا۔

۱۳۔ مکانی  $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} =$  کا ماسکہ اور مرتب

۱۴۔ مکانی  $\epsilon$  لاء  $\omega$  اور  $\mu$  کی  $\epsilon = 0$  کا ماسک اور مرتب معلوم کرو۔ معلوم کرو۔

۱۵۔ ایک دے ہوئے چار ضلعی میں مخروطی کھینچ گئے ہیں اور ان مخروطیوں کے حماس ایک ثابت خط کے متوازی کھینچ گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان حماسوں کے نقاط تماس کا طریق ایک کعبی ہے۔ نیز چار ضلعی سے

متعلق وہ اہم نقطہ معلوم کر جن میں سے کبھی گزرتا ہے۔

۱۶۔ ایک ناقص کو ایک مثلث میں کھینچا گیا ہے اور ناقص کا

مرکز حائط دائرہ کے مرکز پر ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا محور اعظم اور محور اصغر  
 علی الترتیب  $ص + ف$  اور  $ص - ف$  ہیں جہاں  $ص$  حائط دائرہ کا نصف  
 قطر ہے اور  $ف$  مرکز اور مرکز عمودی کا درمیانی فاصلہ ہے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ وہ مخروطی جو ایک مثلث  $ا ب ج$  کے گرد کھینچا

گیا ہو ناقص ہو گا اگر مرکز مثلث  $د ع ف$  کے اندر واقع ہو یا اُن زاویوں

کے اندر جو مثلث  $د ع ف$  کے زاویوں کے ٹھیک مقابل ہیں جہاں  $د$

$ع$ ،  $ف$ ، مثلث  $ا ب ج$  کے ضلعوں کے وسطی نقطے ہیں۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ اُن مکافیوں کے ماسکوں کا طریق جن کے لحاظ

حوالے کا مثلث خود قطبی ہے نو نقطی دائرہ ہے۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ اُن تمام مخروطیوں کے ماسکوں کا طریق جو چار

خطوط  $ل ع \pm م \pm ن$  جہ = کو مس کرتے ہیں کبھی

$$\frac{ف^۱}{ل ع + م + ن جہ} + \frac{ف^۲}{ل ع - م - ن جہ} + \frac{ف^۳}{ل ع + م - ن جہ} =$$

$$\frac{ف^۴}{ل ع - م + ن جہ} +$$

ہے جہاں  $ف = ل + م + ن$ ،  $ف^۱ = ل + م - ن$ ،  $ف^۲ = ل - م + ن$ ،  $ف^۳ = ل - م - ن$ ،  $ف^۴ = ل + م + ن$ ۔

۲۰۔ اگر ایک مخروطی کو ایک دئے ہوئے مثلث میں کھینچا جائے

اور اس کا محور اعظم ثابت نقطہ (ف، گ) میں سے گزرے تو اس کے

ماسکہ کا طریق کبھی

$$ف ع (ج^۱ - ج^۲) + گ ب (ج^۱ - ج^۲) + ج ع (ج^۱ - ج^۲) = ۰$$

۲۱۔ اگر ایک مخروطی کو ایک مثلث میں کھینچا جائے اور اس کا مرکز ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے تو اس کے ایک کعبی پر جو مثلث کو حائل کرتا ہے واقع ہونگے۔

۲۲۔ اُن قائم زائدوں کے مرکوزوں کا طریق جن کے لحاظ سے حوالے کا مثلث خود مزدوج ہو حائل دائرہ ہوگا۔

۲۳۔ اُن تمام قائم زائدوں کے مرکوزوں کا طریق جو حوالے کے مثلث میں کھینچے گئے ہوں خود مزدوج دائرہ ہوگا۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کا نو نقطی دائرہ اندرونی دائرہ کو اور ہر جانبی دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۲۵۔ نو نقطی دائرہ کے اُن نقطوں پر کے مماس جہاں وہ اندرونی اور جانبی دائروں کو مس کرتا ہے ایک چار ضلعی بناتے ہیں جس کا ہر وتر مثلث کے ایک راس میں سے گذرتا ہے اور وہ خطوط جو ابتدائی مثلث کے راسوں کو وتروں سے بنے ہوئے مثلث کے متناظر راسوں سے ملاتے ہیں سب کے سب نو نقطی دائرہ اور حائل دائرہ کے بنیادی محور کے متوازی ہوتے ہیں۔

۲۶۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے قطبی علی الترتیب 'ب'، 'ج'، 'ا'، 'ا'، 'ب'، 'ج' ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'ج'، 'ب'، 'ا' ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۲۷۔ اگر ایک مساوی النہیاء وزر ایک مثلث 'ا'، 'ب'، 'ج' کے ضلعوں کے نقاط وسطی میں سے گذرے اور ضلعوں 'ب'، 'ج'، 'ا'، 'ا'، 'ب' کو مکرر 'ع'، 'ب'، 'ج' پر قطع کرے تو 'ع'، 'ب'، 'ج'، 'ع'، 'ب'، 'ج'، 'ع'، 'ب'، 'ج' کے حائل دائرہ پر ایک نقطہ پر ملیں گے۔

۲۸۔ دو دئے ہوئے مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے نقطوں کے قطبی معلوم کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان تمام نقطوں کے تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے جو دئے ہوئے مخروطیوں کے

مشترک خود مزدوج مثلث کو قاطع کرتا ہے ۔

۲۹۔ دو مخروطی دو ہر اتاس رکھتے ہیں۔ ان میں سے ایک مخروطی کے حماس کھینچے گئے ہیں اور ان حماسوں کے قطب دوسرے مخروطی کے لحاظ سے معلوم کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان قطبوں کا طریقی ایک مخروطی ہے جو دونوں مخروطیوں کے ساتھ ان کے مشترک نقطوں پر دو ہر اتاس رکھتا ہے۔

۳۰۔ ایک مخروطی میں دو مثلث کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے چھ ضلع دو سرے مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۳۱۔ دو مثلث ایک مخروطی کے لحاظ سے خود قلبی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے چھ راس ایک دوسرے مخروطی پر ہیں اور ان کے چھ ضلع ایک تیسرے مخروطی کو لمس کرتے ہیں۔

۳۲۔ اگر ایک مثلث ایسا کھینچا جاسکے کہ وہ ایک دے ہوئے مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہو اور اس کے راس دوسرے دے ہوئے مخروطی واقع ہوں تو ایسے مثلث تعداد میں لامتناہی کھینچے جاسکتے ہیں۔

۳۳۔ متشابہ مخروطیوں کا ایک نظام ہے جو ایک مشترک خود مزدوج مثلث رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے مرکز جو تھے درجہ کے ایک منحنی پر واقع ہیں جو لاتناہی پر کے دائری نقطوں میں سے گزرتا ہے اور مثلث کے اس اس کے دو ہرے نقطے ہیں۔

۳۴۔ اگر ا ب ج ، ا ب ج ، ا ب ج ، ا ب ج ایسے نقطے ہوں کہ  
ا ب ج ایک نقطہ پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ جہ خطوط مستقیم  
ا ب ج ، ا ب ج ، ا ب ج ، ا ب ج ایک مخروطی کو  
سنبھالتے ہیں۔

۳۵۔ ایک مثلث میں ایک ایسا مخروطی کھینچا گیا ہے کہ نقاط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک کعبی منحنی ہے جس کے مقابل مثلث کے ضلعوں پر عمود ہیں۔



۳۶۔ ایک پار ضلعی  $\Delta$  ج د کو ایک مخروطی میں کھینچا گیا ہے اور  $ع_۱ ع_۲ ع_۳ ع_۴$  ان عمودوں کے طول ہیں جو راسوں  $\Delta$  ج د سے مخروطی کے کسی دوسرے ماس پر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ نسبت  $\frac{ع_۱ ع_۲}{ع_۳ ع_۴}$  مستقل ہے۔

۳۷۔ کسی مخروطی کے لحاظ سے ایک مثلث کے راسوں  $\Delta$  ج د کے قطبی متقابل کے ضلعوں سے نقطوں  $\Delta$  ج د پر پڑے ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر  $\Delta$  ج د کے قطر مانکر دائرے کھینچے جائیں تو یہ دائرے ایک مشترک بنیادی محور رکھیں گے۔

۳۸۔ ایک مکائی ایک مثلث کے ایک ضلع کو اس کے وسطی نقطہ پر منس کرتا ہے اور دوسرے دو محدودہ ضلعوں کو بھی منس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ عمود جو مثلث کے راسوں سے مخروطی کے کسی ماس پر کھینچے گئے ہوں سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

۳۹۔ ثابت کرو کہ حائط دائرہ کی ماسی مسادات  $\Delta$  ف

+ ب ا ق + ج ا ر = ۰ ہے۔ پس ثابت کرو کہ نقطہ  $\Delta$  ف کی ماسی مسادات

$$1 \mid \overline{ق + ر + ب} \mid \overline{ا + ف + ج} \mid \overline{ا + ق} = ۰$$

ہے۔

۴۰۔ ایک دے ہوئے مثلث میں ایک مخروطی کھینچا گیا ہے جس کے محوروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے، ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۴۱۔ ان تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو ایک ہی مثلث میں

کھینچے گئے ہوں اس دائرے سے علی القواہم قطع ہوتے ہیں جس کے لحاظ سے حوالے کا مثلث خود قطبی ہے۔

۴۲۔ وہ دائرے جو ایک کاربل چار ضلعی کے وتروں پر ان کو قطر مانکر کھینچے گئے ہوں اس دائرے سے علی القواہم قطع ہوتے ہیں جو دایروں سے بنے ہوئے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

۴۳۔ اگر تین مخروطی ایک ہی چار ضلعی کو حاطط کریں تو ثابت کرو کہ کسی دو کا مشترک تماس تیسرے سے موسیقی طور پر منقطع ہوتا ہے۔

۴۴۔ اگر تین مخروطی ایک ہی چار ضلعی میں کھینچے گئے ہوں تو ثابت کرو کہ ان میں سے دو کے ایک مشترک نقطہ پر ان کے تماس اور اس نقطہ سے تیسرے کے تماس ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۴۵۔ ایک نقطہ سے دو مساوی دائروں کے تماس کھینچے گئے

(۳۹۴)

ہیں جو ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے جو ایک ناقص ہوگا اگر دائرے حادہ زاویہ پر متقاطع ہوں اور دو متوازی خطوط مستقیم ہوگا اگر دائرے علی القواہم متقاطع ہوں۔

۴۶۔ ایک مثلث کے اس ایک دے ہوئے مثلث کے ضلعوں پر ہیں اور اس کے دو ضلع ثابت نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرے ضلع ایک مخروطی کو لف کرے گا۔

۴۷۔ اگر ایک مخروطی تین ثابت خطوط مستقیم کو مس کرے اور ایک دے ہوئے نقطہ ف میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ ایک ثابت خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک مخروطی ہے جو ف کے تمام محلوں کے لئے تین ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے۔

۴۸۔ ایک مثلث ا ب ج کے اندر دو نقطے و و لئے گئے ہیں۔ مثلث کے راسوں اور و و میں سے گزرتے ہوئے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو ضلعوں پر علی الترتیب نقطوں کے زوج لا اور کا، ما اور ما، مے اور مے متعین کرتے ہیں۔ مثلثوں لا ما مے، لا ما مے

کے متناظر ضلع نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ چھ نقطے 'لا'، 'ما'، 'ے'، 'لا'، 'ما'، 'ے' ایک مخروطی پر واقع ہیں جس کے لحاظ سے 'ف'، 'ق'، 'س' ایک خود قطبی مثلث ہے۔

$$۴۹ - \text{اگر مخروطی } \epsilon \text{ لا} + \omega \text{ ما} + \tau \text{ ط} \text{ ی} + ۲ \text{ ع} \text{ ی} + ۲ \text{ و} \text{ لا} \text{ ی}$$

$$= ۲ \text{ ط} \text{ ما} \text{ لا} = ۰$$

مثلث 'ا'، 'ب'، 'ج' کے ضلعوں کو نقطوں کے تین زوجوں میں قطع کرے اور ان نقطوں کو مقابل کے راسوں سے ملایا جائے تو یہ چھ خطوط مستقیم مخروطی

$$\epsilon \text{ لا} + \omega \text{ ما} + \tau \text{ ط} \text{ ی} - ۲ \text{ ع} \text{ و} \text{ ط} \text{ ما} \text{ ی} - ۲ \text{ و} \text{ ط} \text{ ع} \text{ ی} \text{ لا}$$

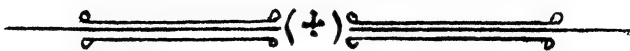
$$= ۲ \text{ ط} \text{ و} \text{ لا} \text{ ما} = ۰$$

کو مس کریں گے۔

۵۰۔ بنیادی مثلث کے راسوں سے (ع و ط ع و ط) (لا ما ی) = کے مماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں اور ہر زوج مقابل کے ضلعوں کے ساتھ نقطوں کا ایک زوج متعین کرتا ہے۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جس پر یہ چھ نقطے واقع ہیں اور ثابت کرو کہ مخروطی

$$\sqrt{\text{لا و ط} - \epsilon \text{ ع}} + \sqrt{\text{ما ط ع} - \omega \text{ و}} + \sqrt{\text{ی ع و} - \tau \text{ ط}} = ۰$$

اور اوپر کے دو مخروطی ایک مشترک اندرونی چار ضلعی رکھتے ہیں۔



# چودہواں باب

## متکافی قطبی ظل

۵۔ ۳۔ اگر ایک شکل ایک سُتوی میں متعدد نقطوں اور خطوطِ مستقیم پر مشتمل ہو اور اگر ہم ایک ثابت مخروطی ج کے لحاظ سے ان نقطوں کے قطبی اور ان خطوں کے قطب لیں تو ایک دوسری شکل حاصل ہوگی جس کو امدادی مخروطی ج کے لحاظ سے اول الذکر کا قطبی متکافی کہا جائے گا۔

جب ایک شکل کا ایک نقطہ اور متکافی شکل کا ایک خطِ امدادی مخروطی ج کے لحاظ سے قطب اور قطبی ہوتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ وہ ایک دوسرے کے متناظر ہیں۔

اگر ایک شکل میں ایک منحنی ہو تو وہ خطوط جو اس کے مختلف نقطوں کے متناظر ہیں سب کے سب کسی منحنی میں کو مس کریں گے۔ فرض کرو کہ اس کے دو نقطوں 'ف' و 'ق' کے متناظر خطوط پر ملتے ہیں، تو 'ف' خط 'ق' کا قطب بلحاظ ج ہے یعنی خط 'ف' و 'ق' نقطہ 'ت' کے متناظر ہے۔ اب اگر نقطہ 'ق' 'ف' کی جہاں حرکت کر کے بالآخر اس پر منطبق ہو جائے تو اس کے متناظر دو محاس بھی بالآخر ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے اور ان کا نقطہ تقاطع 'ت'

بالآخر منحنی میں پر ہوگا اور اُس خط کے نقطہ تماس میں منطبق ہوگا جو نقطہ  
ف کے متناظر ہے۔ پس میں کا ایک تماس منحنی میں کے ایک نقطہ  
کے متناظر ہوتا ہے عین ویسے ہی جیسے میں کا کوئی تماس میں کے  
ایک نقطہ کے متناظر ہوتا ہے۔ اس لیے میں میں سے ٹھیک اُسی  
طرح نکوین پاتا ہے جس طرح میں میں سے چنانچہ ہمیں وہی منحنی میں  
حاصل ہوگا خواہ ہم میں کے مختلف نقطوں کے قطبوں کا لفاف  
لیں یا میں کے مختلف تماسوں کے قطبوں کا طریق لیں۔

۳۰۶۔ اگر کوئی خط 'ل' منحنی میں کو متعدد نقطوں 'ف' 'ق' 'س' ... (۳۹۶)  
پر قطع کرے تو نقطوں 'ف' 'ق' 'س' ... کے متناظر میں کے  
تماس حاصل ہوں گے اور یہ تماس سب کے سب ایک نقطے میں سے  
گذریں گے یعنی اُس نقطہ میں سے جو امدادی مخروطی کے لحاظ سے 'ل'  
کا قطب ہے۔ اس لیے ایک نقطہ میں سے میں کے اتنے ہی تماس  
کھینچے جاسکتے ہیں جتنے نقطے میں پر ایک ہی خط مستقیم میں ہوتے ہیں۔  
یعنی میں کی جماعت (class) دفعہ ۲۳۸ میں کے درجہ کے  
مساوی ہوتی ہے اور میں کا درجہ میں کی جماعت کے مساوی ہوتا ہے۔  
بالخصوص اگر میں ایک مخروطی ہو تو وہ دوسرے درجہ کا اور  
دوسری جماعت کا ہوگا۔ اس لیے متکافی منحنی دوسری جماعت کا  
اور دوسرے درجہ کا ہوگا اور اس لیے وہ بھی ایک مخروطی ہے۔

۳۰۷۔ ایک مخروطی کا قطبی متکافی دوسرے مخروطی کے

لحاظ سے معلوم کرنا۔  
فرض کرو کہ ان مخروطیوں کی مساواتیں ان کے مشترک  
خود قطبی مثلث کے حوالے سے

$$\text{میں} = \text{ع}^۲ + \text{و}^۲ + \text{ط}^۲ = ۰$$

اور  $s_2 \equiv e_2 + w_2 + p_2 \text{ جہ } = 0$

ہیں۔  $s_2$  پر کے کسی نقطہ (عہ، یہ، جہ) کا قطبی لمحاظ  $s_2$  کے  
 $e_2 + w_2 + p_2 \text{ جہ } = 0$

ہے۔ اس کا لاف شرط  $e_2 + w_2 + p_2 \text{ جہ } = 0$  کے ساتھ

$$= \frac{e_2}{e_1} + \frac{w_2}{w_1} + \frac{p_2}{p_1} \text{ جہ } = 0$$

ہے۔ مخروطی ل  $e_2 + w_2 + p_2 \text{ جہ } = 0$  کے لحاظ سے  $s_2$  کا  
 متکافی

$$= \frac{e_2}{e_1} + \frac{w_2}{w_1} + \frac{p_2}{p_1} \text{ جہ } = 0$$

ہے۔ یہ مساوات مخروطی  $s_2$  کو تعبیر کرے گی اگر

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

پس مخروطی  $s_2$  اور  $s_1$  مخروطیوں

$$= \overline{e_2} \pm \overline{w_2} + \overline{p_2} \text{ جہ } = 0$$

میں سے کسی ایک کے لحاظ سے ایک دوسرے کے متکافی ہیں۔

۳۰۸۔ کسی دئے ہوئے مسئلہ سے جو نقطوں اور خطوں کے محلو  
 متعلق ہو ایک دوسرا مسئلہ متکافی قطبیوں کے طریقہ سے ماخوذ کیا

جاسکتا ہے جس میں نقطوں کی بجائے خطوط مستقیم اور خطوط مستقیم کی بجائے نقطے ہونگے۔

تناظر کی سادہ ترین صورتیں حسب ذیل ہیں:

(۱) ایک شکل کے نقطے شکافی شکل میں خطوط مستقیم میں شکافی ہوتے ہیں۔

(۲) دو نقطوں کو ملانے والا خط، متناظر خطوں کے نقطہ تقاطع میں شکافی ہوتا ہے۔

(۳) کسی منحنی کا مماس، شکافی شکل کے متناظر منحنی پر ایک نقطہ میں شکافی ہوتا ہے۔

(۴) مماس کا نقطہ مماس، متناظر نقطہ پر کے مماس میں شکافی ہوتا ہے۔

(۵) اگر دو منحنی مس کریں یعنی اگر دو منطبق نقطے مشترک ہوں تو شکافی منحنیوں میں دو منطبق مماس مشترک ہوں گے اور اس لیے وہ (شکافی منحنی) ایک دوسرے کو مس کریں گے۔

(۶) وہ وتر جو ایک منحنی کے دو نقطوں کو ملاتا ہے شکافی منحنی کے متناظر مماسوں کے نقطہ تقاطع میں شکافی ہوتا ہے۔

(۷) وہ خط جو دو مماسوں کے نقطہ تقاطع کو ملاتا ہے متناظر نقطوں پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع میں شکافی ہوتا ہے۔

(۸) چونکہ امدادی مخروطی کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط کا قطب لانتنا ہی پر ہوتا ہے اس لیے شکافی منحنی پر لانتنا ہی پر کے نقطے ابتدائی منحنی کے ان مماسوں کے متناظر ہونگے جو امدادی مخروطی کے مرکز سے کھینچے گئے ہوں۔ پس ایک مخروطی کا شکافی قطع زائد، شکافی، یا ناقص ہو گا بموجب اسکے کہ

امدادی مخروطی سے اس کے مماس حقیقی، منطبق، یا خیالی ہوں یعنی بموجب اسکے کہ امدادی مخروطی کا مرکز منحنی کے

باہر، یا اس پر، یا اس کے اندر ہو۔

## حسب ذیل مثالیں متکافی مسلوں کی ہیں:-

(۱) اگر دو مثلثوں کے راس ایک مخروطی پر ہوں تو ان کے چھ ضلع دوسرے مخروطی کو مس کریں گے۔

(۱) اگر دو مثلثوں کے راس ایک مخروطی پر ہوں تو ان کے چھ ضلع دوسرے مخروطی کو مس کریں گے۔

(۲) اگر ایک مخروطی میں ایک مس در کھینچا جائے تو اس کے متقابلہ ضلعوں کے تین نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہوں گے۔

(۲) اگر ایک مخروطی کے گرد ایک مس در کھینچا جائے تو اس کے متقابلہ راسوں کو ملائے والے تین خطوط ایک نقطہ پر ملینگے۔

(برایانگان کا مسئلہ)

(پراسککل کا مسئلہ)

(۳) اگر ایک مثلث کے تین راس ایک مخروطی پر واقع ہوں اور اس کے ضلعوں میں سے دو ایک دوسرے مخروطی کو مس کریں تو تیسرے ضلع کا لفاف ایک مخروطی ہوگا۔

(۳) اگر ایک مثلث کے تین راس ایک مخروطی پر واقع ہوں اور اس کے ضلعوں میں سے دو ایک دوسرے مخروطی کو مس کریں تو تیسرے ضلع کا لفاف ایک مخروطی ہوگا۔

(۴) اگر ایک مثلث کے راس ایک مخروطی پر واقع ہوں تو وہ تین نقاط تقاطع جو ایک ضلع اور متقابلہ راس پر کے تماس کے تقاطع سے

(۴) اگر ایک مثلث کے ضلع ایک مخروطی کو مس کریں تو وہ تین خطوط جو ایک ایک راس کو مقابلہ کے ضلع کے



نقطہ تماس سے ملاتے ہیں  
ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔  
(۵) چار دئے ہوئے نقطوں  
میں سے گزرنے والے  
مخروطیوں کے ایک  
نظام کے لحاظ سے ایک  
دئے ہوئے نقطہ کے قطبی  
سب کے سب ایک ثابت  
نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔  
(۶) چار ثابت نقطوں میں سے  
گزرنے والے مخروطیوں  
کے ایک نظام کے لحاظ  
سے ایک دئے ہوئے  
خط مستقیم کے قطب کا  
موقع ایک مخروطی ہوتا  
ہے۔

حاصل ہوتے ہیں ایک خط پرواقع  
ہوتے ہیں۔  
(۵) چار دئے ہوئے خطوط مستقیم کو مس  
کرنے والے مخروطیوں کے  
ایک نظام کے لحاظ سے ایک  
دئے ہوئے خط مستقیم کے قطب  
سب کے سب ایک خط مستقیم  
پرواقع ہوتے ہیں۔

(۶) چار ثابت خطوں کو مس کرنے والے  
مخروطیوں کے ایک نظام کے  
لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ  
کے قطبی کا لفاف ایک مخروطی  
ہوتا ہے۔

۳۰۹۔ اب ہم ان نتیجوں پر غور کریں گے جو ایک دائرہ کے  
لحاظ سے مکافات کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔  
ہم جانتے ہیں کہ ایک دائرہ کے مرکز اور کسی نقطہ  $F$  کو  
ملانے والا خط دائرہ کے لحاظ سے  $F$  کے قطبی پر عمود ہوتا ہے۔  
اس لیے اگر  $F$ ،  $Q$  کوئی دو نقطے ہوں اور ایک دائرہ کے  
لحاظ سے ان کے قطبی معلوم کئے جائیں تو ان قطبیوں کا درمیانی  
زاویہ اس زاویہ کے مساوی ہوگا جو  $F$  کے محاذی دائرہ کے  
مرکز پر بنتا ہے۔ اس مسئلہ کا شکافی یہ ہے کہ کسی دو خطوط مستقیم کا  
درمیانی زاویہ اس زاویے کے مساوی ہوتا ہے جو ان خطوط کے

قطبوں کو ملانے والے خط کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔  
 نیز ہم جانتے ہیں کہ ایک دائرہ کے مرکز سے کسی نقطہ کے اور  
 اُس کے قطبی (دائرہ کے لحاظ سے) کے فاصلے ایک دوسرے کے  
 بالعکس متناسب ہوتے ہیں۔

۳۱۔ اگر ہم ایک دائرہ کے لحاظ سے مکافات کریں تو یہ واضح  
 ہے کہ امدادی دائرہ کے نصف قطر میں کسی تبدیلی سے متکافی منحنی کی  
 تشبیہ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی بلکہ صرف اس کے جثہ میں تبدیلی  
 ہوگی۔ اب چونکہ متکافی منحنی کے خطوط کی مطلق مقداروں سے بالعموم  
 واسطہ نہیں رہتا اس لیے صرف امدادی دائرہ کے مرکز کو معلوم کرینکی  
 ضرورت ہوگی۔ اس لیے یہ کہنے کی بجائے کہ ایک دائرہ کے لحاظ  
 سے جس کا مرکز وہ ہے مکافات کی گئی ہے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ایک  
 نقطہ کے لحاظ سے مکافات کی گئی ہے۔

۳۱۱۔ اگر کسی محزوطی کو ایک نقطہ کے لحاظ سے متکافی کیا جائے  
 تو متکافی منحنی کے وہ نقطے جو ابتدائی منحنی کے ان مماسوں کے متناظر  
 ہیں جو و میں سے گزرتے ہیں لامتناہی فاصلہ پر ہونے چاہئیں اس لیے  
 متکافی منحنی پر کے ان نقطوں کی سمتیں جو لاتناہی پڑیں ان مماسوں  
 پر عمود ہیں جو و سے ابتدائی منحنی کے کھینچے گئے ہیں۔ اور  
 اس لیے متکافی منحنی کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ  
 کا متکم ہو تا ہے جو و سے کھینچے ہوئے ابتدائی منحنی کے مماسوں کے درمیان ہے۔  
 بالخصوص اگر و سے ابتدائی منحنی کے مماس علی القوائم ہوں تو  
 متکافی منحنی قائم زاویہ ہوگا۔ نیز متکافی محزوطی کے محور اُس کے متقاربوں کے  
 درمیانی زاویوں کی تصنیف کرتے ہیں۔ اس لیے محور اُن زاویوں کے

ناصریوں کے متوازی ہیں جو وہ سے کھینچے ہوئے ابتدائی منحنی کے مماسوں کے درمیان ہیں۔

ابتدائی محزوطی کے لاتناہی پر کے نقطوں کے جواب میں متکافی منحنی کے وہ مماس حاصل ہوتے ہیں جو مبداء میں سے گزرتے ہیں۔ پس متکافی محزوطی کے وہ مماس جو مبداء سے کھینچے گئے ہوں ان خطوں کی سمتوں پر عمود ہوں گے جو مبداء سے ابتدائی منحنی کے لاتناہی پر کے نقطوں کی جانب کھینچے گئے ہوں۔ اسلئے ابتدائی محزوطی کے متقابلوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کا متمم ہوتا ہے جو مبداء سے کھینچے ہوئے متکافی منحنی کے مماسوں کے درمیان ہے۔

بالخصوص اگر ایک قائم زاؤ کو کسی نقطہ کے لحاظ سے متکافی کیا جائے تو وہ سے متکافی منحنی کے مماس ایک دوسرے کے علی القیام ہوں گے، یہ الفاظ دیگر و، متکافی محزوطی کے مرتب دائرہ پر ایک نقطہ ہے۔

۳۱۲۔ مبداء کا متکافی، لاتناہی پر کا خط ہوتا ہے اور اس لیے مبداء کے قطبی کا متکافی، لاتناہی پر کے خط کا قطب ہے۔ یعنی مبداء کا قطبی متکافی منحنی کے مرکز میں متکافی ہوتا ہے۔

مکانات کی حسب ذیل مثالیں اہم ہیں:

۱۔ وہ تمام محزوطی جو ایک مثلث کو حاطط کرتے ہیں اور اس کے مرکز عمودی میں سے گزرتے ہیں قائم زاؤ ہوں گے۔ اگر مرکز عمودی کے لحاظ سے مکانات کی جائے تو ایک

دوسرا مثلث حاصل ہوگا جس کا مرکز عمودی ہوگا۔  
 قائم زائد شکافی ہو جائیں گے کیونکہ وہ سب وہیں سے گزرتے  
 ہیں۔ اور چونکہ ان مخروطیوں میں سے کسی ایک کے لاتنا ہی پر کے  
 نقطے عمودی سمتوں میں ہوتے ہیں اس لیے ان مکافیوں میں سے  
 کسی ایک کے وہ تماس جو دسے کھینچے گئے ہوں علی القوائم ہوں گے  
 اور اس لیے نقطہ و ہر مکافی کے مرتب بد ہے۔  
 پس شکافی مسئلہ حسب ذیل ہے:

ان تمام مکافیوں کے مرتب جو ایک مثلث کے تین ضلعوں  
 کو مس کرتے ہیں مثلث کے مرکز عمودی میں سے گزرتے ہیں۔  
 ۲۔ اگر چار دے ہوئے نقطوں میں سے گزرنیوالے  
 مخروطیوں میں سے دو قائم زائد ہوں تو یہ تمام مخروطی قائم زائد  
 ہوں گے۔

اگر اس مسئلہ کی مکافات کسی نقطہ و کے لحاظ سے کیجائے تو  
 حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوگا:

اگر چار دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرنے والے  
 مخروطیوں میں سے دو کے مرتب دائرے ایک نقطہ و  
 میں سے گذریں تو ان تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے و میں  
 سے گذریں گے۔

یعنی چار دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرنے والے



$$\frac{r}{1} = \frac{r}{1} + 1 = \frac{r}{1} + \frac{1}{1} = \frac{r+1}{1}$$

ہے۔ یہ ایک مخروطی کی مساوات ہے جس کا ماسکہ و نیم وتر خاص

$\frac{r}{1}$ ، اور خروج مرکز  $\frac{1}{1}$  ہے۔ اس مخروطی کا مرتب وہ خط ہے جس کی مساوات

$$\frac{r}{1} = \frac{r}{1} + 1 = \frac{r+1}{1}$$

ہے۔

پس متکافی منحنی کا مرتب ابتدائی منحنی کے مرکز کا قطبی ہے۔

خروج مرکز کی محصلہ بالا قیمت سے یہ واضح ہے کہ متکافی منحنی ایک ناقص ہوگا اگر نقطہ و دائرہ ج کے اندر ہو، ایک زائد ہوگا اگر نقطہ و دائرہ ج کے باہر واقع ہو، اور ایک مکافی ہوگا اگر و دائرہ ج کے محیط پر ہو۔

مثال ۱۔ مخروطی کے مماس جو کسی نقطے سے کھینچے گئے

ہوں ماسکہ پر مساوی زاوے بناتے ہیں۔

اس ماسکہ کے لحاظ سے مکافات عمل میں لاؤ۔ تب مخروطی کے دو

ماسوں کے متناظر دو نقطے ایک دائرہ پر حاصل ہوں گے، اور ان ماسوں کے نقطہ تقاطع کے متناظر ایک خط حاصل ہوگا جو دائرہ پر کے ان دو نقطوں کو ملاتا ہے، نیز مخروطی کے ان ماسوں کے نقاط تماس کے متناظر وہ مماس حاصل ہوں گے جو دائرہ پر کے نقطوں پر ماس کے کھینچے گئے ہوں۔ لیکن

کسی دو نقطوں کے محاذی مخروطی کے ماسکے پر جو زاویہ بنتا ہے وہ اس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ان نقطوں کے متناظر نقطوں کے درمیان بنتا ہے پس شکافی مسئلہ حسب ذیل ہے -

وہ خط جو ایک دائرہ پر کے دو نقطوں کو ملاتا ہے ان نقطوں پر کے تماسوں کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے۔  
مثال ۲۔ اگر مخروطی کا ایک وتر ایک ثابت نقطہ پر قائمہ زاویہ بنائے تو اس وتر کا لفافہ ایک مخروطی ہوگا جسکا ایک ماسکہ و ہوگا اور متناظر مرتب وہ خط ہوگا جو ابتدائی مخروطی کے لحاظ سے و کا قطبی ہے۔

و کے لحاظ سے مکافات کرو تو یہ مسئلہ حسب ذیل ہو جاتا ہے:  
اگر ایک مخروطی کے تماس ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بنائیں تو ان تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ہم مرکز دائرہ ہوگا۔

مثال ۳۔ اگر دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہو تو ان کے مشترک وتروں میں سے دو ان کے مرتبوں نقطہ تقاطع میں سے گزریں گے۔

مشترک ماسکہ کے لحاظ سے مکافات کرو تو مسئلہ حسب ذیل ہوتا ہے:  
دو دائروں کے مشترک تماسوں کے نقاط تقاطع میں سے دو اس خط پر ہوتے ہیں جو دائروں کے مرکوزوں کو ملاتا ہے۔

مثال ۴۔ ایک مثلث کو ایک مکانی کے گرد کھینچا گیا ہے

اس مثلث کا مرکز عمودی مرتب پر ہوگا۔ مرکز عمودی کے لحاظ سے مکافات کرو تو حاصل ہوگا:

وہ محروطی جو ایک مثلث کو حاط کرتا ہے اور اس کے مرکز عمودی میں سے گذرتا ہے ایک قائم زاہد ہوتا ہے۔

آٹھویں باب میں مندرجہ متعدد مثالیں مکافات کے ذریعہ ثابت کی جاسکتی ہیں، مثلاً ۲۳ کا متکافی، مشترک ماسکہ کے لحاظ سے حسبِ ثیل ہے: مساوی نصف قطروں کے دائرے کھینچے گئے ہیں جن کے مرکز ایک دوسرے دائرہ پر ہیں۔

ثابت کرو کہ یہ سب دائرے دو ثابت دائروں کو مس کرتے ہیں جن کے نصف قطر متحرک دائرہ اور دوسرے دائرہ کے نصف قطروں کا علی الترتیب مجموعہ اور فرق ہیں اور جو دوسرے دائرہ کے ہم مرکز ہیں۔ ۳۱۲۔ اگر دائروں کا ایک ایسا نظام ہو جن کا بنیادی محور وہی ہو تو ہم ان دائروں کو ہم ماسکی محروطیوں کے ایک نظام میں متکافی کر سکتے ہیں۔

اگر کسی نقطہ کے لحاظ سے مکافات کی جائے تو محروطیوں کا ایک نظام حاصل ہوگا جن کا ایک ماسکہ و یہ ہوگا اور کسی محروطی کا مرکز [دفعہ ۳۱۲] متناظر دائرہ کے لحاظ سے و جسے قطبی کا متکافی ہوگا۔ اب اس نظام کے ”دو انتہائی نقطوں“ میں سے ایک ایسا ہے کہ نظام کے کسی دائرہ کے لحاظ سے اس کا قطبی ایک ثابت خط مستقیم ہے یعنی وہ خط جو دوسرے انتہائی نقطہ میں سے گذرتا ہے اور بنیادی محور کے متوازی ہے۔ پس اگر دائروں کو ایک انتہائی نقطہ کے لحاظ سے متکافی کیا جائے تو تمام متکافیوں کا مرکز ایک ہی ہوگا اور اگر یہ تمام متکافی ایک مشترک مرکز اور ایک مشترک ماسکہ رکھتے ہوں تو وہ ہم ماسکی ہوں گے۔ نیز چونکہ بنیادی محور ایک انتہائی نقطہ کے قطبی کے



متوازی ہے اور انتہائی نقطہ اور اس کے قطبی کے وسط میں واقع ہے اس لیے اس انتہائی نقطہ کے لحاظ سے بنیادی محور کا منکافی اس خط پر ہے جو منکافی محروطیوں کے ماسکہ اور مرکز میں سے گذرتا ہے اور وہ ماسکہ سے مرکزی بہ نسبت دو چند فاصلہ پر واقع ہے، پس جب ہم محروطیوں کے ایک نظام کو ایک انتہائی نقطہ کے لحاظ سے منکافی کرتے ہیں تو بنیادی محور ہم ماسکی محروطیوں کے دوسرے ماسکہ میں منکافی ہوتا ہے۔

حسب ذیل مسئلے منکافی ہیں:

(۱) دو ہم ماسکی محروطیوں کے (۱) دو دائروں کے ایک مشترک کسی مشترک نقطہ پر کے تماس کے نقاط تماس کے محاذی تماس علی القوائم ہوتے ہیں۔ ایک انتہائی نقطہ پر قائمہ زاویہ بنتا ہے۔

(۲) اگر دو خطوط دو ہم ماسکی محروطیوں میں سے ہر ایک کے مس کریں اور ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو ان خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہوگا۔

(۲) اگر دو دائروں میں سے ہر ایک کے ایک نقطہ لیا گیا ہو اور ان دو نقطوں کے محاذی ایک انتہائی نقطہ پر قائمہ زاویہ بنے تو ان نقطوں کو ملائیو الے خط کا لفاف ایک محروطی ہوگا جس کے ماسکوں میں سے ایک ماسکہ اس انتہائی نقطہ پر ہوگا۔

(۳) اگر کسی نقطہ سے دو ہم ماسکی محروطیوں کے تماسوں کے دو زوج ف و ف اور ق ق گھنیے جائیں تو ف اور ق کا درمیانی زاویہ اگر کوئی خط مستقیم دو دائروں کو نقطوں ف و ف اور ق ق پر قطع کرے تو ایک انتہائی نقطہ پر ف ق اور ف ق کے محاذی مساوی زاویے بنیں گے۔

فَ اور ق کے درمیانی

زاویہ کے مساوی ہوگا۔

(۴) اگر کسی نقطہ سے دو ہم تنگی

محرومیوں کے چار حماس

فَ اور ق کے

کھینچ جائیں اور ف کے

نقطہ تماس کو ق کے

نقاطہ تماس کے ساتھ ملایا

جائے تو یہ خطوط حماس ف

کے ساتھ مساوی زاویے

بنائینگے۔ [دفعہ ۲۳۰]۔

(۴) اگر کوئی خط مستقیم دو دائروں کو نقطوں

فَ اور ق کے

پر کا حماس ق

اور ق کے حماسوں سے ق

ق پر ملے تو ایک انتہائی نقطہ

فَ اور ق کے

مساوی (یا متمم) زاویے بنینگے۔

## محرومی تطیل

(۳۰۴)

۳۱۵۔ اگر کسی نقطہ ف کو ایک ثابت نقطہ ط سے ملایا جائے

اور ط ف کسی ثابت مستوی سے ف پر منقطع ہو تو نقطہ ف کو مستوی

مذکور پر ف کا ظل کہتے ہیں۔ نقطہ ط کو تطیل کا راس یا مرکز اور قاطع

مستوی کو تطیل کا مستوی کہا جاتا ہے۔

۳۱۶۔ کسی خط مستقیم کا ظل ایک خط مستقیم ہوتا ہے۔

کیونکہ وہ خطوط مستقیم جو ط کو کسی خط مستقیم کے تمام نقطوں سے ملاتے

ہیں ایک مستوی میں ہوتے ہیں اور یہ تطیل کے مستوی سے ایک خط

مستقیم میں منقطع ہوتا ہے۔

۳۱۷۔ کوئی مستوی منحنی اُسی درجہ کے ایک منحنی میں  
منظیل ہوتا ہے۔

کیونکہ اگر کوئی خط مستقیم ابتدائی منحنی سے نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'... پر ملے تو خط کا ظل منحنی کے ظیل سے اُن نقطوں پر ملے گا جہاں  
ط 'ا'، ط 'ب'، ط 'ج'... نظیل کے مستوی سے ملتے ہیں۔  
اس لیے ایک منحنی میں ایک خط مستقیم پر اتنے ہی نقطے ہونگے  
جتنے دوسرے منحنی میں ہیں۔ اس سے مسئلہ ثابت ہے۔

بالخصوص ایک مخروطی کا ظل ایک مخروطی ہوتا ہے۔

اس مسئلہ میں وہ ہندسی مسئلہ شامل ہے کہ ایک قائم مستوی  
مخروط کی ہر مستوی تراش ایک مخروطی ہوتی ہے۔

۳۱۸۔ ایک منحنی کا حماس ظل کے منحنی کے حماس میں  
منظیل ہوتا ہے۔ کیونکہ اگر ایک خط مستقیم ایک منحنی سے دو

نقطوں 'ا'، 'ب' پر ملے تو اس خط کا ظل منحنی کے ظل سے دو نقطوں  
'ا'، 'ب' پر ملے گا جہاں ط 'ا'، ط 'ب' نظیل کے مستوی سے 'ا'، 'ب' پر  
ملتے ہیں۔ پس اگر 'ا'، 'ب' منطبق ہوں تو 'ا'، 'ب' بھی منطبق ہوں گے۔

۳۱۹۔ ایک منحنی کے لحاظ سے قطب اور قطبی کا رشتہ  
نظیل سے نہیں بدلتا۔

یہ پچھلے دو مسئلوں سے ماخوذ ہوتا ہے۔

پہلی ظاہر ہے کہ ایک مخروطی کے لحاظ سے دو مزدوج خط یا دو  
مزدوج نقطے ظل کے منحنی کے لحاظ سے دو مزدوج خطوں یا دو مزدوج

(۴۰۵)

نقطوں میں منظر ہوتے ہیں۔

۳۲۰۔ منظر کے راس میں سے ایک مستوی تطیل کے مستوی کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ مستوی اصلی مستوی کو خط  $\Gamma$  پر قطع کرتا ہے۔ اب چونکہ مستوی  $\Gamma$  کا  $\Gamma$  اور تطیل کا مستوی متوازی ہیں اس لیے ان کا خط تقاطع جو  $\Gamma$  کا منظر ہے لامتناہی فاصلہ پر ہے۔

پس کسی مخصوص خط مستقیم  $\Gamma$  کو لامتناہی فاصلہ پر منظر کرنا ہو تو کسی نقطہ  $\Gamma$  کو راس اور مستوی  $\Gamma$  کا  $\Gamma$  کے متوازی ایک مستوی کو تطیل کا مستوی قرار دو۔

وہ خطوط مستقیم جو خط  $\Gamma$  پر کسی نقطہ میں ملتے ہوں متوازی خطوط مستقیم میں منظر ہوں گے کیونکہ ان کا نقطہ تقاطع لامتناہی منظر ہوگا۔

۳۲۱۔ اصلی مستوی پر کے متوازی خطوط مستقیم کا کوئی نظام ایسے خطوں میں منظر ہوگا جو ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

کیونکہ فرض کرو کہ  $\Gamma$  وہ خط ہے جو راس میں سے گذرتا ہے اور نظام کے متوازی ہے جہاں  $\Gamma$  تطیل کے مستوی پر ہے۔ اب چونکہ  $\Gamma$  اس مستوی میں ہے جو  $\Gamma$  میں سے اور کسی ایک متوازی خط میں سے گذرتا ہے اس لیے متوازی خطوں میں سے ہر ایک کا منظر  $\Gamma$  میں سے گذرے گا۔

متوازی خطوں کے مختلف نظاموں کے لیے نقطہ  $\Gamma$  کا محل بدلے گا لیکن چونکہ  $\Gamma$  ہمیشہ اصلی مستوی کے متوازی رہتا ہے اس لیے  $\Gamma$  ہمیشہ اس خط تقاطع پر ہوگا جو تطیل کے مستوی اور راس میں سے گذرنے والے اس مستوی کا ہے جو اصلی مستوی کے متوازی ہے۔

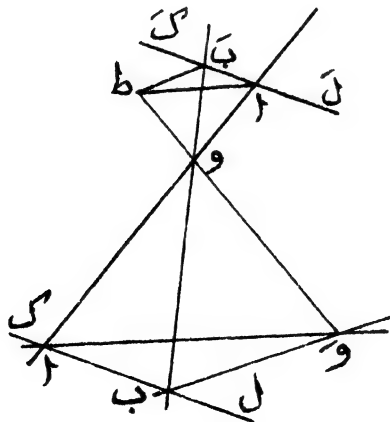
پس اصلی مستوی پر کے متوازی خطوں کا کوئی نظام خطوں کے

ایک نظام میں منظر ہوتا ہے جو ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور ایسے تمام نقطے متوازی خطوں کے مختلف نظاموں کے لیے ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

۳۲۲۔ فرض کرو کہ اصلی مستوی اور تظیل کے مستوی کا خط تقاطع ک ل ہے۔ اس میں سے ایک مستوی تظیل کے مستوی کے متوازی کیچنچو اور فرض کرو کہ وہ اصلی مستوی کو خط ک ل پر قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ دو خطوط مستقیم ا و ا' ب و ب' خط ک ل کے لیے علی الترتیب ا' ب اور ا' ب پر ملتے ہیں اور فرض کرو کہ ط و تظیل کے مستوی سے و پر ملتا ہے۔ تب ا و اور ب و، ا و اور ب و ب کے ظل ہیں۔

(۴۰۶)

چونکہ مستوی ط ا' ب اور ا و ب متوازی ہیں اور متوازی مستوی ایک ہی مستوی سے متوازی خطوں میں منقطع ہوتے ہیں اس لیے خطوط ط ا' ط ب علی الترتیب ا و ب و کے متوازی ہیں۔ اس لیے زاویہ ا ط ب = زاویہ ا و ب یعنی ا ط ب اس زاویہ کے مساوی ہے جس میں ا و ب منظر ہوتا ہے۔



اسی طرح اگر خطوط مستقیم ج د اور ع د 'ک ل سے  
 علی الترتیب ج د پر ملیں تو زاویہ ج ط د اس زاویہ کے مساوی  
 ہوگا جس میں ج د ع منطلل ہوتا ہے۔  
 اوپر کے مسئلہ سے غلوں کے نظریہ میں حسب ذیل بنیادی  
 مسئلہ ماخوذ ہوتا ہے:

کسی خط مستقیم کو لاتنا ہی پر منطلل کیا جاسکتا ہے اور  
 اس کے ساتھ ہی کسی دو زاویوں کو دے ہوئے زاویوں  
 میں منطلل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ وہ خطوط مستقیم جو دو زاویوں کی ساقوں کو تعبیر  
 کرتے ہیں اس خط سے جس کو لاتنا ہی پر منطلل کرنا ہے نقطوں ا ب  
 ب اور ج د پر ملتے ہیں۔ کوئی مستوی ا ب ج د میں سے  
 گزرتا ہوا کھینچو اور اس مستوی میں دائروں کے ایسے قطعے جو علی الترتیب  
 ا ب اور ج د میں سے گزریں اور ان میں دے ہوئے زاویوں  
 مساوی زاوے بنیں۔ دائروں کے ان قطعوں کے نقاط تقاطع  
 میں سے کسی ایک کو منطلیل کا مرکز قرار دیا جاسکتا ہے اور منطلیل کے  
 مستوی کو اس مستوی کے متوازی لینا چاہئے جس کو ہم نے ا ب  
 ج د میں سے گزرتے ہوئے کھینچا ہے۔  
 اگر قطعے ایک دوسرے سے نہ ملیں تو منطلیل کا مرکز خیالی ہوگا۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ کسی چار ضلعی کو ایک مربع میں  
 منطلل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ چار ضلعی ا ب ج د ہے اور فرض کرو کہ متقابلہ ضلعوں  
 ایک زوج کے نقاط تقاطع ف ق [دیکھو شکل دفعہ ۵] ہیں۔ فرض کرو کہ

وترب د' (ج خط ف ق سے نقطوں میں، سر پر ملتے ہیں۔ اب اگر ف ق کو لاتنا ہی پر اور اس کے ساتھ ہی زاویوں ف د ق اور س د س کو قائم زاویوں میں منظر کیا جائے تو ظل کو ایک مربع ہونا چاہیے۔ کیونکہ ف ق لاتنا ہی پر منظر ہو چکا ہے، اس لیے ظل میں متبادل ضلعوں کے زوج متوازی ہوں گے یعنی ظل ایک متوازی الاضلاع ہے۔ نیز اس متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ ہے اور وتروں کا درمیانی زاویہ بھی قائمہ ہے، اس لیے ظل ایک مربع ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ وہ مثلث جو ایک چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے کسی مخروطی کے لحاظ سے جو چار ضلعی کے ضلعوں کو مس کرے خود قطبی ہے۔

چار ضلعی کو ایک مربع میں منظر کرو۔ اب وہ دائرہ جو مربع کو محیط کرتا ہے مخروطی کا مرتبہ دائرہ ہے، اس لیے مربع کے وتروں کا نقطہ تقاطع مخروطی کا مرکز ہے۔  
لیکن مرکز کا قطبی لاتنا ہی پر کا خط ہے، اس لیے وتروں میں سے دو کے نقطہ تقاطع کا قطبی تیسرا وتر ہے۔

مثال ۳۔ اگر ایک مخروطی کو ایک چار ضلعی میں کھینچا جائے تو نقاط تماس میں سے دو کو ملائیو الاخط اس مثلث کے ایک راس میں سے گزریگا جو چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے۔

مثال ۴۔ اگر ایک مکانی کے گرد مثلث (ب ج

کھینچا جائے اور متوازی الاضلاعوں ا ب ا ج ب ج ب ا  
اور ج ا ج ب کی تکمیل کی جائے تو وتر ت ماس علی الترتیب  
نقطوں ا ب ج میں سے گذرینگے۔

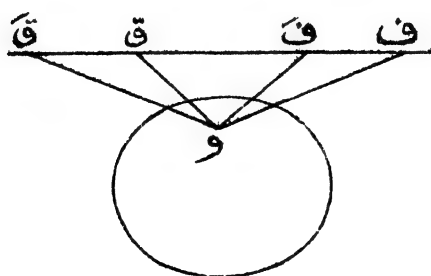
یہ مثال سہ کی مخصوص صورت ہے جس میں چار ضلعی کا ایک ضلع  
لاتناہی کا خط ہے۔

مثال ۵۔ اگر دو مثلثوں کے راسوں کو ملانے والے تین خطوط ایک نقطہ پر ملیں تو متناظر ضلعوں کے تین تقاطع تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہوں گے۔

متناظر ضلعوں کے نقاط تقاطع میں سے دو کو لاتنا ہی پر مطلق کر تو متناظر ضلعوں کے دوزخ متوازی ہونگے اور پھر یہ بتانا آسان ہے کہ تیسرا زوج بھی متوازی ہوگا۔

(7-8)

۳۲۳۔ کسی مخروطی کو ایک دائرہ میں مغلل کیا جاسکتا ہے جسکا مرکز کسی دے ہوئے نقطہ کا ظل ہو۔





فرض کرو کہ وہ نقطہ ہے جس کے نخل کو نخل کے منحنی کا مرکز بنانا ہے۔

فرض کرو کہ وہ قطبی پرف کوئی نقطہ ہے اور ف کا قطبی وق ہے۔ اب وف اور وق مزدوج خطوط ہیں۔  
مزدوج خطوط کا ایک اور زوج وف، وق لو۔

پھر وہ قطبی کو لاتنا ہی پر اور زاویوں ف، و ق کے فوق کو قائمہ زاویوں میں منطلل کرو تو ایک مخروطی حاصل ہوگا جس کا مرکز و کا نخل ہوگا اور چونکہ مزدوج قطروں کے دو زوج علی القواہم ہیں اس لیے یہ مخروطی ایک دائرہ ہوگا۔

۳۲۲۔ مخروطیوں کا ایک نظام جو ایک چار ضلعی میں کھینچے گئے ہوں ہم ماسکی مخروطیوں میں منطلل کیا جاسکتا ہے۔  
فرض کرو کہ چار ضلعی کے دو ضلع نقطہ ۱ پر متقاطع ہوتے ہیں

اور دوسرے دو ضلع نقطہ ب پر۔ کوئی مخروطی ۱ اور ب میں سے گزرتا ہو اکھینچو اور اس مخروطی کو ایک دائرہ میں منطلل کرو جبکہ خط ۱ ب کو لاتنا ہی پر منطلل کیا گیا ہو۔ اب ۱ اور ب لاتنا ہی پر انتہائی نقطوں میں منطلل ہوں گے اور چونکہ لاتنا ہی پر کے انتہائی نقطوں سے نظام کے تمام مخروطیوں کے تماس وہی ہوتے ہیں اس لیے یہ مخروطی ہم ماسکی ہونے چاہئیں۔

مثال ۱۔ چار نقطوں میں سے گذرنیوالے مخروطی ہم محور مخروطیوں میں منطلل ہو سکتے ہیں۔

ان میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط کو لاتنا ہی پر منطلل کرو اور مخروطیوں میں سے ایک کو دائرہ میں منطلل کرو اب تمام مخروطی دائروں میں

منظیل ہوں گے کیونکہ وہ سب لاتنا ہی پر کے انتہائی نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

مثال ۲۔ وہ مخروطی جو ایک دوسرے کے ساتھ دوہرا تاس رکھتے ہیں ہم مرکز دائروں میں منظور ہو سکتے ہیں۔

مثال ۳۔ ایک مسدس کو ایک مخروطی میں کھینچا گیا، ثابت کرو کہ مسدس کے متقابلہ ضلعوں کے تین نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔ [پیا سکال کا مسدس]

مخروطی کو ایک دائرہ میں اور متقابلہ ضلعوں کے دو زوجوں کے تقاطع کو ملانے والے خط کو لاتنا ہی منظور کرو تو یہ ثابت کرنا ہے کہ ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ایک مسدس کے متقابلہ ضلعوں کے دو زوج متوازی ہوں تو تیسرا زوج بھی متوازی ہوگا۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے تمام مخروطی قائم زائموں میں منظور ہو سکتے ہیں۔  
خطوں کے تین زوج ہوں گے جو ان چار نقطوں میں سے گزریں گے اور اگر ان میں سے دو زوجوں کے درمیانی زاویوں کو قائمہ زاویوں میں منظور کیا جائے تو تمام مخروطی قائم زائموں میں منظور ہوں گے۔ [وضفہ ۱۸، مثال ۱]

مثال ۵۔ مخروطی کے کوئی تین وتر ایک دائرہ کے مساوی وتروں میں منظور ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ (ا، ب، ج، د) وتر ہیں، فرض کرو کہ (ب، د) اور (د، ب) پر ملتے ہیں اور (ج، ا) پر ملتے ہیں۔ مخروطی کو

ایک دائرہ میں اور گ ل کو لاتا ہی پر منظر ل کرو۔

مثال ۶۔ اگر دو مثلث ایک مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہوں تو ان کے چھ راس ایک مخروطی پر ہونگے اور ان کے چھ ضلع ایک مخروطی کو مس کریں گے۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج، ا ب ج ہیں۔ ب ج کو لاتا ہی پر اور مخروطی کو ایک دائرہ میں منظر ل کرو تو دائرہ کے مرکز میں منظر ل ہوگا اور ا ب، ا ج علی القوائم ہوں گے کیونکہ ا ب ج خود قطبی ہے۔ نیز چونکہ ا ب ج دائرہ کے لحاظ سے خود قطبی ہے اس لیے ا مثلث ا ب ج کا مرکز ہندسی ہے۔

اب ا ب ج میں سے گزرنے والا قائم زائد ا میں سے گزرے گا اور ب میں سے گزرنے والا قائم زائد ج میں سے گزرے گا۔ پس چونکہ ایک قائم زائد کو کسی چار نقطوں میں سے کھینچا جاسکتا ہے اس لیے چھ نقطے ا ب ج، ا ب ج، ا ب ج، ا ب ج، ا ب ج، ا ب ج نیز ایک مکانی کھینچا جاسکتا ہے جو چار خطوط مستقیم ب ج، ج ا، ا ب، ب ا کو مس کرے۔ لیکن ا اس مکانی کے مرتب پر ہوگا [دفعہ ۵۔ ۱ (۳)] اس لیے ا ج ایک مماس ہے۔ اس لیے ایک مخروطی ان دو مثلثوں کے چھ ضلعوں کو مس کرتا ہے۔

مثال ۷۔ اگر ایک چار ضلعی کو ایک مخروطی میں اور (۴۱۰) ایک دوسرے مخروطی کے گرد کھینچا جاسکے تو ایسے چار ضلعی تعداد میں لامتناہی کھینچے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک مخروطی میں پر چار نقطے ف، ق، س، س ہیں



اور ان کے ظل ا، ب، ج، د ہیں۔ تب اگر تظلیل کا مرکز ط ہو تو  
ط ا، ط ب، ط ج، ط د خطوط مستقیم ہیں اور [دفعہ  
[۵۵]

$$\{ابج د\} = \{ط\} = \{ابج د\}$$

اگر وہ سے چار خطوں کی کوئی پنسل ہو اور یہ پنسل کسی قاطع سے  
نقطوں ا، ب، ج، د پر منقطع ہو تو

$$\{ابج د\} = \{ابج د\} = \{ط\} = \{ابج د\}$$

$$\{ابج د\} =$$

$$\{ابج د\} =$$

پس اس سے اور دفعہ ۶ کی رد سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر نقطوں کی

کوئی تعداد درپیش میں ہو تو ان کے ظل درپیش میں ہونگے۔

مثال ۱۔ مخروطی کا کوئی وتر جو ایک دائے ہوئے نقطہ

و میں سے گزرے منحنی سے اور وہ کے قطبی سے موسیقی طور پر

تقسیم ہوتا ہے۔

ا کے قطبی کو لاتنا ہی پڑے گا کہ وہ ظل کا مرکز ہوگا اور اس لیے وتر  
و پر تنصیف ہوگا، اور سمت [ف و ق ۵۵] موسیقی ہوگی جبکہ ف و

= وق۔

مثال ۲۔ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے

مخروطی کسی خطِ مستقیم سے نقطوں کے ایسے زوجوں میں قطع ہوتے ہیں جو درپہنچ میں ہوتے ہیں۔ [ڈیساگ کا مسئلہ]  
 ان میں سے دو نقطوں کو لاتنا ہی پر انتہائی نقطوں میں منظر کرو تو  
 مخروطی ہم محور دائروں میں منظر ہوں گے اور پھر مسئلہ ثابت ہو جائیگا۔  
 ۳۲۶۔ اُس منسل کی چلیبی نسبت جو چار متقاطع خطوطِ مستقیم  
 سے بنے اُس سعت کی چلیبی نسبت کے مساوی ہوتی ہے  
 جو کسی مخروطی کے لحاظ سے ان خطوطِ مستقیم کے قطبوں سے  
 بنتی ہے۔

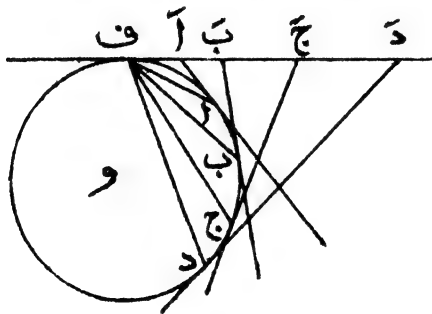
چونکہ منسلوں اور سعتوں کی چلیبی نسبتیں تطیل سے نہیں بدلتیں  
 اس لیے ہم مخروطی کو ایک دائرہ میں منظر کر سکتے ہیں۔ اب ایک  
 دائرہ میں کوئی خطِ مستقیم اُس خط پر عمود ہوتا ہے جو دائرہ کے مرکز کو  
 خط کے قطب (بلحاظ دائرہ) سے ملاتا ہے۔ پس اُس منسل کی چلیبی  
 نسبت جو چار متقاطع خطوطِ مستقیم سے بنے اُس منسل کی چلیبی نسبت  
 کے مساوی ہے جو دائرہ کے مرکز پر ان کے قطبوں کے محاذی بنتی ہے  
 اور اس لیے اُس سعت کی چلیبی نسبت کے مساوی ہے جو ان کے  
 قطبوں سے بنتی ہے۔

۳۲۷۔ اُس منسل کی چلیبی نسبت جو ایک مخروطی کے  
 کسی نقطہ کو چار ثابت نقطوں سے ملانے سے بنے مستقل  
 ہوتی ہے اور اُس سعت کی چلیبی نسبت کے مساوی ہوتی  
 ہے جس میں ان نقطوں پر کے مماس کسی مماس سے منقطع

ہوتے ہیں۔  
 چونکہ پینلوں اور سطحوں کی چلیبی نسبتیں تطلیل سے نہیں بدلتیں  
 اس لیے اس مسئلہ کو صرف ایک دائرہ کے لیے ثابت کرنا کافی ہے۔  
 فرض کرو کہ ایک دائرہ پر چار ثابت نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کا  
 ہیں، فرض کرو کہ دائرہ پر کوئی اور نقطہ 'ف' ہے اور فرض کرو کہ 'ف' پر  
 محاسن 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' پر کے محاسنوں سے نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'  
 پر ملتا ہے۔

اب اگر دائرہ کا مرکز وہ ہے تو 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' اور 'و' د  
 علی الترتیب 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' اور 'ف' پر عمود ہیں۔  
 پس {ا ب ج د} = {و ا ب ج د} = {ف ا ب ج د} لیکن زاوے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' مستقل ہیں  
 کیونکہ 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ثابت نقطے ہیں۔

اس لیے {ا ب ج د} = {ف ا ب ج د} = مستقل



اگر ق کوئی نقطہ ہو اور وہ دائرہ پر نہ ہو تو

ق { ا ب ج د } ف ( ا ب ج د )  
 کے مساوی نہیں ہو سکتا، یہ فوراً واضح ہو جاتا ہے اگر ہم ف ایسا  
 لیں کہ ا ف ق ایک خط مستقیم ہو اور پھر ا ن سعتوں پر غور کریں  
 جو ب ج پر ا ن دو پیشلوں سے بنتی ہیں۔ اس لیے حسب ذیل  
 مسئلہ عکس حاصل ہوتا ہے:

اگر ایک نقطہ ف اس طرح حرکت کرے کہ ا ن پیشل  
 کی چلیپی نسبت جو اس کو چار ثابت نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د'  
 سے ملانے سے بنے مستقل ہو تو ف ایک مخروطی مرسم کرے گا  
 جو 'ا' 'ب' 'ج' 'د' میں سے گزرے گا۔

مثال ۱۔ مخروطی کے دو مزدوج وتروں کے چار سرے  
 ا ن کے کسی نقطہ پر ایک موسیقی پیشل بناتے ہیں۔  
 فرض کرو کہ وتر 'ا' 'ج' 'ب' د ہیں۔ فرض کرو کہ ب د کا قطب ع  
 ہے اور 'ا' 'ج' 'ب' د کا نقطہ تقاطع ف ہے۔ یہ چار نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د'  
 ضخمی کے تمام نقطوں پر مساوی چلیپی نسبت کی پیشلیں بناتے ہیں۔ ایک  
 نقطہ کو د سے لا انتہا قریب لو تو پیشل د 'ا' 'ب' 'ج' ع کے حاصل ہوگی۔  
 لیکن سعت 'ا' 'ب' 'ج' 'ع' موسیقی ہے جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

مثال ۲۔ اگر دو مثلث ایک مخروطی کو حاطط کریں تو

ان کے چھ راس دوسرے مخروطی پر ہوں گے۔  
 فرض کرو کہ مثلث 'ا' 'ب' 'ج' 'ا' 'ب' 'ج' ہیں۔ فرض کرو کہ ب 'ج'  
 ضلعوں 'ا' 'ب' 'ج' کو 'ع' د پر قطع کرتا ہے اور ب ج ضلعوں 'ا' 'ب'  
 'ج' کو 'ع' د پر قطع کرتا ہے۔ تب وہ سعتیں جو چار ماسوں 'ا' 'ب' 'ج' 'ع'



اَب، اَج پر دو محاسوں ب ج، ب ج سے بنتی ہیں مساوی ہیں۔

پس  $\{ب ج ع د\} = \{ع د ب ج\}$

ا  $\{ب ج ع د\} = \{ا ع د ب ج\}$

یا  $\{ا ب ج ب ج\} = \{ا ب ج ب ج\}$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

اس مسئلہ کو اس طرح بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ب، ج کو لاتناہی (۴۱۳) پر کے دائری نقطوں میں منظر کیا جائے۔ چنانچہ محرومی ایک ایسے مکانی میں منظر ہوگا جس کا ماسکہ ا ہے، اور یہ معلوم ہے کہ وہ دائرہ جو (ا ب ج) کو مانط کرتا ہے ا میں سے گزرتا ہے۔

### ۳۲۸۔ تعریف۔ سعتیں اور پنسلیں ہم رسم کہلاتی

ہیں جبکہ ایک کے ہر چار اجزاء اور دوسرے کے متناظر چار اجزاء مساوی چلیسی نسبتیں رکھیں۔

ہم رسم سعتوں یا پنسلوں کی دوسری تعریف حسب ذیل ہے: دو سعتیں یا پنسلیں ہم رسم کہلاتی ہیں جبکہ وہ اس طرح مربوط ہوں کہ ایک نظام کے ہر نقطہ یا خط کے متناظر دوسرے نظام کا ایک اور صرف ایک نقطہ یا خط ہو۔

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ ہم رسم سعتوں کی یہ تعریف پہلی تعریف کے مماثل ہے فرض کرو کہ دو نظاموں کے کسی دو متناظر نقطوں کے فاصلے (ثابت نقطوں سے پیمائش کردہ) لا، ما ہیں۔ تب ہمیں شکل

$$\frac{لا + ما}{ج + د} = لا$$

کی مساوات حاصل ہونی چاہئے۔  
مسئلہ اس واقعہ سے مستنبط ہوتا ہے کہ ایک نظام کے ہر چار  
نقطوں کی چلیبی نسبت یعنی

$$\frac{(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا}_2 - \text{لا}_3)}{(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا}_2 - \text{لا}_3)}$$

نہیں بدلتی اگر ہم لا کی بجائے  $\frac{\text{لا} + \text{ب}}{\text{ج} + \text{د}}$ ، لا کی بجائے  $\frac{\text{لا} + \text{ب}}{\text{ج} + \text{د}}$  وغیرہ درج کریں۔

مثال ۱۔ دو ہم رسم پینلوں کے متناظر خطوں کے تقاطع  
تقاطع ایک مخروطی کو مرسم کرتے ہیں۔  
فرض کرو کہ چار تقاطع 'ف'، 'ق'، 'س'، 'س' ہیں اور پینلوں کے  
راس 'و' و 'و' ہیں۔

تب  $\{ \text{ف} \text{ق} \text{س} \} = \{ \text{و} \text{ف} \text{ق} \text{س} \}$  اس لیے  
'و'، 'ف'، 'ق'، 'س' [دفعہ ۳۲۷] ایک مخروطی پر ہیں۔ لیکن ایک  
مخروطی کو متعین کرنے کے لیے پانچ نقطے کافی ہیں اس لیے 'و'، 'ق' اور کسی تین  
نقاط تقاطع میں سے گزرنے والا مخروطی ہر دوسرے نقطہ تقاطع میں سے  
گزرے گا۔

مثال ۲۔ وہ خطوط جو دو ہم رسم سطحوں کے متناظر نقطوں کو  
ملاتے ہیں ایک مخروطی کو لف کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک نظام کے کوئی چار نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں اور  
دوسرے نظام کے متناظر چار نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں۔ تب 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' اور

(۳۱۴)

ج ج 'د د' ثابت خطوں سے مساوی چلیبی نسبت کی سمتوں میں منقطع ہوتے ہیں۔ پس ایک مخروطی ان ثابت خطوں کو اور نیز 'ا' 'ب' 'ج' ج 'ج' 'د' کو مس کرے گا۔ لیکن کسی مخروطی کو متعین کرنے کے لیے پانچ محاسن کافی ہیں، اس لیے وہ مخروطی جو ثابت خطوں کو اور سمتوں کے متناظر نقطوں کو ملانے والے خطوں میں سے تین کو مس کرتا ہے باقی تمام دوسروں کو بھی مس کرے گا۔

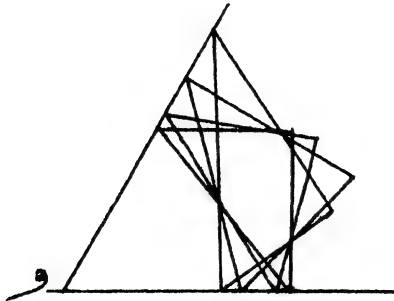
**مثال ۳۔** مستقل مقدار کے دو زاویے 'ف' (ق' ف' ج' ثابت نقطوں) 'ب' کے گرد حرکت کرتے ہیں اور نقطہ 'ف' ایک خط مستقیم مرسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ق' ایک مخروطی مرسم کرتا ہے جو 'ا' 'ب' میں سے گذرتا ہے۔ [نیوٹن]

'ا' کے ایک محل کے متناظر 'ب' 'ق' کا ایک اور صرف ایک محل ہے۔ پس مثال کی رو سے 'ق' کا طریق ایک مخروطی ہے۔

**مثال ۴۔** ایک مثلث کے تین ضلع ثابت نقطوں میں سے گذرتے ہیں اور اس کے قاعدہ کے سرے دو ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کا راس ایک مخروطی مرسم کرتا ہے۔ [میکلارن]

فرض کرو کہ تین ثابت نقطے 'ا' 'ب' 'ج' ہیں۔ اور فرض کرو کہ دو ثابت خطوط مستقیم 'و' 'و' ہیں۔ مثلثوں کو شکل کے مطابق کھینچا ہوا

سمجھو۔



تب سقین {ا ب ج د....} کے اور {ا ب ج د....} کے ہم رسم ہیں۔  
اس لیے پنسلیں ب {ا ب....} اور ج {ا ب ج د....} کے ہم رسم ہیں۔

مثال ۵۔ اگر ایک کثیر ضلعی کے تمام ضلع ثابت نقطوں میں سے گذریں اور تمام راس 'ا' کے ثابت خطوط مستقیم پر حرکت کریں تو بقیہ راس ایک مخروطی کو مشتمل کرے گا۔

مثال ۶۔ ایک مخروطی پر 'ا'، 'ب' ثابت نقطے ہیں اور 'ا' سے کسی ہم ماسکی مخروطی کے ماسوں کے زون کھینچے گئے ہیں جو ابتدائی مخروطی سے نقطوں ج 'د' اور ج 'د' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ج 'د' اور ج 'د' کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۱ سے ہم ماسکی کے ماس 'ا' پر کے ماس سے مساوی میلان رکھتے ہیں [دفعہ ۲۳۰ نتیجہ صریح ۳] اس لیے وتر ج 'د' 'ا' پر کے ماس کو کسی ثابت نقطہ و قطع کرے گا [دفعہ ۱۹۶ مثال ۲]۔ اسی طرح ج 'د' بھی ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرے گا۔ اب اگر ہم و میں سے گذرتا ہوا کوئی خط و ج 'د' لیں تو ایک اور صرف ایک ہم ماسکی خطوط ج 'ا' اور ج 'د' کو مس کرے گا، اور 'ا' سے اس ہم ماسکی کے ماس 'ج' اور 'د' کو متعین کریں گے اور اس لیے و ج 'د' کے کسی محل کے متناظر و ج 'د' کا ایک اور صرف ایک محل ہے۔ اس لیے نقطہ تقاطع کا طریق مثال الکی بموجب ایک مخروطی ہے۔

مثال ۷۔ اگر 'ا' و 'ب' و 'ج' و 'د' و 'د'۔

(۲۱۵)

.... ایک محروطی کے وتر ہوں اور ف محروطی پر کوئی نقطہ ہو تو پنسل ف { ا ب ج د .... } اور ف { ا ب ج د .... } ہم رسم ہوں گی۔

محروطی کو ایک دائرہ میں جس کا مرکز و ہو مظل کرد۔

مثال ۸۔ اگر ایک محروطی پر نقطوں کے دو نظام ہوں جن کے محاذی منحنی کے کسی نقطہ پر ہم رسم پنسل بنیں تو وہ خط جو ان دو نظاموں کے متناظر نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتے ہیں ایک محروطی کو لف کر نیچے جو ابتدائی محروطی کے ساتھ دہرا تماس رکھیگا۔

فرض کرو کہ نقطوں کے دو نظام { ا ب ج د .... } اور { ا ب ج د .... } ہیں۔ { ا ب ج د .... } کو ایک دائرہ کے مساوی وتروں میں مظل کرو [دفعہ ۳۲۴ مثال ۵]۔ فرض کرو کہ متناظر نقطوں کا کوئی زوج ف ف ہے اور و دائرہ پر کوئی نقطہ ہے۔ ا ب و { ا ب ج ف } = و { ا ب ج ف }۔ اس لیے ف ف = { ا ب ج ف } اور اس لیے ف ف کا لفاف ایک ہم مرکز دائرہ ہے۔

مثال ۹۔ اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک محروطی میں کھنچا جائے اور اس کے تمام ضلع الا ایک کے ثابت نقطوں میں سے گزریں تو بقیہ ضلع کا لفاف ایک محروطی ہوگا۔

یہ مثال ۷ اور مثال ۸ سے حاصل ہوگا۔

۳۲۹۔ کوئی دو خط جو ایک دوسرے کے علی القواثم ہوں اور وہ خط جو ان کے نقطہ تقاطع اور لاتناہی پر کے دائری نقطوں میں سے گزریں ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ وہ خط جو ایک دوسرے کے علی القواثم ہیں لا ما = ہیں، تب وہ خط جو لاتناہی پر کے دائری نقطوں کو ان کے تقاطع سے ملاتے ہیں لا + ما = ۰ سے حاصل ہوں گے۔ دفعہ ۷ کی رو سے خطوں کے یہ دو زوج موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔ نیز ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ دو خط جو کسی مستقل زاویہ پر مائل ہوں اور وہ خط جو لاتناہی پر کے دائری نقطوں تک پھینچے جائیں مستقل چلیبی نسبت کی پنسل بناتے ہیں۔ (۳۱۶)

مثال۔ ایک مخروطی کے دو محاس ایک دے ہوئے خط ۱ ب کو موسیقی طور پر تقسیم کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ان محاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے جو ۱ ب میں سے گزرتا ہے اور وتر تاس کا لفاف ایک مخروطی ہے جو ابتدائی مخروطی کے ان محاسوں کو مس کرتا ہے جو ۱ ب سے پھینچے گئے ہیں۔

۱ ب کو لاتناہی پر کے دائری نقطوں میں منطلل کرو تو مسئلہ ہو جاتا ہے: ایک مخروطی کے ان دو محاسوں کا طریق جو ایک دوسرے کے علی القواثم ہوں ایک دائرہ ہے، اور وتر تاس کا لفاف ایک



مثلثوں ا ب ع، ب ج ف پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ع اور ف ہم ماسکی مخروطیوں پر حرکت کرتے ہیں۔ پس مثلث ج ع د پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ د ایک ہم ماسکی مخروطی پر حرکت کرتا ہے۔ اگر ہم ایک ماسکہ کے لحاظ سے مکافات کریں تو حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوگا:

اگر ایک مثلث کے راس، ایک ہم محور نظام کے ایک دائرہ پر ہوں اور اس کے دو ضلع نظام کے دائروں کو مس کریں تو تیسرا ضلع نظام کے دوسرے دائرہ کو مس کرے گا۔ (پوانسلٹ کا مسئلہ)

مثال ۲۔ وہ چھ خطوط جو ایک مثلث کے راسوں کو ان نقطوں سے ملاتے ہیں جہاں مقابل کے ضلع ایک مخروطی سے منقطع ہوتے ہیں ایک دوسرے مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

منکافی مسئلہ حسب ذیل ہے:

ایک مثلث کے زاویوں سے ایک مخروطی کے ماس کھینچے جائیں تو مقابل کے ضلع، ان ماسوں کو جن چھ نقطوں پر قطع کرتے ہیں وہ ایک دوسرے مخروطی پر واقع ہوتے ہیں۔

نقطوں میں سے دو کو لاتنا ہی پر کے دائری نقطوں میں منطیل کرو تو مثلث کا مقابل کار اس ایک ماسکہ میں منطیل ہوگا، اور حسب ذیل مسئلہ فوراً حاصل ہوگا:

اگر مخروطی کے ایک ماسکہ میں سے دو خط کھینچے جائیں اور ان خطوں کے متوازی مخروطی کے ماس کھینچے جائیں تو



ان خطوں اور ان حماسوں کے چار نقاط تقاطع ایک دائرہ پر واقع ہوں گے۔

مثال ۳۔ حسب ذیل مسئلے ایک دوسرے سے ماخوذ ہو سکتے ہیں:

(۱) دو خط ایک دوسرے کے علی القواہم ہیں ان میں سے

ایک خط ایک مخروطی کا حماس اور دوسرا ایک ہم ماسکی مخروطی کا حماس ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے اور یہ کہ ان کے نقاط تماس کو ملانے والے خط کا نصف ایک دوسرا ہم ماسکی مخروطی ہے۔

(۲) دو نقطوں میں سے ایک نقطہ ایک دائرہ پر اور

دوسرا ایک ہم محور دائرہ پر ہے، ان نقطوں کے محاذی ایک انتہائی نقطہ پر قائمہ زاویہ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس خط کا نصف جو ان کو ملاتا ہے ایک مخروطی ہے جس کا ایک ماسکہ انتہائی نقطہ پر ہے، نیز ثابت کرو کہ ان نقطوں پر کے حماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ہم محور دائرہ ہے۔

(۳) دو خطوں میں سے ایک خط ایک مخروطی کا حماس اور دوسرا

ایک دوسرے مخروطی کا حماس ہے، یہ خط مخروطیوں کے حاط چار ضلعی کے ایک وتر کو مسیقی طور پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوں کے

نقطہ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے جو اس وتر کے سروں میں سے گذرتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ نقاط تماس کو ملانے والے خط کا لفاف ایک مخروطی ہے جو اسی چار ضلعی میں کھینچا ہوا ہے۔

(۴) اوب اور ج و د دو مخروطیوں کے مشترک وتر ہیں اور فاق دو نقطے ہیں جن میں سے ایک ایک مخروطی پر اور دوسرے مخروطی پر ہے اور و ا ف ب ق ا موسیقی ہے۔ ثابت کرو کہ خط فاق کا لفاف ایک مخروطی ہے جو اب ج د کو مس کرتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ فاق پر کے تماس ایک مخروطی پر جو اب ج د میں سے گذرتا ہے ملتے ہیں۔

(۵) اگر دو نقطے لیے جائیں جن میں سے ایک ایک دائرہ اور دوسرا دوسرے دائرہ پر ہو اور وہ ان کے بنیادی محور سے مساوی فاصلوں پر ہوں تو ثابت کرو کہ ان کو ملانے والے خط کا لفاف ایک مکافی ہے جو بنیادی محور کو مس کرتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ان نقطوں پر کے تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے جو اول الذکر دائروں کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

## چودھویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ قطع زائد مزدوج زائد کے لفاف سے اپنا آپ مکافی ہوتا ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کے نظام کو ہم مرکز مخروطیوں میں متکافی کیا جاسکتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ چار مخروطی کھینچے جاسکتے ہیں جن میں ایک ماسک مشترک ہو اور جو تین دئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں نیز ثابت کرو کہ ان میں سے ایک کا وتر خاص دیگر تین کے وتر ان خاص کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ یہ بھی ثابت کرو کہ ان کے مرتبوں میں سے دو دو مثلث ضلعوں پر ملتے ہیں۔

۴۔ اگر دو مخروطیوں میں سے ہر ایک کو دوسرے کے لحاظ سے متکافی کیا جائے تو ثابت کرو کہ یہ دو مخروطی اور دو متکافی ایک مشترک خود مزدوج مثلث رکھتے ہیں۔

۵۔ دو مخروطی  $L$  اور  $M$  ایک مخروطی  $E$  کے لحاظ سے متکافی ہیں۔ اگر  $L$  کے لحاظ سے  $M$  کا متکافی  $M'$  ہو اور  $L$  کے لحاظ سے  $M'$  کا متکافی  $M''$  ہو تو ثابت کرو کہ  $M'$  اور  $M''$   $E$  کے لحاظ سے متکافی ہیں۔

۶۔ اگر ایک درپچ پنسل کی مزدوج شعاعوں کے دو زوج علی القوام ہوں تو ہر زوج علی القوام ہوگا۔

۷۔ اگر ایک درپچ نقطوں کے دو زوجوں کا نقطہ تنصیف وہی ہو تو ہر زوج کا نقطہ تنصیف وہی ہوگا۔ درپچ کام کر کہاں ہے؟

۸۔ مخروطیوں کا ایک نظام ہے جو چار ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے۔ کسی نقطہ سے اس نظام کے ماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں جو ایک پنسل بناتے ہیں جو درپچ میں ہے۔ ثابت کرو کہ نظام کے مرتب دائرے ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

۹۔ ثابت کرو کہ دو دائرے اور ان کے مشابہت کے مرکز کسی نقطہ پر ایک ایسی پنسل بناتے ہیں جو درپچ میں ہوتی ہے۔

۱۰۔ اگر دو محدود خطوں کو حصوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیا جاتا

متناظر نقطوں کو ملانے والے خط ایک مکانی کو لف کریں گے۔  
 ۱۱۔ اگر خطوں 'ا' و 'ب' پر دو ہم رسم سمتوں کے متناظر نقطے  
 'ف' ہوں اور متوازی الاضلاع 'ف' و 'ق' کی تکمیل کی جا  
 تو ثابت کرو کہ 'ق' کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۱۲۔ تین مخروطیوں میں دو نقطے مشترک ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ  
 تین خط جوائن کے دیگر نقاط تقاطع کو دو دو کر کے ملانے سے حاصل ہوتے  
 ہیں ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور کوئی خط جو اس نقطہ میں سے گذرتا ہے  
 مخروطیوں سے ایسے چھ نقطوں پر منقطع ہوتا ہے جو درجہ میں ہوتے ہیں۔  
 ۱۳۔ اگر دو مثلثوں کے متناظر ضلعوں کے نقاط تقاطع ایک  
 خط مستقیم واقع ہوں تو ثابت کرو کہ یہ دو مثلث متساوی الاضلاع مثلثوں  
 میں منظر کے جاسکتے ہیں۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ کوئی تین زاوے قائمہ زاویوں میں منظر  
 کے جاسکتے ہیں۔

۱۵۔ 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک مخروطی پر تین ثابت نقطے ہیں منحنی پر  
 ایک ایسا نقطہ ہندسی طور پر معلوم کرو کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' کے محاذی اس  
 نقطہ پر مساوی زاوے بنیں۔

۱۶۔ ایک ثابت نقطہ 'و' میں سے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو 'ا'،  
 'ب'، 'ج' کے ضلعوں کو 'ا'، 'ب'، 'ج' پر قطع کرتا ہے۔ اس خط  
 'ف' ایسا نقطہ ہے کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' 'ف' موسیقی ہے۔ ثابت کرو کہ 'ف' کا  
 طریق ایک مخروطی ہے۔

۱۷۔ جب چار مخروطی چار دے ہوئے نقطوں میں سے گذرتے  
 ہیں تو وہ پینل جوائن کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبیوں سے بنتی ہے مستقل  
 قطبی نسبت کی ہوتی ہے۔

۱۸۔ اگر مستقل مقدار کے دو زاوے اپنے راسوں کے گرد اس طریقہ  
 پر گھومیں کہ ان کی ساقوں میں سے دو کا نقطہ تقاطع ایک مخروطی پر ہو جو

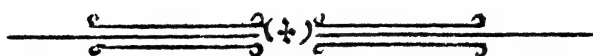
راسوں میں سے گزرتا ہے تو ثابت کرو کہ دوسری دو ساقیں راسوں میں گزرنے والے ایک دوسرے مخروطی پر متقاطع ہونگی۔

۱۹۔ اگر ایک کثیر ضلعی کے تمام راس ثابت خطوط مستقیم پر حرکت کریں اور تمام ضلع، الا ایک کے، ثابت نقطوں کے گرد گردش کریں تو

کثیر ضلعی کا بقیہ ضلع ایک مخروطی کو لف کرے گا۔

۲۰۔ اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک مخروطی کے گرد کھینچا جائے اور

اس کے تمام راس، الا ایک کے، ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہوں تو بقیہ راس کا طریق ایک مخروطی ہوگا۔





ط = ۱ + ۱ + ب + ج + ۲ + ف + ۲ + گ + ۲ + ھ

اور ط = ۱ + ۱ + ب + ج + ۲ + ف + ۲ + گ + ۲ + ھ

اگر مساوات (۲) کی تین اصلیں ک، ک، ک ہوں تو ک، س، س =  
 وغیرہ ان خطوط مستقیم کے زوجوں کی مساواتیں ہیں جو س، اور س کے  
 نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔ اگر ہم (۱) اور (۲) سے ک کو ساقط  
 کریں تو محصلہ مساوات یعنی

$$\Delta \text{ س} - \text{ط س س} + \text{ط س س} - \Delta \text{ س} = ۰$$

س، اور س کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کے تین  
 زوجوں کی مساوات ہوگی۔ اب اگر محدودوں کے محوروں کو کسی طرح تبدیل کیا جائے  
 (۳۳۲) مثلاً کارٹیزیائی محدودوں سے سہ خطی محدودوں میں اور اس تبدیلی سے  
 مخروطیوں س، = ۰ اور س، = ۰ کی مساواتیں  $\Delta = ۰$  اور  $\Delta = ۰$

ہو جائیں تو مساوات ک س + س = ۰، ک  $\Delta + \Delta = ۰$  میں  
 تبدیل ہوگی اور اگر ک ایسا ہو کہ ک س + س = ۰، خطوط مستقیم کے  
 ایک زوج کو تعبیر کرے تو ک  $\Delta + \Delta = ۰$  سے بھی خطوط مستقیم کا  
 ایک زوج تعبیر ہوگا۔

پس ک کی وہ قیمتیں جن کے لیے مساوات ک س + س =  
 خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، یعنی مساوات (۲) دفعہ ۳۳۱ کی اصلیں  
 محدودوں کے کسی مخصوص محوروں پر منحصر نہیں ہوتی چاہئیں۔ اس لیے  
 چار مقداروں  $\Delta$ ،  $\Delta$ ،  $\Delta$ ،  $\Delta$  کی ایک دوسرے کے ساتھ تبدیلیں  
 ایسی ہونی چاہئیں کہ وہ محدودوں کے محوروں پر منحصر نہ ہوں۔  
 اسی سبب کی بنا پر مقداروں  $\Delta$ ،  $\Delta$ ،  $\Delta$  کو غیر متغیر

کہا جاتا ہے۔

اگر محدودوں کے ایک نظام سے دوسرے نظام میں استحالة میں اور میں پڑانے محدودوں کو نئے محدودوں کی رقوم میں رکھ کر فی الواقع عمل میں لایا گیا ہے تو متذکرہ بالا مقداروں میں سے کسی دو کی نسبتیں، جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں، نہیں بدلیں گی، لیکن اگر صرف یہ معلوم ہو کہ محدودوں کے ایک نظام کے حوالے سے مساواتیں ہیں۔ اور میں = ہیں اور دوسرے نظام کے حوالے سے یہ مساواتیں ہیں۔ اور میں = ہو جاتی ہیں تو اس کی کوئی ضمانت نہیں ہے کہ ان نئی مساواتوں میں سے ایک یا دوسری (دونوں نہیں) کسی مستقل مقدار سے مضروب یا مقسوم نہیں ہے۔ اس لیے یہ ممکن ہے کہ مخروطیوں کی وہ نئی مساواتیں جو حقیقتاً استحالة سے حاصل ہوئی ہیں یا جبکہ دونوں اسی مستقل مقدار سے مضروب یا مقسوم ہوں علی الترتیب  $0 = 3$  اور  $0 = 2$  ہوں اور  $3 + 2 = 5$  کا میز

$$3^2 + 2^2 = 5^2$$

ہو۔ اس طرح یہ واضح ہے کہ اگرچہ نسبتیں  $5 : 3 : 2$  : تمام صورتوں میں مستقل نہ ہوں تاہم ان مقداروں کے درمیان کوئی ایسا رشتہ جو متجانس ہو جبکہ  $5^2 : 3^2 : 2^2$  سب کے سب وہی ابعاد کے ہوں اور نیز جبکہ وہ ترتیب وار  $0, 1, 2, 3$  ابعاد کے ہوں دونوں صورتوں میں درست رہے گا خواہ مخروطیوں کی مساواتوں کو کسی طرح بھی تبدیل کیا جائے۔

(۲۲۲) — حسب ذیل صورتوں میں جو غیر متغیر حاصل کیے گئے ہیں



وہ آئندہ کارآمد ہونگے۔

۱۔ اگر  $\text{س} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = ۰$

$\text{س} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = ۰$

تو ک  $\text{س} + \text{س} =$  کا مینر  
(ک + ع) (ک + و) (ک + ط)

ہے۔ اس لیے

$\Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = \Delta$

۲۔ اگر  $\text{س} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = ۰$

$\text{س} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = ۰$

تو مینر

ک	ع	ن	م
ن	ک	و	ل
م	ل	ک	ط

ہے۔ اس لیے  $\Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = ۰$

۳۔ اگر  $\text{س} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = ۰$

$\text{س} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = ۰$

۲۔ لہ جہ عہ ۲۔ لہ جہ عہ ۲۔

تو مینر

ک + ع	لہ	لہ	لہ
لہ	ک + و	لہ	لہ
لہ	لہ	ک + ط	لہ

ہے۔ اس لیے  $\Delta = \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = ۰$

$\Delta = ۰$

۴۔ اگر  $\text{س} \equiv \text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = ۰$

۲۔ لہ جہ عہ ۲۔ لہ جہ عہ ۲۔

$$س = ۲ل + ۲ج + ۲م + ۲ع + ۲ن + ۰ =$$

ک ل	- ک ل م + ن	- ک ل م + ن
- ک ل م + ن	ک م	- ک م ن + ل
- ک ن ل + م	- ک م ن + ل	ک ن

ہے۔ اس لیے  $\Delta = ۲ل + ۲م + ۲ن + ۰$  طہ = ۲ل + ۲م + ۲ن + ۰

اس طرح طہ = ۲ل + ۲م + ۲ن + ۰

۵۔ اگر  $س = ۲ل + ۲م + ۲ن + ۰ =$

(۴۲۳)

$$س = (۲ل + ۲م + ۲ن + ۰) + (۲ل + ۲م + ۲ن + ۰) =$$

ک	۱ +	۰	- ع
۰	۱ +	۰	- ع
- ع	- ع	- ع	- ع

ہے۔ اس لیے  $\Delta = ۲ل + ۲م + ۲ن + ۰$  طہ = ۲ل + ۲م + ۲ن + ۰

$$طہ = ۲ل + ۲م + ۲ن + ۰ = \Delta (۲ل + ۲م + ۲ن + ۰)$$

۶۔ اگر  $س = (۲ل + ۲م + ۲ن + ۰) + (۲ل + ۲م + ۲ن + ۰) =$

$$س = (۲ل + ۲م + ۲ن + ۰) + (۲ل + ۲م + ۲ن + ۰) =$$

ک	۱ +	۰	- ع
۰	۱ +	۰	- ع
- ع	- ع	- ع	- ع

ہے۔ اس لیے  $\Delta = - غہ^۲، \Delta = - ر^۲$   
 $طہ = (عہ - ف) + (بہ - ق) - غہ^۲ - ر^۲$   
 $طہ = (عہ - ف) + (بہ - ق) - غہ^۲ - ر^۲$   
 ۳۳۴۔ دفعہ ماضی کی مثالوں (۲) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ  
 طہ = ۰ جبکہ س میں کھینچا ہوا مثلث س کے لیے خود قطبی ہو اور  
 نیز جبکہ س کا محاط مثلث س کے لیے خود قطبی ہو۔ نیز ہم جانتے  
 ہیں کہ اگر ان صورتوں میں سے کسی ایک میں ایسا ایک مثلث ہو تو ایسے  
 مثلث تعداد میں لامتناہی ہوں گے۔  
 اس کے بالعکس اگر طہ = ۰ تو س میں ایسے مثلث کھینچے  
 جاسکتے ہیں جو س کے لیے خود قطبی ہوں اور نیز س کے گرد ایسے  
 مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جو س کے لیے خود قطبی ہوں۔  
 فرض کرو کہ س کے لحاظ سے س پر کے کسی نقطہ کا قطبی، س کو  
 مکرر ب ج پر قطع کرتا ہے۔  
 اب مثلث (ب ج کے حوالے سے

$$س = عہ + وہ + طہ + عہ + عہ = ۰$$

$$س = ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۱۰$$

اور اس لئے کہ س + س کا مینر

(۴۲۴)

ک	ن	م
ن	ک	ک
م	ک	ک

ہے۔ پس اگر طہ = ۰، تو ل عہ = ۰۔  
 جب عہ = ۰، تو مخروطی میں دو خطوط مستقیم مشتمل ہوتا ہے جو  
 (۱) میں سے گزرتے ہیں، اور جب ل = ۰، تو س خط مستقیم ب ج  
 میں اور (۱) میں سے گزرنے والے ایک دوسرے خط میں تحویل ہوتا ہے

جہاں 'ا' س کے لحاظ سے ب ج کا قطب ہے۔ ان صورتوں کو خارج کرنے پر جن میں کہ ایک مخروطی خطوط مستقیم کے زون میں تحول ہوتا ہے  $\epsilon = 0$ ۔ حاصل ہوتا ہے اور اس لیے 'ا ب ج' س کے لیے خود قطبی ہے۔

پھر فرض کرو کہ س کے لحاظ سے س کے کسی مماس ب ج کا قطب 'ا' ہے اور فرض کرو کہ 'ا' سے س کے مماس 'ا ب' 'ا ج' ہیں تب مثلث 'ا ب ج' کے حوالے سے

$$س \equiv ل + \epsilon + م^2 + ن^2 + ج^2 - ۲ن ل ج - ۲م ج - ۲ن ج = ۰$$

$$- ۲ل م ج - ۲ن ج = ۰$$

$$اور س \equiv \epsilon + \epsilon^2 + \omega^2 + \epsilon^2 + ط ج^2 + ۲\epsilon^2 + ج^2 = ۰$$

پس مینر

ک ل + ۲	- ک ل م	- ک ن ل
- ک ل م	ک م + ۲ و	- ک م ن + ۲
- ک ن ل	- ک م ن + ۲	ک ن + ط

ہے۔ اس لیے اگر ط = ۰۔ تو  $\epsilon^2 ل + م^2 ن = ۰$ ۔ اگر ل یا م یا ن صفر ہو تو س منطبق خطوط مستقیم کے زون کو تعبیر کرے گا، اس لیے ان خطی مخروطیوں کو خارج کرنے پر ہمیں  $\epsilon = ۰$  حاصل ہوتا ہے اور اس لیے 'ا ب ج' س کے لیے خود قطبی ہے۔

پس جب ط = ۰، تو س میں مثلثوں کی لامتناہی تعداد

کھینچی جاسکتی ہے جو س کے لیے خود قطبی ہوں اور نیز س کے گرد مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو س کیلئے خود قطبی ہوں۔

۳۳۵ — دفعہ ۳۳ کی مثال (۴) میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر  $s$  کا اندرونی مثلث  $s$  کو مائل کرے تو  $\Delta - \Delta - \Delta = 0$ ۔ اس کا مسئلہ عکس ثابت کرنے کے لیے فرض کرو کہ  $s$  کا کوئی مما  $s$  کو  $b$  ج پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ  $b$  ج ہے دوسرے  $s$  پر ملے ہیں۔

تب مثلث  $(b$  ج کے حوالے سے

$$s \equiv l^2 + e^2 + m^2 + n^2 - 2n - 2l - 2e$$

$$- 2l - 2m - 2e$$

$$s \equiv e^2 + e^2 + 2 + 2 + 2 - 2e - 2e - 2e = 0$$

(۴۲۵)

پس  $s + s$  کا مینر

$k + l + e$	$- k + l + m + e$	$- k + n + l + e$
$- k + l + m + e$	$k + m$	$- k + m + n + e$
$- k + n + l + e$	$- k + m + n + e$	$k + n$

ہے اور اس لیے

$$\Delta = - 2l - 2m - 2n$$

$$\Delta = 2l - 2m - 2n + 2e + 2e + 2e$$

$$\Delta = - (2l - 2m - 2n + 2e + 2e + 2e)$$

$$\text{پس اگر } \Delta - \Delta = 0 \text{ تو } l - m - n = 0$$

اس طرح  $e = 0$  اور اس لیے مثلث  $(b$  ج  $s$  کا اندرونی

اور نیز  $s$  کا مائل مثلث ہے۔

[اگر  $e = 0$  تو  $s$  سے دو خطوط مستقیم تعمیر ہوں گے جن میں سے ایک  $s$  کو  $m$  کرے گا۔ نیز اگر  $l$  یا  $m$  یا  $n$  صفر ہو تو  $s$  سے منطبق خطوط مستقیم کے زوج تعمیر ہوں گے۔]

۳۳۶ — پچھلے دو دفعوں سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر  $e = 0$  اور

طہ = . تو س یا س میں مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے اور نیز س یا س کے گرد مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے نیز یہ کہ مثلثوں کی لامتناہی تعداد س یا س میں یا ان میں سے کسی ایک کے گرد کھینچی جاسکتی ہے جو دوسرے کے لحاظ سے خود قطبی ہوں۔

مثال ۱۔ اگر ایک دائرہ کو ایک مکانی کے واسطے میں سے کھینچا جائے تو دائرہ میں ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع مکانی کو مس کریں۔

ک (ما-۴ ولا) + لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما-۱-۲ گ ۱ کے

میز میں  
 $\Delta = ۴ - ۲ ط = ۲$  (۱-گ) اور طہ = (۱-گ) ۲  
 $\therefore طہ - ۴ ط = ۵ ط = ۰$

مثال ۲۔ اگر ایک دائرہ کا مرکز ایک مکانی کے مرتب پر ہو تو مکانی کے گرد مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو دائرہ کے لیے خود قطبی ہوں۔ نیز دائرہ میں مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو مکانی کے لیے خود قطبی ہوں۔

فرض کرو  $س \equiv (لا + ع) + (ما + ب) - ۲ = ۰$

س  $\equiv ما - ۴ ولا = ۰$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{تب ک س} + \text{س کا مینر} & & \\ \hline \text{ک} & \text{ک} & \text{ک عہ - ۱۲} \\ \hline \text{ک عہ - ۱۲} & \text{ک + ۱} & \text{ک بہ} \\ \hline \text{ک عہ - ۱۲} & \text{ک بہ} & \text{ک (عہ - ۲)} \\ \hline \end{array}$$

ہے جس میں طہ = ۰

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ دائرہ کے مرکز سے مکانی کے دو محاس اور  
لاتناہی پر کا خط مکانی کے گرد ایک مثلث بناتے ہیں جو دائرہ کے لیے خود  
قطبی ہے۔

(۴۲۶) مثال ۳۔ ثابت کرو کہ تین مخروطی

$$\text{س} \equiv \text{ا} - \text{ا} = ۰, \text{س} \equiv \text{لا} - \text{ا} = ۰, \text{س} \equiv \text{ا} + \text{ا} = ۰$$

اس طرح مربوط ہیں کہ ان میں سے کسی ایک میں مثلثوں کی  
لاتناہی تعداد اور دوسرے دو میں سے کسی ایک کے گرد مثلثوں کی  
لاتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے اور نیز ان میں سے کسی ایک کے گرد  
مثلثوں کی لاتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو باقی دو میں سے  
کسی ایک کے لیے خود قطبی ہوں۔

$$\begin{array}{l} \text{ک س} + \text{س کا مینر} \\ \text{ک}^۲ + \text{ب}^۲ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ہے اور ک س} + \text{س کا مینر} \\ \text{ک}^۳ + \text{ب}^۳ \\ \text{ہے اور ک س} + \text{س کا مینر} \end{array}$$

ب ک ۳ + ۱

ہے۔ ان تینوں صورتوں میں طہ = . اور طہ = .

مثال ۴۔ ایک مثلث ایک مخروطی کے لیے خود قطبی ہے،  
ثابت کرو کہ مثلث کا حاطہ دائرہ مخروطی کے مرتب دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

$$\text{فرض کرو کہ مخروطی سے } \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰$$

$$\text{اور دائرہ سے } (لا - عہ) + (ما - بہ) - ر = ۰$$

ہے۔ تب ک سے + سے کے مینر میں طہ کو صفر ہونا چاہئے کیونکہ سے میں  
کھینچا ہوا مثلث سے کے لیے خود قطبی ہے۔  
لیکن [دفعہ ۳۳۳ مثال ۵]

$$\text{طہ} = \frac{۱}{لا + ما} (عہ + بہ - ر - ۱ - ب)$$

$$\text{اس لیے } عہ + بہ = ر + ۱ + ب$$

اور اس لیے سے ' لا + ما = ۱ + ب کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

اب طہ = . وہ شرط بھی ہے کہ سے کا حاطہ مثلث سے کے لیے خود  
قطبی ہو۔ اس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

اگر ایک مخروطی کو ایک مثلث میں کھینچا جائے تو مثلث کا  
قطبی دائرہ مخروطی کے مرتب دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

$$\text{مثال ۵۔ ثابت کرو کہ مخروطی سے } \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰ \text{ میں}$$



ایسے مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جن کے ضلع، مخروطی س =  $\frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$  کو مس کریں اگر  $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm 1 = 0$ ۔

ک س + س کا مینر

$$0 = (1 + k) \left( \frac{1}{2} + \frac{k}{2} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{k}{2} \right)$$

ہے۔ اس لیے  $\Delta = \frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$ ،  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$$

(۴۲۷)

پس شرط  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$  پوری ہوگی اگر

$$0 = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right)$$

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm 1 = 0 \quad \text{یعنی اگر}$$

۳۳۷۔ مخروطی س میں اور مخروطی س کے گرد کھینچے ہو

مثلث کے مرکز عمودی کا طریق ایک مخروطی ہوتا ہے۔

فرض کرو س =  $\frac{1}{2}$  لا +  $\frac{1}{2}$  با +  $\frac{1}{2}$  گا +  $\frac{1}{2}$  نا +  $\frac{1}{2}$  جا = ۰

$$\text{اور} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

فرض کرو کہ س میں اور س کے گرد کھینچے ہوئے مثلث کا مرکز عمودی (عہ، یہ) ہے۔ اب چونکہ مرکز عمودی مثلث کے قطبی دائرہ کا مرکز ہوتا ہے اس لیے س میں اور س کے گرد کھینچے ہوئے مثلث کو غہ کی کسی قیمت کے لیے دائرہ

$$ج \equiv (لا - عہ) + (ما - بہ) - غہ$$

کے لیے خود قطبی ہونا چاہئے۔

$$\text{پس } ک س + ج \text{ کے مینر میں طہ} =$$

$$\text{اور } ک س + ج \text{ کے مینر میں طہ} =$$

$$\text{اب } ک س + ج \text{ کا مینر}$$

ک ۱ + ۱	ک ۱	ک ۱ - عہ
ک ۱	ک ۱ + ۱	ک ۱ - بہ
ک ۱ - عہ	ک ۱ - بہ	ک ۱ + ج + عہ + بہ - غہ

ہے اور طہ = ۱ + عہ + ۲ + عہ + بہ + ب + ۲ + گ + عہ + ۲ + ف + بہ + ج - (۱ + ب) - غہ = ۰

$$\text{نیز } ک س + ج \text{ کا مینر}$$

ک ۱ + ۱	ک ۱	ک ۱ - عہ
ک ۱	ک ۱ + ۱	ک ۱ - بہ
ک ۱ - عہ	ک ۱ - بہ	ک ۱ + ج + عہ + بہ - غہ

ہے اور طہ = ۱ + عہ + ۲ + عہ + بہ - غہ - (۱ + ب) - غہ = ۰

پس (عہ، یہ) مخروطی  
س = (لا + ما - ۱ - ب) (لا + ما - ۱ - ب)

پہلے۔  
۳۳۸۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو مخروطی ایک دوسرے کو  
مس کریں۔  
مخروطیوں کی مساداتوں کو

$$س = ۱ + لا + ۲ + لا + لا + ب + ما + ۲ + ف + ما = ۰$$

$$س = ۱ + لا + ۲ + لا + لا + ب + ما + ۲ + ف + ما = ۰$$

یا جاسکتا ہے۔ ک س + س + س کا مینر

$$(۱) \quad (ک + ۱) (ک + ۱) (ک + ۱) \dots \dots \dots$$

$$ہے اس لیے ۵ = ۱ + ف + ۲، ۶ = ۱ + ف + ۲ + ف + ۱ + ف + ۲$$

$$۶ = ۱ + ف + ۲ + ف + ۱ + ف + ۲ + ف + ۱ + ف + ۲$$

$$اب \quad ۶ - ۵ = ۱ = ۲ + ف - (۱ + ف) = ۱$$

$$۶ - ۵ = ۱ = ۲ + ف - (۱ + ف) = ۱$$

$$اور \quad ۶ - ۵ = ۱ = ۲ + ف - (۱ + ف) = ۱$$

پس مطلوبہ شرط

$$(۲) \quad (۶ - ۵) = ۱ = ۲ + ف - (۱ + ف) = ۱ \dots \dots$$

ہے۔

اگر مخروطی دوسرے رتبہ کا تاس رکھیں تو  $\frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$  اور اس لیے

$$۶ - ۵ = ۱ = ۲ + ف - (۱ + ف) = ۱$$

رشتہ (۲) کو اس واقعہ سے بھی معلوم کیا جاسکتا ہے کہ مخروطیوں کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کے تین زوجوں میں سے دو زوج منطبق ہوتے ہیں جبکہ مخروطی مس کرتے ہیں اور اس لیے کبھی

$$\Delta k^3 + \Delta k^2 + \Delta k + \Delta = 0.$$

کی دو اصلیں مساوی ہیں۔  
پس ک کو اوپر کی مساوات اور مساوات

$$\Delta k^3 + \Delta k^2 + \Delta k + \Delta = 0.$$

سے ساقط کرنا ہے۔  
پہلی مساوات کو ۳ سے اور دوسری کو ک سے ضرب دو اور تفریق کرو تو

$$\Delta k^3 + \Delta k^2 + \Delta k + \Delta = 0.$$

پس

$$\frac{1}{\Delta k^2 - \Delta k - \Delta} = \frac{k}{\Delta k^2 - \Delta k - \Delta} = \frac{k^2}{\Delta k^2 - \Delta k - \Delta}$$

اور اس لیے

$$(\Delta k^2 - \Delta k - \Delta) = (\Delta k^2 - \Delta k - \Delta) = (\Delta k^2 - \Delta k - \Delta)$$

اب ان مخروطیوں کے نصف قطر انحاء

(۴۲۹)

غم =  $\frac{f}{1}$  اور غم =  $\frac{f}{1}$

ہیں۔ اور ممیز کی اصلیں

-  $\frac{f}{f}$  ،  $\frac{f}{f}$  ، اور -  $\frac{1}{1}$

ہیں۔ اس لیے مکرر اصل کو دوسری اصل کے ساتھ نسبت

$\frac{1}{f} = \frac{f}{f}$

ہے۔

اس طرح  $s_1$  اور  $s_2$  کے انحنائوں کی نسبت ان کے نقطہ تماس پر اس نسبت کے مساوی ہے جو  $k_1$  اور  $k_2$  کے ممیز کی مکرر اصل کو دوسری اصل کے ساتھ ہے۔

۳۳۹۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک چار ضلعی کو ایک

مخروطی میں اور دوسرے مخروطی کے گرد کھینچا جاسکے۔

فرض کرو کہ وتری مثلث کے حوالے سے چار ضلعی کے چار ضلع  
 $l = a \pm b \pm c \pm d$  یا  $l = a \pm b \pm c \pm d = 0$  ہیں۔

تب  $s_1 = a + b + c + d = 0$  ان چار خطوں کو مس کرے گا اگر

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0 \quad (1)$$

ان خطوں کے نقاط تقاطع میں سے چار

ہیں۔ اس مخروطی کی عام مساوات جو ان چار نقطوں میں سے گزرتا ہے

$$s_1 = -l^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2abcd = 0$$

ہے۔

ک  $s_1 + s_2$  کا ممیز

ک	ب	ا	ن
۰	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱





عہ، بہ، جہ کو علی الترتیب مس کرتے ہیں اور وہ سب مس اور مس کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔  
اب ک مس، س، کے لیے ممیز

$\begin{array}{ccc} \text{ک-ن-۱-لہ} & \text{ن-۱-لہ} & \text{ک-م-۱-لہ} \\ \text{ک-ن-۱-لہ} & \text{ک-ل-۱-لہ} & \text{ک-م-۱-لہ} \\ \text{ک-م-۱-لہ} & \text{ک-ل-۱-لہ} & \text{ک-ل-۱-لہ} \end{array}$
--

ہے اور یہ معلوم ہوگا کہ

$$\Delta = 2 \text{ ل م ن}$$

$$\text{ط} = (\text{ل} + \text{م} + \text{ن}) + 2 \text{ ل م ن} + 2 \text{ ل م ن} + 2 \text{ ل م ن}$$

$$\text{ط} = 2(\text{ل} + \text{م} + \text{ن}) + 2 \text{ ل م ن} + 2 \text{ ل م ن} + 2 \text{ ل م ن}$$

$$\Delta = (2 \text{ ل م ن} + 2 \text{ ل م ن} + 2 \text{ ل م ن}) + 2 \text{ ل م ن}$$

$$\text{پس } \text{ط} = \Delta = 2 \text{ ل م ن} = 2(\text{ل} + \text{م} + \text{ن})$$

$$\text{ط} = \Delta = 2 \text{ ل م ن} = 2(\text{ل} + \text{م} + \text{ن}) + 2 \text{ ل م ن}$$

$$\Delta + \Delta = 2 \text{ ل م ن} = 2(\text{ل} + \text{م} + \text{ن}) + 2 \text{ ل م ن}$$

$$\text{اس لیے } 2 \text{ ل م ن} = (\text{ط} + \Delta) + (\Delta + \Delta) = (\text{ط} + \Delta) + 2 \text{ ل م ن}$$

اور یہ مطلوبہ شرط ہے۔

اب فرض کرو کہ مخروطی مس، = معلوم ہے اور نیز لہ اور لہ کی قیمتیں بھی معلوم ہیں۔

لہ دیکھو سامن کی مخروطات صفحہ ۳۳۱۔



تب اوپر کے رشتہ سے لم معلوم کرنے کے لیے ایک دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے (یہ مساوات مفرد مساوات میں تحویل ہوگی اگر لہ = لم)۔ اس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے :

**مسئلہ۔** اگر ایک مثلث کو ایک دیے ہوئے مخروطی میں کھینچا جائے اور مثلث کے دو ضلع علی الترتیب مخروطیوں میں اور میں کو مس کریں اور مخروطی میں، میں، میں سب کے سب چار مشترک نقطوں پر متقاطع ہوں تو مثلث کا تیسرا ضلع ان چار نقطوں میں سے گزرنے والے دو دوسرے ثابت مخروطیوں میں سے ایک کو مس کرے گا۔

یہ معلوم ہوگا کہ تیسرے ضلع کا لافان دو مخروطیوں پر متعلق ہے کیونکہ اگر میں، اکاوہ و ترا ب جو میں کو مس کرتا ہے کھینچا جائے تو ب سے مخروطی میں کے دو تماس ہوں گے اور ج کے دو ممکن محل، نظام کے مختلف مخروطیوں کو مس کریں گے۔ لیکن اگر مثلث ترا ب بغیر کسی اچانک تبدیلیوں کے ترتیب وار مختلف ممکن محل اختیار کرتا جائے تو تیسرا ضلع ہمیشہ ایک ثابت مخروطی کو مس کرے گا۔

(۴۳۲)

اوپر کے مسئلہ کی توسیع متعدد ضلعوں کے کثیر ضلعی کی صورت پر کیجا سکتی ہے۔ مثلاً چار ضلعی ترا ب ج د پر غور کرو جیسا ہے کہ نقطے ا، ب، ج، د مخروطی میں، پر ہیں اور اس لیے ترا ب، میں کو مس کرتا ہے، ترا ج، میں کو اور ترا د، میں کو جہاں میں، میں، میں سب کے سب مخروطیوں کے ایسے نظام سے متعلق ہیں جو چار مشترک نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں۔ تب چونکہ ترا ب اور ترا ج، نظام کے مخروطیوں کو مس کرتے ہیں

اس لیے خط  $اج$  بھی نظام کے ایک مخروطی کو مس کرے گا (مسئلہ)۔  
اب  $اج$  اور  $ج د$  نظام کے مخروطیوں کو مس کرتے ہیں اور اس لئے  
اور  $د$  بھی نظام کے ایک مخروطی کو مس کرے گا۔ اسی طرح متعدد ضلعوں  
کے کسی کثیر ضلعی کی صورت میں ثابت کیا جاسکتا ہے۔

یہ تمام مخروطی ہم محور دائروں میں مطلق کیے جاسکتے ہیں اور اس طرح  
پانسلٹ (Poncelet) کا مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔ [دیکھو وفات  
۳۰، ۳۱، ۳۲ اور اقلیدس صفحہ ۲۰۰ مصنفہ اسمتھ اور برانٹ]

ایک مخصوص صورت کے طور پر حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک مخروطی میں کھینچا جائے اور  
اس کے تمام ضلع الا ایک کے ایک دوسرے مخروطی میں کو مس  
کریں تو بقیہ ضلع ایک تیسرے مخروطی میں کو مس کرے گا جو  
میں اور میں کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے اور اگر  
بقیہ ضلع اپنے ایک محل میں میں کو مس کرے تو وہ تمام محلوں  
میں میں کو مس کرے گا۔

یہ اندرونی اور باہر کثیر ضلعیوں کا (Porism) ہے یعنی ایک  
ایسے کثیر ضلعی کو ایک مخروطی میں کھینچنے کا مسئلہ جس کے ضلع دوسرے  
مخروطی کو مس کریں بالعموم ناممکن ہے لیکن اگر کوئی ایسا کثیر ضلعی  
موجود ہو تو ایسے کثیر ضلعی تعداد میں لامتناہی ہوں گے۔

## پندرہویں باب پر مثالیں

۱۔ مثلثوں کی لامتناہی تعداد دائرہ  $ل^۱ + ل^۲ = (ل + ب)$  میں اور ناقص

$$\frac{ل^۱}{ل} + \frac{ل^۲}{ب} = ۱ \text{ کے گرد کھینچی جاسکتی ہے۔}$$

۲۔ مثلثوں کی لامتناہی تعداد  $\frac{ل^۱}{ل} + \frac{ل^۲}{ب} = ۱$  میں اور  $ل^۱ + ل^۲$

$$= \frac{ل^۱ + ل^۲}{(ل + ب)} \text{ کے گرد کھینچی جاسکتی ہے۔}$$

۳۔ نصف قطر کا ایک دائرہ ایک مثلث میں جو  $ل^۱ + ل^۲ = ۱$  کے لیے خود قطبی ہے کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق مکانی  $ل^۱ + ل^۲ = ۱$  ہے۔

۴۔ مثلثوں کی لامتناہی تعداد  $\frac{ل^۱}{ل} + \frac{ل^۲}{ب} = ۱$  میں اور  $\frac{ل^۱}{ل}$

$$+ \frac{ل^۲}{ب} = \frac{۱}{(ل + ب)} \text{ کے گرد کھینچی جاسکتی ہے۔}$$

۵۔ مثلثوں کی لامتناہی تعداد  $ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ = ۱$  میں اور

$ل^۱ + ل^۲ + ل^۳ = ۱$  کے گرد  $ل$  اور  $ل$  کی تمام قیمتوں کے لیے کھینچی جاسکتی ہے۔

۶۔ اگر دو مساوی دائروں کا مشترک وتر نصف قطر کے مساوی

ہو تو ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد ایک دائرہ میں کھینچی جاسکتی ہے جن کے

ضلع دوسرے دائرہ کو مس کریں، نیز مثلثوں کی لامتناہی تعداد کسی ایک دائرہ

میں یا اس کے گرد کھینچی جاسکتی ہے جو دوسرے دائرہ کے لیے خود قطبی ہوں۔

۷۔ ثابت کرو کہ  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  میں ایسے مثلثوں کی لا متناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  =  $\Delta^2$  کو مس کریں۔  
 ۸۔ وہ شرط کہ  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  اور  $\Delta^2$  =  $\Delta^2$  کے دو نقاط تقاطع پر  $\Delta^2$  کے ماس،  $\Delta^2$  پر ہیں یہ ہے کہ

$$\Delta^2 = (\Delta^2 - \Delta^2 - \Delta^2)$$

۹۔ ثابت کرو کہ ایسے متساوی الاضلاع مثلثوں کے مرکروں کا

$$\text{طریق جو } \frac{\Delta^2}{\Delta^2} + \frac{\Delta^2}{\Delta^2} = 1 \text{ کے لیے خود قطبی ہوں}$$

$$\Delta^2 (\Delta^2 - \Delta^2 - \Delta^2) + \Delta^2 (\Delta^2 - \Delta^2 - \Delta^2) = (\Delta^2 - \Delta^2 - \Delta^2)$$

ہے۔

۱۰۔ اگر  $\Delta^2 = \Delta^2$  ط<sup>۲</sup> تو ثابت کرو کہ ایک مخروطی ایسا کھینچا جاسکتا ہے جو مخروطیوں  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  میں سے ہر ایک کے ساتھ تیسرے رتبہ کا تماس رکھے۔

۱۱۔ اگر ایک مثلث کے دو ضلع مخروطی  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  کو مس کریں اور اس کے راس مخروطی  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  پر ہوں تو تیسرے ضلع کا لاف مخروطی  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  سے ہوگا۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  میں ایسے مثلثوں کی

لا متناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  =  $\Delta^2$  کو مس کریں

اور نیز ثابت کرو کہ ایسے تمام مثلثوں کے عمودی مرکز دائرہ  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  -  $\Delta^2$  پر ہیں۔

۱۳۔ اگر ایک مثلث کا مرکز عمودی جبکہ مثلث کو ایک مکانی میں کھینچا گیا ہو مکانی کے مرتب پر ہو تو مثلث کا قطبی دائرہ ماسکہ میں سے گزرے گا۔

۱۴۔ ایک مثلث کو ایک ثابت دائرہ میں اور ایک ثابت مخروطی کے گرد کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلث کا نو نقطی دائرہ دو ثابت دائروں کو

مس کرتا ہے۔  
 ۱۵۔ مس میں ایسے مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جن کے ضلع مس کو مس  
 کریں، ثابت کرو کہ ان خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق جو مثلث کے راسوں کو  
 مقابل کے ضلعوں کے تقاطع سے ملاتے ہیں مخروطی  
 ۳ Δ مس - ۲ طہ مس = ۰

ہے۔  
 ۱۶۔ اگر مس میں ایسے مثلث کھینچے جاسکیں جو مس کے لیے خود  
 قطبی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ مثلث جو مس کے ان محاسوں سے بنتے ہیں جو  
 راسوں پر کھینچے گئے ہیں مخروطی  
 Δ مس - طہ مس = ۰  
 کے اندرونی مثلث ہوں گے۔

۱۷۔ دو مخروطیوں مس، مس کا ایک مشترک نقطہ ہے اور  
 'ب'، 'ج' علی الترتیب مس، مس کے ایسے وتر ہیں جو علی الترتیب  
 مس، مس کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ (۱) اگر ب پر مس کے محاس  
 بھی مس کو مس کریں تو مس میں ایسے مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جو مس کے  
 حاط مثلث ہوں اور (۲) اگر ب ج، مس کو مس کرے تو مس میں ایسے  
 مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جو مس کے لیے خود قطبی ہوں اور (۳) اگر  
 ب ج، مس اور مس دونوں کو مس کرے تو مس کے لحاظ سے مس کا  
 متکافی وہی مخروطی ہوگا جو مس کے لحاظ سے مس کا متکافی ہے۔

۱۸۔ مخروطی  $\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ج} - ۱ = ۰$  کے حاط متساوی الاضلاع

مثلثوں کے ہندسی مرکزدں کا طریق

$$۹(لا + لا) - ۲(۵ + ۳)ب - لا - ۲(۳ + ۵)ب - ۲(۵ + ۳)ب - ۲(۵ + ۳)ب = ۰$$

ہے۔

۱۹۔ اگر مخروطی  $\Delta$  کے لحاظ سے مخروطی  $\Delta$  کا قطبی شکافی  $\Delta$  ہو اور  $\Delta$  کے لحاظ سے  $\Delta$  کا قطبی شکافی  $\Delta$  ہو تو ثابت کرو کہ  $\Delta$  میں ایسے مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جو  $\Delta$  کے لیے خود قطبی ہوں اگر

$$\Delta^2 - \Delta^3 = (\Delta^2 - \Delta^3) = 0$$

جہاں  $\Delta$  سے  $\Delta$  = کا مینرک  $\Delta^3 + \Delta^2 + \Delta + \Delta = 0$  ہے۔  
 ۲۰۔ ثابت کرو کہ وہ غیر موسیقی نسبتیں جو مخروطی  $\Delta$  سے  $\Delta$  کے کسی نقطہ پر  $\Delta$  = اور  $\Delta$  = کے تقاطع سے متعین ہوتی ہیں  $\Delta$  سے  $\Delta$  = کے مینرک اصولوں کے فرقوں کی نسبتیں ہیں۔

۲۱۔ اگر دو مخروطی رشتہ

$$\Delta^2 = \Delta^2$$

میں مربوط ہوں اور اگر ان کے دو نقاط تقاطع کو دوسرے دو نقاط تقاطع میں سے کسی ایک سے ملایا جائے تو ثابت کرو کہ اس نقطہ پر کے دو وتروں اور دو محاسوں سے ایک موسیقی پنسل بنے گی۔

۲۲۔ وہ ضروری شرط کہ ایک مخروطی  $\Delta$  کو ایک مثلث میں جو  $\Delta$  کے دو محاسوں اور ان کے وتر  $\Delta$  سے بنتا ہے کھینچا جاسکے یہ ہے کہ

$$\Delta^2 = \Delta^2 - \Delta^2 = 0$$

۲۳۔ دو مخروطی  $\Delta$  اور  $\Delta$  پر متقاطع ہوتے ہیں۔ (۱) پر  $\Delta$  کا محاس  $\Delta$  سے ج پر ملتا ہے اور (۱) پر  $\Delta$  کا محاس  $\Delta$  سے ج پر ملتا ہے۔ ج مخروطیوں سے کمر  $\Delta$  پر ملتا ہے۔ اگر ج اور ج کے لحاظ سے  $\Delta$  ج موسیقی مزدوج ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\Delta^2 + \Delta^2 = 0$$

۲۴۔ ثابت کرو کہ ان خطوں کا لفافہ جو مخروطیوں  $\Delta$  سے  $\Delta$  اور  $\Delta$  سے  $\Delta$  کو موسیقی طور پر قطع کرتے ہیں مخروطی  $\Delta$  سے  $\Delta$  ہے اور  $\Delta$  سے  $\Delta$  کے لحاظ سے  $\Delta$  = کا قطبی شکافی  $\Delta$  سے  $\Delta$  = ہے جہاں

$$\Delta^2 = \Delta^2 - \Delta^2 = 0$$

۲۵۔ اگر ایک چار ضلعی کے تین ضلع میں کو مس کریں اور اس کے  
 اس میں پر ہوں تو ثابت کرو کہ بقیہ ضلع کا لٹاف  
 $(\text{ط}^2 - \Delta^2 \text{ط}^2) \Delta^2 + (\text{ط}^2 - \Delta^2 \text{ط}^2) \Delta^2 + (\text{ط}^2 - \Delta^2 \text{ط}^2) \Delta^2 = 0$

ہے۔  
 ۲۶۔ اگر اس میں  $= 0$  اور اس میں  $= 0$  کے مشترک حاس میں  $= 0$  کو جن  
 چار نقطوں پر مس کرتے ہیں ان کو اس کے کسی نقطہ سے ملایا جائے اور اس  
 طریقہ سے حاصل شدہ خطوں سے ایک موسیقی پینل بنے تو ثابت کرو کہ  
 $\text{ط}^2 - 9 \text{ط}^2 \Delta^2 + \Delta^2 \Delta^2 = 0$

۲۷۔ ثابت کرو کہ وہ شرط کہ ایک ایسا مسدس میں  $= 0$  میں  
 کھینچا جاسکے جس کے متصلہ راسوں کا ہر زوج میں  $= 0$  کے لحاظ سے  
 مزدوج ہو یہ ہے کہ  
 $\text{ط}^2 = \Delta^2 (\text{ط}^2 - \Delta^2 \Delta^2)$

اس لیے ثابت کرو کہ ایک ایسے مسدس کو ایک محروطی کے مرتب  
 دائرہ میں کھینچا جاسکتا ہے کہ اس کے متصلہ راسوں کا ہر زوج محروطی کے  
 لحاظ سے مزدوج ہو۔

# متفرق مثالیں

(۲۲۶)

۱۔ ثابت کرو کہ ایک ثابت دائرہ اور مستقل نصف قطر کے ایک متغیر دائرہ کا بنیادی محور ایک مکانی کولف کرتا ہے جبکہ متغیر دائرہ کا مرکز ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر رہے۔

۲۔ ایک ثابت دائرہ کی مساوات

$$لا + ما^2 + ۲ لا ما جم + ۲ ک لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

ہے اور ایک دائرہ لا = ۰ اور ما = ۰ کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان دو دائروں کا بنیادی محور مکانیوں

$$(لا \pm ما)^2 + ۲ ک لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتا ہے۔

۳۔ اگر ایک مثلث ف ق س کو ایک مکانی میں کھینچا جائے اور اس کے دو ضلع دیے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث ف ق س کے ہندسی مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ مخروطی

$$لا + لا^2 + ۲ ب ما - ۴ (ب + ۱) ج لا - (۱ + ب) ج^2 = ۰$$

کے چار وتر ایسے ہیں جن کے محاذی نقطہ (۰، ۰) پر قائمہ زاویہ بنتا ہے اور نیز یہ وتر دائرہ لا + ما^2 - ۲ ج لا = ۰ کو مس کرتے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ یہ چار خط ایک مربع بناتے ہیں۔

۵۔ اگر ایک مکانی کے نقطوں ف، ق، س پر کے عماد نقطہ ل پر ملیں تو وہ خط جو ل کو ف، ق، س پر کے مماسوں سے بنے ہوئے



مثلث کے مرکز عمودی سے ملتا ہے مکانی کے محور کے متوازی ہوگا۔

۶۔ اگر ایک مکانی کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد ہم نقطہ ہوں تو اس مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی جو 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے ماسوں سے بنے ایک ثابت مکانی پر ہوں گے۔

۷۔ ایک مخروطی کے مرتب دائرہ کے کسی نقطہ سے اس نقطہ کے قطبی (بلحاظ مخروطی) پر عمود کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس عمود کے پائین کا طریق ایک ہم ماسکی مخروطی ہے۔

۸۔ ایک خود قطبی مثلث کے راسوں سے دائرہ لا + ما - لا = ۰ کے (۱۷۳۰) ماس کھینچے گئے ہیں جن کے طول ت<sub>۱</sub>، ت<sub>۲</sub>، ت<sub>۳</sub> ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) \quad ت_1^2 + ت_2^2 + ت_3^2 = (۲) \quad ت_1^2 + ت_2^2 + ت_3^2 + ت_4^2$$

= ۴ جہاں Δ سے مثلث کا رقبہ تعبیر کیا گیا ہے۔

۹۔ 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے ایک مثلث ہے جو ما - لا = ۰ کے لیے خود قطبی ہے اور 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے گزرتے ہوئے قطر مقابل کے ضلعوں سے علی الترتیب 'ف'، 'ق'، 'س' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$۲\Delta + ۱ \times ف \times ق \times ق \times ق = ۰$$

۱۰۔ اگر ایک مثلث کے راس (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما) ہوں

اور مثلث، لا + ما - لا = ۰ کے لیے خود قطبی ہو تو ثابت کرو کہ

$$۲\Delta + ۱ \times ف \times ق \times ق \times ق = ۰$$

۱۱۔ اگر ایک نقطہ و کے فاصلے تین ناہم خط نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' سے ع، پ، ج ہوں تو و سے دائرہ ج ب ج کے ماس و کا طول

۱۱	وت (۵) (ب ج) +	عہ	۰	عہ	۲	جہ	۲
۱۲	وت (۵) (ب ج) +	عہ	۰	عہ	۲	جہ	۲
۱۳	وت (۵) (ب ج) +	عہ	۰	عہ	۲	جہ	۲
۱۴	وت (۵) (ب ج) +	عہ	۰	عہ	۲	جہ	۲

سے حاصل ہوگا۔

۱۲۔ اگر ما۔ ۴ لا = ۰ کے نقطوں ف، ق، سرا پر کے عماد نقطہ (عہ، بہ) پر ملیں تو اس مثلث کا حائل دائرہ جو ف، ق، سرا پر کے ماسوں سے بنے مساوات

$$لا + ما - (۱۳ - عہ) لا + بہ + ما - (۱۲ - عہ) = ۰$$

سے حاصل ہوگا۔ نیز دائرہ کا قطر اس فاصلہ کے مساوی ہوگا جو ماس کے عمادوں کے نقطہ تقاطع کے درمیان ہے۔

۱۳۔ اگر ایک مثلث ایک مکانی کے لیے خود قطبی ہو تو اس کا حائل مرکز مرتب ہوگا۔

۱۴۔ اگر ایک مکانی کے نقطوں ف، ق، سرا پر کے عماد نقطہ ہوں تو اس مثلث کا نو نقطی دائرہ جو ف، ق، سرا پر کے ماسوں سے بنے مکانی کے اس میں سے گزرے گا۔

۱۵۔ ایک مکانی کے نقطوں ف، ق، سرا پر کے ماس مثلث ف، ق، سرا بناتے ہیں اور مثلثوں ف، ق، سرا اور ف، ق، سرا کے مرکز ہندسی گ، گ ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر گ کا طریق ایک خط مستقیم ہو تو گ کا طریق ایک مکانی ہوگا اور یہ کہ اگر گ کا طریق ایک خط مستقیم ہو تو گ کا طریق ایک مکانی ہوگا۔

۱۶۔ ع سے جو ایک ناقص کے کسی نقطہ ف پر کام کرنا چاہا ہے دود دوسرے عماد ع، ق، ع را کیجئے گے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق، سرا اور ف پر کے عماد کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے۔

۱۷۔ اگر ایک ناقص کامرکز ایک اندرونی مثلث کامرکز عمودی ہو تو مثلث کے راسوں پر کے عماد ہم نقطہ ہوں گے۔

۱۸۔ مخروطیوں ۴ لا + ۲ ما + ۶ لا = ۴ ما + ۴ لا + ۳ ما = ۸ لا + ۶ ما + ۶ لا = ۱۰ کی مساواتیں ان کے مشترک خود قطبی مثلث کے حوالے سے معلوم کرو۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ مساواتوں

$$لا = لا^۲ + ۲ ب ت + ج^۲ \quad ما = لا^۲ + ۲ ب ت + ج^۲$$

سے جہاں ت متغیر ہے ایک مکانی حاصل ہوتا ہے اور اس کے مرتب کی مساوات

$$لا + لا = ما = لا = ج - ب + ج - ب$$

ہے۔

۲۰۔ اگر ایک مخروطی دو دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے اور دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے تو دے ہوئے نقطوں پر کے عماد ایک یا دو سرے ثابت خط مستقیم پر متقاطع ہوں گے۔

۲۱۔ اگر چار دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریقی ج = ۰ ہو تو اس نظام کے تمام مخروطیوں کے لیے ج پر کے کسی نقطہ کے قطبی متوازی خطوط مستقیم ہوں گے۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ کے لحاظ سے ان تمام مخروطیوں کے مکانی جو اس نقطہ میں سے گزریں اور جن کا دائرہ انحناء اس نقطہ پر وہی ہو مساوی مکانی ہیں۔

۲۳۔ اگر ما - ۴ لا = ۰ میں کھینچے ہوئے ایک مثلث کامرکز ہندی ثابت نقطہ (ف، گ) پر ہو تو ثابت کرو کہ اس مثلث کے ضلع مکانی (ما + گ) = ۱۶ لا - ۴ ما - ۲ ف + ۱۸ گ

کو مس کریں گے۔

۲۴۔ ایک مثلث کو لا + ما - ۲ = ۰ میں کھینچا گیا ہے اور اس کا

مرکز عمودی نقطہ (د.) پر ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے ضلع ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں جس کے ماسکے مثلث کا حائط مرکز اور مرکز عمودی ہیں اور جس کا اندازہ دائرہ مثلث کا نو نقطہ دایرہ ہے (یہ دائرہ مثلث کے تمام ممکن محلوں کے لیے وہی ہے)۔

۲۵۔ اگر ایک مثلث کو ایک دائرہ میں اور ایک مکانی کے گرد کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے مرکز ہندسی کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مکانی کے محور پر عمود ہے۔

۲۶۔ ایک ناقص کے اُن نیم قطروں کے مربعوں کا مجموعہ جو ایک اندرونی مثلث کے ضلعوں کے متوازی ہوں اور ناقص کے مرکز سے مثلث کے حائط دائرہ کے تماس کا مربع نیم محوروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتے ہیں۔ (۲۳۹)

۲۷۔ اگر دو مخروطی 'س'، 'س' چار نقطوں پر جو 'س' کے مزدوج قطروں کے سروں پر ہیں متقاطع ہوں تو چار مشترک تماس 'س' کو مزدوج قطروں کے سروں پر مس کریں گے۔

۲۸۔ اگر ایک مثلث کے دور اس ایک ناقص پر ہوں اور تین ضلع دے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو تیسرا اس ایک مخروطی مرسم کرے گا۔

۲۹۔ خط  $ل + م + ا = ۰$  پر کے کسی نقطہ 'ف' سے قائم زائد  $۲$  لا - م - ج = ۰ کے تماس 'ف' 'ق' 'ف' 'س' کھینچے گئے ہیں اور دائرہ 'ف' 'ق' 'س' زائد کو مرکز نقطوں 'ق'، 'س' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ق' 'س' مکانی

(ل + م) (ل + ا) = (ل + م + ا) کو مس کرتے ہیں۔

۳۰۔ اگر ناقص  $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$  کے تماس 'ف' 'ت' 'ق'

ہوں اور مثلث ت ف ق کا مرکز عمودی ناقص پر ہو تو ثابت کرو کہ  
ت مخروطی

$$(\text{ا}^2 + \text{ب}^2) = \text{م}^2$$

پر ہوگا۔

۳۱ — ثابت کرو کہ اُس مکانی کی مساوات جو چار خطوں

$$\text{ولا} \pm \text{ب} = \text{م} = \text{ا}^2, \text{ولا} \pm \text{ب} = \text{م} = \text{ا}$$

کو مس کرتا ہے

$$(\text{ا}^2 - \text{ب}^2) = \text{م}^2 = \text{ا}^2 - \text{ب}^2 \quad \text{اور} \quad (\text{ا} - \text{ب}) \{ (\text{ا} + \text{ب}) - (\text{ا} - \text{ب}) \} \\ + \text{ب}^2 - \text{ا}^2 = \text{ب}^2 - \text{ا}^2$$

ہے۔

۳۲ — ایک ایسے نقطہ کا طریق جس کے معد

$$\text{لا} = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2, \text{م} = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2$$

سے حاصل ہوں جہاں ت ایک متغیر تبدیل ہے ایک مکانی ہوگا جس کا  
وتر خاص

$$\frac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2 - \text{ج}^2)}{(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2)}$$

ہوگا۔

۳۳ — ایک مثلث کو عہ بہ = جہ میں کھینچا گیا ہے اور اس کے  
دو ضلع عہ + جہ = ک جہ کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرا ضلع  
(ک عہ - بہ) (ک بہ - عہ) = جہ  
کو مس کرتا ہے۔

۳۴ — ایک خط مستقیم پر تین ثابت نقطے و، و، و ہیں اور (۲۴۰)  
ف ایک دیے ہوئے مخروطی پر کوئی نقطہ ہے۔ ف و مخروطی کو

مکرر ق پ ر ق و مخروطی کو س پ ر اور س و مخروطی کو س پ ر قطع کرتا ہے۔  
ثابت کرو کہ ف س خط و و و س پ ر کے ایک ثابت نقطہ میں سے  
گزرتا ہے۔

$$۳۵ - \text{اُن قائم زائدوں کے مرکروں کا طریقی جن کے محور } \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{2} \text{ مآ} = 1$$

کے محوروں کے متوازی ہیں اور جو ناقص کے ساتھ دوسرے رتبہ کا تماس  
رکھتے ہیں مساوات

$$\left( \frac{1}{2} \text{ لآ} \right) + \left( \frac{1}{2} \text{ مآ} \right) = \frac{1}{2} (1 + 2 \text{ ب})$$

سے حاصل ہوگا۔  
۳۶ - اُن قائم زائدوں کے مرکروں کا طریقی جن کے محور محدودوں کے  
محوروں کے متوازی ہیں اور جو مکافی مآ - ۱۲ لآ = کے ساتھ دوسرے  
رتبہ کا تماس رکھتے ہیں مساوات

$$۱۲ \text{ مآ} = ۱۲ (1 + 2 \text{ لآ})$$

سے حاصل ہوگا۔

۳۷ - اگر ایک مخروطی کے لحاظ سے مزدوج نقطوں کے چار دیے  
ہوئے زوج ف اور ف، ق اور ق، س اور س، س اور س  
ہوں تو ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریقی ایک مخروطی ہے۔  
۳۸ - اگر ایک مخروطی کے لحاظ سے دیے ہوئے مزدوج نقطوں  
چار زوج ل اور ل، م اور م، ن اور ن، ن اور ن ہوں  
تو ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریقی ایک مخروطی ہے۔

۳۹ - ایک مخروطی کے نقطہ ف پر کا عماد محوروں کو نقطوں  
گ، گ پر قطع کرتا ہے اور گ گ کا نقطہ وسطی و ہے۔ ثابت کرو کہ  
تین دیگر نقطوں ق، س، س پر کے عماد و پر ملیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ  
ق، س، س، اس مثلث کے راس ہیں جو ناقص میں اعظم رقبہ کا



۶۴۔

۴۴۔ (ب ج د ع ف) ایک مسدس ہے جو مخروطی میں اور مخروطی میں کے گرد کھینچا گیا ہے۔ خطوط 'ا' و 'ب' و 'و' وغیرہ جو کسی نقطہ و میں سے کھینچے گئے ہیں میں کو مکرر نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' وغیرہ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مسدس (ب ج د ع ف) میں ایک مخروطی کھینچا جاسکتا ہے۔

۴۵۔ ایک مخروطی کو ایک مثلث میں کھینچا گیا ہے، یہ مخروطی ایسا ہے کہ نقاط تماس پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کا مرکز ایک کعبی منحنی پر واقع ہے جو 'ا' 'ب' 'ج' مرکز ہندسی 'گ' مرکز عمودی و نقاط (۱±، ۱±، ۱±) نقطہ (ا' 'ب' 'ج) اور 'و' 'ب' و 'ج' کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے۔

۴۶۔ ایک مخروطی 'ا' 'ب' 'ج' میں سے گذرتا ہے اور 'ا' 'ب' 'ج' پر کے عماد ہم نقطہ ہیں۔ اگر یہ مخروطی متوازی خطوط مستقیم کا ایک زوج نہ ہو تو ثابت کرو کہ اس کا مرکز ایک کعبی منحنی پر واقع ہے جو 'ا' 'ب' 'ج' میں سے گذرتا ہے اور نیز 'ا' 'ب' 'ج' کے مرکز ہندسی اور ان دائروں کے مرکروں میں سے گذرتا ہے جو 'ا' 'ب' 'ج' کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔

۴۷۔ ایک ایسے دائرہ کے مرکز کے طریق کی مساوات معلوم کرو جو تین دیے ہوئے دائروں کو مساوی زاویوں پر قطع کرے اور ثابت کرو کہ یہ طریق ایک خط مستقیم ہے جو ان تین دائروں کے بنیادی مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۴۸۔ اگر ایک ناقص کے نقطوں 'ف' 'ق' 'س' پر کے تماس ایک نقطہ و پر جو ثابت نقطہ 'ف' پر کے عماد پر ہے میں تو ثابت کرو کہ مثلث کے مرکز ہندسی، ماٹ مرکز، اور مرکز عمودی کے طریق نقطہ و کے مختلف محلوں کے لیے خطوط مستقیم ہیں۔



۴۹۔ اگر ناقص  $\frac{لا^2}{وا} + \frac{ما^2}{ب^2} - ۱ = ۰$  کا ایک وتر ف ق (۴۴۲)

ہم ماسکی ناقص  $\frac{لا^2}{وا} + \frac{ما^2}{ب^2} - ۱ = ۰$  کو مس کرے تو ف پر کا  
ماس ق پر کے عماد سے ناقص

$$\frac{\frac{لا^2}{وا} + \frac{ما^2}{ب^2} - ۱}{\frac{لا^2}{وا} + \frac{ما^2}{ب^2} - ۱} = ۱$$

پر ملے گا۔

۵۰۔ ایک ناقص کے چار نقطوں ا، ب، ج، د پر کے  
عماد ایک نقطہ ف پر ملتے ہیں اور دائروں ب ج د، ج د ا،  
د ا ب، ا ب ج کے مرکز ا، ب، ج، د ہیں۔ ثابت کرو کہ  
ا، ب، ج، د میں سے گزرنے والے وہ خط جو ا، ب، ج، د  
پر کے عمادوں کے متوازی ہیں ف میں سے گزرنے والے قطر پر ایک  
نقطہ پر ملیں گے۔

۵۱۔ اگر قائم زائد لا ما۔ د کے وتر ف ق کا وسطی نقطہ  
(لا، ما) ہو تو وتر ف ق اور ف ق پر کے ماس مکانی

$$۲ = \sqrt{\frac{لا}{ما}} + \sqrt{\frac{ما}{لا}}$$

کو مس کریں گے۔

۵۲۔ اگر مثلث ا ب ج کے راس (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما)

ہوں اور مثلث ناقص  $\frac{لا^2}{وا} + \frac{ما^2}{ب^2} - ۱ = ۰$  کے لیے خود قطعی ہو تو  
نقطے ا، ب، ج، قائم زائد



ثابت کرو کہ دو متقارب ایک ثابت مکانی کو جو مثلث (ج ب ج) کے ضلعوں کو مس کرتا ہے اس کے گاہ اور اس کا محور دی ہوئی سمت میں ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔

۵۸۔ ایک دیے ہوئے مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی میں سے دو دو کو تین خطوط مستقیم سے ملایا گیا ہے۔ کسی مخروطی کے لحاظ سے جو مثلث میں کھینچا گیا ہے ان خطوط مستقیم کے قطب لیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان قطبوں سے بنے ہوئے مثلث کا رقبہ مستقل ہے۔

$$۵۹۔ ناقص \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{r''} = \text{ا کے نقطوں عہ 'بہ' جہ پر کے عمادوں}$$

سے بنے ہوئے مثلث کا رقبہ

$$\frac{(1 - \frac{1}{r})}{1} \text{ مس } \frac{1}{r} (\text{جہ} - \text{عہ}) \text{ مس } \frac{1}{r'} (\text{عہ} - \text{بہ})$$

$$\{ 3 \text{ جب } (\text{جہ} + \text{بہ}) \}$$

ہوگا۔

$$۶۰۔ \text{اگر } \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{r''} = \text{ا کے نقطوں ف' ق' س پر کے عماد}$$

ناقص پر نقطہ (لا، با) پر ملیں تو دائرہ ف ق س کی مساوات

$$لا + ما - \frac{1}{r} لا - \frac{1}{r'} با - \frac{1}{r''} ب = 0$$

ہوگی۔

$$۶۱۔ \text{اگر } \frac{1}{r} = 1 + \text{زجم طہ کے نقطوں عہ 'بہ' جہ 'ضہ' پر کے}$$

عماد ہم نقطہ ہوں تو

$$\text{مس } \frac{1}{r} \text{ عہ مس } \frac{1}{r} \text{ بہ مس } \frac{1}{r} \text{ جہ مس } \frac{1}{r} \text{ ضہ} + \left( \frac{1}{r} + 1 \right) = 0$$

۶۲۔ ایک محزوطی جو تین دے ہوئے نقطوں میں سے کھینچا گیا ہے ایک دے ہوئے محزوطی کو نقطوں 'ف' 'ق' 'س' پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ 'ف' 'ق' ایک دے ہوئے نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'س' ایک محزوطی کو لف کرتا ہے۔

۶۳۔ ایک دے ہوئے محزوطی پر دو ثابت نقطے 'ف' 'ق' لیے گئے ہیں اور ایک ثابت خط مستقیم پر 'س' کوئی نقطہ ہے۔ خطوط 'ف' 'س' 'ق' محزوطی کو مکمل 'ف' 'ق' پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' ایک محزوطی کو لف کرتا ہے۔

۶۴۔ ایک دے ہوئے نقطہ 'ف' سے ہم ماسکی محزوطیوں کے ایک دے ہوئے نظام کے کسی محزوطی کے 'ماس' کھینچے سکے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جو 'ف' اور 'ان' دو نقاط 'ماس' میں سے گذرتا ہے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۶۵۔ اگر کسی نقطہ سے ایک ناقص کے 'ماس' 'ت' 'ف' 'ت' 'ق' کھینچے جائیں تو دو طرف 'ق' اور 'ف' 'ق' پر کے عماد ایک مکانی کو جو ناقص کے محوروں کو مس کرتا ہے 'س' کرینگے۔ (۴۴۴)

۶۶۔ ایک دے ہوئے ناقص کے نقطہ 'ف' پر کے 'ماس' پر مرکز سے عمود کھینچا گیا ہے جس کا پائین ما ہے اور 'ما' کو ماسکی قرار دیکر ایک مکانی کھینچا گیا ہے جو ناقص کے محوروں کو مس کرتا ہے۔ اگر 'ف' اور 'ما' میں سے گذرتا ہو کوئی دائرہ کھینچا جائے جو ناقص کو 'ق' 'س' پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ مثلث 'ق' 'س' کے ضلع مکانی کو مس کرینگے اور 'ق' 'س' پر کے عماد اس عماد پر متقاطع ہوں گے جو 'ف' میں سے گذرنا قطر کے دوسرے سرے پر کھینچا گیا ہو۔

۶۷۔ اگر ایک دائرہ پر چار نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ہوں اور دائرہ کا مرکز ہو تو 'ا' 'ب' 'ج' 'د' میں سے گذرنے والے محزوطیوں کے مرکزوں کا طریق اسی نظام کے محزوطیوں کے (و سے کھینچے ہوئے) عمادوں کے

پائینوں کا طریق بھی ہوگا۔

۶۸۔ مثلث ا ب ج کے تین جانبی دائروں کے مرکز و 'و' و 'و' ہیں اور متناظر ضلعوں کے نقاط وسطی 'د' 'ع' 'ف' ہیں۔ ثابت کرو کہ 'و' 'د' 'و' 'ع' 'و' 'ف' ایک نقطہ 'ن' پر ملتے ہیں۔  
نیز اگر وہ خطوں جو 'ا' 'ب' 'ج' کو متقابل کے ضلعوں کے نقاط تماس سے ملاتے ہیں نقطہ 'ق' پر ملیں تو ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' مثلث کے مرکز ہندسی میں سے گزرے گا۔

۶۹۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے ماسکوں کا طریق جو

$$ل \pm م \pm ن = ۰$$

کو مس کرتے ہیں

	۲	۲	۲	(د + م + ی)
۰ =	۲	۲	۲	۲
	۲	۲	۲	۲
	۲	۲	۲	۲
	۲	۲	۲	۲

ہے۔

۷۰۔ ایک ناقص کے کوئی دو قطر جو ایک دوسرے کے علی القوام ہیں ایک ثابت نقطہ 'ن' پر کے تماس سے نقطوں 'ق' 'س' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ق' اور 'س' میں سے گزرنے والے دوسرے دو تماس ایک ثابت خط مستقیم پر جو ناقص اور 'ف' پر کے دائرہ انحناء کے مشترک وتر کے متوازی ہے اشتقاق ہوتے ہیں۔

۷۱۔ اگر 'ا' 'ب' 'ج' 'د' چار دائری نقطے ہوں تو 'ا' 'ب' 'ج' 'د' میں سے گزرنے والے دو مسکافیوں کے محور 'ف' 'ق' کے نقطہ 'ن' پر علی القوام متقاطع ہوں گے جہاں 'ا' 'ب' اور 'ج' 'د' کا

(۲۴۵)

نقطہ تقاطع 'ف'، 'ج' اور 'ب' د کا ق'، 'د' اور 'ب' ج کا س' ہے۔  
 ۷۲۔ اگر نقطے ('ف'، 'ج'، 'د'، 'س') دائری ہوں تو ان نقطوں کا  
 مرکز ہندسی نقطہ دائرہ پر ہوگا۔

۷۳۔ ایک مثلث کے تین عمودوں 'د'، 'ب'، 'ج' 'ف' پر  
 تین نقطے 'ف'، 'ق'، 'س' ایسے لیے گئے ہیں کہ

۱: 'ف' : 'د' = 'ب' : 'ق' = 'ج' : 'س' = 'ف' : 'لہ' : 'ا' :  
 اور 'ف'، 'ق'، 'س' سے نامتناظر ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ  
 ان عمودوں کے چھ پایاؤں ایک دائرہ پر واقع ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ (۱)  
 لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے دائروں کا لفافہ ایک مخروطی ہے جو حائل  
 دائرہ کے ساتھ دو ہر اتاس رکھتا ہے، اور (۲) دائروں کے مرکز و کا  
 طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۷۴۔ ثابت کرو کہ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{r}$  کا نصف

قطر انہما اُس نقطہ پر جہاں وہ  $e =$  کو مس کرتا ہے

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{r}$$

ہے۔

۷۵۔ اگر دو ہم ماسکی مخروطی ایسے ہوں کہ ایک میں ایسے  
 مثلث کھینچے جاسکیں جن کے ضلع دوسرے کو مس کریں تو مثلث کا  
 گیارہ مستقل ہوگا۔

۷۶۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کا اندرونی دائرہ اور نو نقطہ دائرہ  
 ایک دوسرے کو اُس قائم زائد کے مرکز پر مس کرتے ہیں جو مثلث کو  
 حائل کرتا ہے اور اندرونی مرکز میں سے گزرتا ہے۔

۷۷۔ ایک مثلث

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

کو حائل کرتا ہے اور اس کا مرکز عمودی نقطہ (۱، ۰) پر ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث کا اس مخروطی

$$لا(۱-۲) + ۲(۱+۲) + ۲(۱-۲) = ۲(۱-۲) - ۲(۱-۲)$$

پرواقع ہے۔

$$۸ - ۲ = \frac{۲}{ب} + \frac{۲}{ا} = ۱ \text{ میں مثلث کھینچے گئے ہیں جنکے}$$

مرکز ہندسی نقطہ (۳، ۳) پر ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے ضلع مخروطی

$$\frac{۲}{ب} + \frac{۲}{ا} (۱ - \frac{۲}{ب} + \frac{۲}{ا}) + (۱ - \frac{۲}{ب} + \frac{۲}{ا}) + (۱ - \frac{۲}{ب} + \frac{۲}{ا}) = ۰$$

کو مس کرتے ہیں۔

$$۹ - ۱ = \frac{۲}{ب} + \frac{۲}{ا} = ۱ \text{ کو حائل کرتا ہے (۴۴۶)}$$

اور اس کا مرکز ہندسی نقطہ (۳، ۳) پر ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے اس مخروطی

$$۲ = \frac{۲}{ب} (۱ - \frac{۲}{ب}) + \frac{۲}{ا} (۱ - \frac{۲}{ا}) + \frac{۲}{ا} (۱ - \frac{۲}{ا})$$

پر ہیں۔

۸۰۔ ایک مثلث کو ایک مکافی میں اور ایک مخروطی کے گرد کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز ہندسی کا طریق عام طور پر ایک مکافی ہوگا، لیکن یہ طریق ایک خط مستقیم ہوگا اگر دیا ہوا مخروطی ایک

مکافی ہو۔

۸۱۔ مخروطی ایسے چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرتے ہیں کہ ان میں سے دو کو ملانے والا خط دوسرے دو کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے متقاربوں کا لفظ ایک مکافی ہے۔

۸۲۔ مخروطی ایسے چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرتے ہیں کہ ان میں سے دو کو ملانے والا خط دوسرے کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے محور ایک مکافی کو لف کرتے ہیں۔

۸۳۔ اگر ایک چار ضلعی کے ضلع ایک دائرہ کو مس کریں تو ان مخروطیوں کے محور جو اس چار ضلعی میں کھینچے جائیں ایک مکافی کو لف کریں گے۔

۸۴۔ اگر مثلث  $\Delta B C$  کو مخروطی  $\frac{L^2}{r} + \frac{M^2}{r} - 1 = 0$

میں کھینچا جائے اور ضلع  $B C$ ،  $\Delta B C$ ،  $\Delta B C$ ، مخروطی  $\frac{L^2}{r} + \frac{M^2}{r} - 1 = 0$  کو نقطوں  $A$ ،  $B$ ،  $C$  پر مس کریں تو  $A$ ،  $B$ ،  $C$  اور  $\Delta B C$  مخروطی

$\Delta^2 (B + B) \frac{L^2}{r} + B^2 (1 + 1) \frac{M^2}{r} - (AB - AB)^2 = 0$  پر ایک نقطہ پر ملیں گے۔

۸۵۔ مثلث  $\Delta B C$  کو مخروطی

$$0 = 1 - \frac{L^2}{r} + \frac{M^2}{r}$$

میں کھینچا گیا ہے اور ضلع  $B C$ ،  $\Delta B C$ ، اور  $\Delta B C$  مخروطی



$\frac{لا^۲}{ب^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} - ۱ =$  کو 'ب' ج پر مس کرتے ہیں۔ حسب ذیل مسئلے ثابت کرو:

(۱) 'ب' ج پر کے عماد مخروطی

$$لا^۲ + ب^۲ ما^۲ = (لا - ب)^۲$$

پرایک نقطہ میں ملیں گے۔

(۲) 'ب' ج پر کے عماد مخروطی

$$\frac{لا^۲}{ب^۲} + \frac{ب^۲ ما^۲}{ب^۲} = (لا - ب)^۲$$

پرایک نقطہ میں ملیں گے۔

(۳) 'ب' ج کا مرکز عمودی مخروطی

$$لا^۲ + ب^۲ ما^۲ = (لا - ب)^۲$$

پر ہوگا۔

(۴) مثلث 'ب' ج کا مائٹ مرکز مخروطی

$$لا^۲ (لا - ب) + ب^۲ ما^۲ (ب - لا) = (لا - ب)^۲$$

پر ہوگا۔

۸۶۔ اگر چار ضلعیوں کی لامتناہی تعداد مخروطی میں ہیں اور مخروطی میں م کے گرد غنیمتی جاسکے تو ثابت کرو کہ مثلثوں کی لامتناہی تعداد میں ہیں اور میں م کے گرد غنیمتی جاسکتی ہے جہاں میں م کے لمحات سے میں کا قطبی نکالی میں ہے۔

۸۷۔ اگر تین مخروطی ایک نقطہ میں سے گزریں تو اس خط کا لغات ایک مخروطی ہوگا جو ان مخروطیوں کو نقطوں کے تین زوجوں میں

جو درپیش میں ہیں قطع کرتا ہے۔

۸۸۔ تین مخروطیوں  $س، س، س$  میں نقطہ و

مشترک ہے۔  $س، س$  اور  $س، س$  کے بقیہ نقاط تقاطع  $ا، ب، ج$  ہیں،  $س، س$  اور  $س، س$  کے  $ل، م، ن$  ہیں، اور  $س، س$  اور  $س، س$  کے  $ف، ق، ر$  ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثوں  $ا، ب، ج$ ،  $ف، ق، ر$ ،  $ل، م، ن$  کے نواضع ایک ہی مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۸۹۔ ثابت کرو کہ اگر مخروطیوں  $س = س، س = س$  میں مشترک

وتر  $ع = ب، ب = ب$  ایسے ہوں کہ  $س = س = ع$  بہ تو مساوات

$ک، ا، ع = ۲$ ۔  $ک (س + س) + ب = ۲$ ۔ ایک ایسے مخروطی کو تعبیر

کرے گی جو  $س$  اور  $س$  میں سے ہر ایک کے ساتھ دو ہر تاس رکھتا ہے۔

ایک مخروطی مخروطیوں

$$لا + ما - ز (لا + ج) = ۲، لا + ما - ز (لا + ج) = ۲$$

میں سے ہر ایک کے ساتھ محدود دو ہر تاس رکھتا ہے۔ اس کی عام

مساوات لکھو اور ثابت کرو کہ تاس کے وتر مبداء میں سے گذرتے

ہوئے عمودی وتر ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اگر  $ز = ۲ + تر = ۲$  اتوا ایسے

تمام مخروطی قائم زائد ہیں۔

۹۰۔ ثابت کرو کہ مخروطیوں  $س = ما - ۲$ ،  $لا = ۲$ ۔

$س = لا - ۲$ ،  $ب = ما = ۲$ ، اور  $س = س = لا + ما + ۲$ ،  $ب = ۲$  میں

ایسا رشتہ ہے کہ مثلثوں کی لامتناہی تعداد ایک میں گنہی جاسکتی ہے، دوسرے

کے حائل کی جاسکتی ہے، اور تیسرے کے لئے خود قطبی ہے۔ نیز ثابت

کرو کہ ان میں سے کسی ایک مخروطی کا ماس دوسرے دو مخروطیوں سے

موسیقی طور پر قطع ہوتا ہے، اور وہ ماس جو ایک مخروطی کے کسی نقطہ سے

دوسرے دو مخروطیوں کے کھینچے گئے ہوں ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔  
۹۱۔ ثابت کرو کہ مخروطی

س = عہ - ۲ ل بہ جہ = ۰، م س = ۲۲ م جہ عہ = ۰، (۴۴۸)

مس = ۲۲ جہ = ۲۲ م جہ عہ = ۰،  
معد رشتہ ل م ن + ۱ = ۰ کے اس طرح مربوط ہیں کہ ان کو خواہ کسی  
ترتیب میں لیا جائے مثلثوں کی لامتناہی تعداد ایک مخروطی میں کھینچی  
جاسکتی ہے، دوسرے کے حاط لکھا جاسکتی ہے اور تیسرے کے لیے  
خود قطبی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ان میں سے کسی ایک مخروطی کا ماس  
دوسرے دو مخروطیوں سے موسیقی طور پر قطع ہوتا ہے اور وہ ماس  
جو ایک مخروطی کے کسی نقطہ سے دوسرے دو مخروطیوں کے کھینچے  
گئے ہوں ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۹۲۔ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو  $\frac{ل}{۲} + \frac{ل}{۲} - ۱ = ۰$  کے

ان ماسوں کو جو دتر

ل لا م ما - ۱ = ۰  
کے سروں پر کھینچے گئے ہیں مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر مخروطی اور  
دائرہ کے تقاطع کے وتروں میں سے وہ دتر جو ماس کے وتروں کے  
نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے خط

لاجم عہ + ماجب عہ = ۰

کے متوازی ہوں تو ماسوں کا نقطہ تقاطع مخروطی

$\frac{ل}{۲} - \frac{ل}{۲} = \frac{ل}{۲} - \frac{ل}{۲}$   
 $\frac{ل}{۲} - \frac{ل}{۲} = \frac{ل}{۲} - \frac{ل}{۲}$

پر ہو گا جو ایک قائم زائد دے ہوئے ناقص کے ہم ماسکی ہے۔

۹۳۔ ثابت کرو کہ  $s = (a, b, c, n, g, h)$  کے نقطہ  $(a, b)$  پر قریب ترین تماس کے مکانی کی مساوات  
 $\Delta s + c = t$ ۔

سے یا

$$- \Delta t = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & f & h \end{vmatrix}$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

۹۴۔ اگر ایک مخروطی جس کو ایک مثلث میں کھینچا گیا ہو  
 حائط دائرہ کے مرکز میں سے گزرے تو مخروطی کا مرتب دائرہ  
 مثلث کے حائط دائرہ کو مس کرے گا۔

۹۵۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مخروطی کو ایک مثلث میں کھینچا  
 جائے اور مخروطی کا مرتب دائرہ مثلث کے حائط دائرہ کو مس کرے  
 تو وہ نقطہ دائرہ کو بھی مس کرے گا۔

۹۶۔ ثابت کرو کہ ہم ماسکی مخروطیوں کے چار زوج ایسے  
 ہوتے ہیں کہ ہر زوج کا ایک مخروطی ایک دے ہوئے مثلث میں اور  
 دوسرا اس مثلث کے گرد کھینچا جاسکتا ہے۔

۹۷۔ تین دے ہوئے نقطوں  $(a, b, c)$  سے ایک دے

(۹۴۹)

ہوئے دائرہ مس کے تماس  $(a, b, c)$  ج سما ہیں۔  
 ثابت کرو کہ (۱) اگر تین مستطیلوں  $b, c, x$   $(a, b, c)$  ج  $(a, b, c)$   
 $a, b, c$  ج سما میں سے ایک، دوسرے دو کے مجموعہ سے بڑا

ہو تو دائرہ (ب ج دائرہ) سے کو قطع کرے گا، (۲) اگر ان میں سے ایک مستطیل دوسرے دو کے مجموعہ کے مساوی ہو تو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں گے۔ اور (۳) اگر ان میں سے مستطیل دوسرے دو کے مجموعہ سے کم ہو تو دائروں میں کوئی نقطے مشترک نہیں ہوں گے۔

۹۸۔ ایک چار ضلعی کو

$$\text{مس} = ۱ع + ۲ب + ۳ج + ۴د = ۰$$

میں کھینچا گیا ہے اور اس کے تین ضلع

$$\text{مس} = ۱ع + ۲د + ۳ط + ۴ج = ۰$$

کو مس کرتے ہیں، ثابت کرو کہ چوتھا ضلع

$$۱ع = \left[ \left( \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} \right) - \left( \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} \right) \right] ۱ع = ۰$$

کو مس کرتا ہے۔

۹۹۔ ایک نقطہ سے مخروطیوں میں سے، مس = ۰ کے ماس کھینچے گئے ہیں جو مستقل چلیبی نسبت لہ کی ایک پینل بنائے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق

$$\Delta \text{مس} - \left( \frac{۱}{۱+۲} \right) ۱ع = ۰$$

ہے۔

۱۰۰۔ ایک دے ہوئے مخروطی کی مساوات  $۱ع = ۰$  ہے۔ ثابت کرو کہ اس مخروطی کی عام مساوات جو نقطوں  $۱ع = ۰$  اور  $۲ب = ۰$  میں سے گزرتا ہے اور جو دے ہوئے مخروطی کو

نقطہ ف پر مس کرتا ہے اور جس کا نصف قطر انحناء، نقطہ ف پر  
دے ہوئے محرومی کے انحناء، (اُسی نقطہ ف پر) کا گنا ہے حسب  
ذیل ہے :

ل (عہ بہ - جہ<sup>۲</sup>) + (ک - ا) جہ (عہ - ۲ ل جہ + ل<sup>۲</sup> بہ) = ۰  
نیز ثابت کرو کہ دوسرے مشترک ماسوں کے نقطۂ تقاطع کا  
طریق

$$عہ بہ = \left( \frac{ک - ا}{ک + ا} \right) جہ^۲$$

ہے۔

مستطیل

# فہرست اصطلاحات

## مخروطی تراشیں

انگریزی	اُردو	انگریزی	اُردو
<b>A</b>		<b>Co-axial circles</b>	ہم محور دائرے
<b>Anharmonic ratio</b>	غیر متناسقی	<b>Collinear</b>	ہم خط
<b>or cross ratio</b>	چلیبی نسبتیں	<b>Complement</b>	تکملہ
<b>Areal co-ordinates</b>	رقبہ کی حدود	<b>Concyclic points</b>	ہم دائری نقطے
<b>Asymptote</b>	مقابلہ	<b>Confocal conic</b>	ہم فوکی مخروطی
<b>Auxiliary circle</b>	امدادی دائرہ	<b>Confocals</b>	ہم فوکی
<b>Auxiliary conic</b>	امدادی مخروطی	<b>Conics</b>	مخروطی
<b>Axes</b>	محاور (واحد - محور)	<b>Conjugate axis</b>	زردوج محور
<b>C</b>		<b>Conoidal surface</b>	مخروطی بنا سطح
<b>Cartesian-</b>		<b>Co-normal points</b>	عامہ نقطے
<b>co-ordinates</b>	کارٹیزیائی مختصات	<b>Co-ordinate</b>	رد
<b>Centre locus</b>	مرکز طریق	<b>Corresponding</b>	متناسق
<b>Centroid</b>	مرکز ثقل	<b>chords</b>	تساوی نقطے
<b>Circumcentre</b>	حاطہ مرکز	<b>D</b>	
<b>Circumscribing</b>		<b>Degree</b>	
<b>conic</b>	حاطہ مخروطی	<b>Diagonal point</b>	انقطہ
<b>Class</b>	جماعت		

انگریزی	اُردو	انگریزی	اُردو
Director circle	مرتبہ دائرہ	Homogeneous equation	متجانس مساوات
Directrix	دُتب (مبع - مرتبات)	Homographic	ہم رسم
Discriminant	ممیز	Hyperbola	قطع زائد
Double points or foci	دو ہرے نقطے یا اس کے	I	
E		In-centre	اندرونی مرکز
Eccentric angle	بَارج المکرز زاویہ	Inscribed conic	اندرونی مخروطی
Eccentricity	خروج المکرز	Invariants	غیر متغیر
Ellipse	قطع ناقص	Involution	دریخت
Envelope	لفاف	L	
Equi-conjugate diameters	مساوی مزدوج اقطار	Latus-rectum	وترِ خاص
F		Limiting points	انتہائی نقطے
Foci	اسے	Linear dimensions	خطی ابعاد
Fociod	اس کے نما	Locus	طریق
G		M	
Generating line	نکوی خط	Major axis	محورِ عظم
Generator	مکون	Minor axis	محورِ اصغر
H		N	
Harmonically conjugate	متناسق طور پر زوج	Normal	عماد
Harmonic progression	سلسلہ متناسق	O	
		Oblique axis	ائل محور



انگریزی	اردو	انگریزی	اردو
Origin	مبدأ	Reciprocation	مکافات
Orthogonal circles	} علی القوائم دائرے	Rectangular hyperbola	} قائم زائد
Osculating curve	نشی منحنی	Re-entrant	متداخلہ
P		S	
Parabola	قطع مکانی	Scalar quantities	میزانی مقداریں
Pencil	پنسل	Self-Polar triangle	} خود قطبی مثلث
Polar	قطبی	Semi latus-rectum	نیم وتر خاص
Polar co-ordinates	قطبی محدد	T	
Polarity	قطبیت	Tangential equation	} مماسی مساوات
Projection	تظلیل - اظلال	Transverse axis	قاطع محور
Projective property	نظمی خواص	Triad	ثلاثیہ
Q		Trilinear co-ordinates	} سه خطی محدد
Quadrants	ربعات	V	
R		Vertex	راس
Radical axis	بنیادی محور	Vectorial angle	سمتی زاویہ
Radius of curvature	} نصف قطر انحناء		
Radius rector	سمتی نصف قطر		
Range	سعت		
Reciprocal polar	متکافی قطبی		



# مغلطانا

## مخروطی تراشیں

صحیح	غلط	غلط	غلط	صحیح	غلط	غلط	غلط
قائم	قائم	۹	۳۸۴	(لا، لا)	(لا، لا)	۸	۱۰
لا	لا	۶	۳۸۸	(لا + لا)	(لا + لا)	۶	۱۱
دیے	دے	۱۲	۳۹۰	سا	سا	۶	۱۶
ایک	ایک	۱۵	۳۹۲	گھڑی	گھڑی	۱۲	۱۸
ن ب	ن ب	۱۶	۴۰۱	مخوروں	مخوروں	۴	۲۳
معادل	ل	۱۶	۴۰۳	$\frac{لا - لا}{لا - لا}$	$\frac{لا - لا}{لا - لا}$	آخری سطر	۲۶
مرکز	مراکز	۱۰	۴۰۹	=	=	۶	۳۴
=	=	۴	۴۲۸	(۶، ۳-)	(۶، ۳-)	۱۳	۳۸
وہی	رہی	۱۳	۴۳۴	مسئلہ اخذ	مسئلہ اخذ	۱۴	۱۴۱
(۷ + ۷ + ۷)	(۷ + ۷ + ۷)	۳	۴۳۸	مسئلہ	مسئلہ	۶	۱۴۳
ہے	ہے	۱۴	۴۴۰	$\frac{ک}{م}$	$\frac{ک}{م}$	۱۵	۱۶۲
نقطوں	نقطوں	۲۴	۴۴۶	$\frac{۲۱}{ج}$	$\frac{۲۱}{ج}$	۵	۱۹۱
و	و	۲۰	۵۴۶				

صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط
لغاف	لغاف	۱۱	۵۹۷	مساوت	مساوت	۸	۵۵۸
لا متناہی	لا انتہا	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۶۱۰}{۶۲۳}$	=	=	۸۴	۵۵۲
ر	و	۵	۶۱۹	الحاور زائد	الحاور زائد	۱۹	۵۵۵
متکافی	تکافی	۱۸	۶۲۵	ہوگا۔	ہے۔	۱۸	۵۶۱
				محور	محور	۲۲	۵۶۶
				تظلیل	تظلیل	۱۵	۵۷۸















